

유전자 알고리즘과 LMI 설계 방법을 이용한 강인 제어기의 설계

Design of a Robust Controller Using Genetic Algorithms and LMI Design Method

이 문 노*, 이 흥 규
(Moonnoh Lee¹ and Hong Kyu Lee²)

¹Dong-Eui University

²Korea University of Technology and Education

Abstract: This paper presents a controller design method for a robust control problem with multiple constraints using genetic algorithms and LMI design method. A robust H_∞ constraint with loop shaping and pole placement is used to address disturbance attenuation with error limits and desired transient specifications, in spite of the plant uncertainties and disturbances. In addition, a loop gain constraint is considered so as not to enlarge the loop gain unnecessarily. The robust H_∞ constraint and pole placement constraint can be expressed in terms of two matrix inequalities and the loop gain constraint can be considered as an objective function so that genetic algorithms can be applied. Accordingly, a robust controller can be obtained by integrating genetic algorithms with LMI approach. The proposed controller design method is applied to a track-following system of an optical disk drive and is evaluated through simulation results.

Keywords: robust H_∞ constraint, pole placement constraint, loop gain constraint, genetic algorithms, LMI (Linear Matrix Inequality)

I. 서론

높은 성능을 요구하는 시스템에 실제로 적용할 수 있는 제어기를 설계하기 위해서 여러 목표 성능들을 동시에 고려하는 제어 문제를 다루는 것이 필요하다. 예를 들어, 광 디스크 드라이브의 트랙 추종 제어 시스템은 트랙킹 외란에 대해 트랙킹 에러가 허용 오차보다 작아야 하고 일시적인 충격이나 디스크 상의 결함에 대해 안정적인 과도 응답 특성이 만족되도록 설계되어야 한다. 이를 위해 외란 감쇠와 과도 응답 특성 등의 제어 목적들이 안정적인 트랙 추종 시스템을 설계하기 위해 설계 과정에서 동시에 고려되어야 한다. 그렇지 않으면 제어 시스템은 반복적인 실험을 통해 여러 목표 성능이 만족될 때까지 반복해서 설계되어야 한다.

실제로 적용할 수 있는 제어기를 설계하기 위해서는 이용할 수 있는 모든 설계 정보와 설계 경험 등을 설계 과정에서 고려하여야 한다. 발생하는 최대 외란의 크기나 주파수는 실험이나 설계자의 경험에 의해 적절히 추정될 수 있고 설계 특성으로 사용될 수 있다. 발생하는 외란을 감쇠하기 위한 최소 루프 게인은 추정된 외란이나 최대 허용 에러로부터 구해질 수 있고 강인 H_∞ 제어기 설계 과정에서 가중 함수로 사용될 수 있다[7,8]. 일시적인 충격이나 외란에 대해 시스템을 빠르게 안정화시키기 위해서는 제어시스템이 목표로 하는 과도 응답 특성을 가지도록 설계되어야 한다. 이를 위해 페루프 극점의 위치에 대한 추가적인 제한 조건을 설계과정에서 고려하는 것이 필요하다. 일반적으로 외란의 영향을 더

감쇠하거나 과도 응답 성능을 더 높일수록 제어 대역폭이나 루프 게인 등이 불필요하게 증가하게 되고 제어 신호들이 포화될 가능성이 증가하게 된다. 그래서 외란 감쇠와 과도 응답 특성을 적절히 만족하면서 루프 게인과 제어기 게인은 최소가 되도록 하는 것이 필요하다.

유전자 알고리즘을 토대로 하는 하이브리드 설계 방법은 불확실성을 가진 시스템에 대한 다중 제한 조건을 가진 강인 제어 문제를 다루기 위해 많이 제안되었다[1-6]. Hsu는 불확실한 interval 시스템에 대한 강인 제어기를 설계하기 위해 게인 여유와 위상 여유를 고려한 유전자 알고리즘 설계 방법을 제안하였다[1]. Pereira와 Neumann는 polytopic 파라미터 불확실성을 가진 불확실한 시스템을 위해 유전자 알고리즘과 LMI 설계 방법을 사용하여 H_∞ , H_2 극점 위치 제한 조건을 고려하였다[2,3]. 일반적으로 유전자 알고리즘을 사용하는 대부분의 다중 제한 조건을 가진 강인 제어 방법들은 실현 가능한 제어기를 찾기 위해서나 수학적으로 표현하기 어려운 제한 조건을 다루기 위해 유전자 알고리즘을 사용하였다.

본 논문에서는 norm-bounded 불확실성과 외란을 가진 선형 시스템에 대하여 다중 제한 조건을 가진 강인 제어기 설계 문제를 다룬다. 강인 H_∞ 제한 조건과 극점 위치 제한 조건은 외란에 대해 에러가 허용 범위내에 유지하고 목표로 하는 과도 응답 특성을 만족하도록 하기 위해 고려하였다. 루프 게인 제한 조건은 불필요하게 루프 게인이 증가되지 않도록 하기 위해 고려하였다. 강인 H_∞ 제한 조건과 극점 위치 제한 조건은 두 개의 부등식 행렬로 표현될 수 있고 루프 게인 제한 조건은 유전자 알고리즘에서 목표 함수로 고려될 수 있다. 결과적으로 본 논문에서 고려하는 다중 제한 조건을 만족하는 강인 제어기는 유전자 알고리즘과 LMI 설계 방법을 통합하여 설계될 수 있다. 제안된 제어기 설계 방법은 광 디스크

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2011. 1. 17., 수정: 2011. 5. 20., 채택확정: 2011. 5. 30.

이문노: 동의대학교 컴퓨터공학과(mnlee@deu.ac.kr)

이흥규: 한국기술교육대학교 전기공학과(hongkyu@kut.ac.kr)

* 이 논문은 2010학년도 동의대학교 연구년 지원에 의하여 연구되었음.

드라이브의 트랙 추종 시스템에 적용되고 시뮬레이션을 통해 설계 방법의 타당성을 검증하였다.

II. 다중 제한 조건을 가진 강인 제어 문제

본 논문에서는 다음과 같은 norm-bounded 불확실성과 외란을 가진 선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + H_1 p(t) + B_2 u(t) \\ e(t) &= C_2 x(t) + H_2 p(t) + d(t) \\ q(t) &= E_1 x(t), \quad p(t) = \Delta q(t), \quad \|\Delta\| \leq 1 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x(t)$ 는 상태 변수, $u(t)$ 는 제어 입력, $e(t)$ 는 측정 에러, $d(t)$ 는 외란, $p(t)$ 는 플랜트 불확실성 입력을 나타낸다. 플랜트 불확실성은 norm-bounded라고 가정되고 행렬 H_1, H_2, E_1 에 의해 포함된다. 그림 1은 불확실한 선형 시스템 (1)의 블록도를 나타낸다.

에러 제환 형태의 제어기 $C(s) \cong (A_c, B_c, C_c, 0)$ 를 (1)에 적용하면 폐루프 시스템은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{H}_1 p(t) + \bar{B}_1 d(t) \\ e(t) &= \bar{C}_2 \bar{x}(t) + H_2 p(t) + d(t) \\ q(t) &= \bar{E}_1 \bar{x}(t), \quad p(t) = \Delta q(t), \quad \|\Delta\| \leq 1 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ B_c H_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_2 = [C_2 \quad 0], \quad \bar{E}_1 = [E_1 \quad 0]$$

본 논문에서는 플랜트 불확실성과 외란에 대해 각 주파수에서 에러 $E(j\omega)$ 가 허용 범위 e_{max} 내에 유지하고 목표로 하는 과도 응답 특성을 만족하고 공칭 루프 게인 $L_n(j\omega)$ 이 최소화 되도록 강인 제어기 $C(s)$ 를 설계한다. 이를 위해 루프 형성을 고려한 강인 H_∞ 제한 조건, 극점 위치 제한 조건, 루프 게인 제한 조건들을 설계 과정에서 고려한다. 루프 게인 $L(j\omega)$ 은 설계자의 경험 등에 의해 추정된 최소 루프 게인 $L_{min}(j\omega)$ 보다 크고 공칭 루프 게인 $L_n(j\omega)$ 의 DC 게인과 제어 대역폭은 최소화 되도록 설계된다. 그리고 다중 제한 조건을 가진 강인 제어기는 유전자 알고리즘과 LMI 설계 방법을 통합한 설계 방법에 의해 설계될 수 있다는 것을 보인다.

1. 루프 형성을 고려한 강인 H_∞ 제한 조건

제어 시스템에 발생하는 외란을 효율적으로 제거하기 위해 제어 루프는 외란의 주파수 특성을 토대로 설계되어야 한다. 대부분의 외란은 저주파 형태를 가지는 경우가 많은데 다음의 과정을 통해 외란 제거를 위해 필요한 최소 루프 게인을 대략적으로 추정할 수 있다[8]. 제어 시스템에 영향을 주는 외란의 최대 크기 d_{max} 과 최대 주파수 ω_{max} 는 설계 스펙,

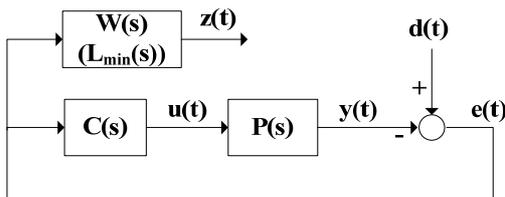


그림 1. 불확실한 선형시스템의 블록도.
Fig. 1. Block diagram of the uncertain linear system.

설계자의 경험, 간단한 측정을 통해 얻어질 수 있다. 만약 각 주파수 ω 에서 발생하는 외란 $d(\omega)$ 을 정현파로 표현한다면 외란의 가속도 $a(\omega)$ 와 각 주파수에서 발생하는 외란의 크기 d_ω 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} d(\omega) &= d_\omega \sin(\omega t) \\ a(\omega) &= a_{max} \sin(\omega t) = d_\omega \omega^2 \sin(\omega t + \pi) \\ d_\omega &= \frac{a_{max}}{\omega^2} = \left(\frac{\omega_{max}}{\omega}\right)^2, \quad a_{max} = \omega_{max}^2 \end{aligned} \tag{3}$$

최대 주파수 ω_{max} 에서 외란의 크기는 $d_\omega=1(0 \text{ dB})$ 을 이용하여 각 주파수에서 발생하는 외란의 크기 d_ω 는 최대 주파수 ω_{max} 의 제곱을 주파수 제곱으로 나눔으로써 얻을 수 있다. 이렇게 추정된 외란 $d(\omega)$ 을 이용하여 최소 루프 게인을 구할 수 있다. 그림 2는 추정된 최소 루프 게인을 나타낸다. 저주파 대역의 최소 루프 게인 L_0 는 외란의 최대 크기 d_{max} 을 최대 허용 에러 e_{max} 로 나눔으로써 얻을 수 있고 고주파 대역의 최소 루프 게인 L_1 은 추정된 각 주파수에서 추정된 외란의 크기 d_ω 를 최대 허용 에러 e_{max} 로 나눔으로써 얻을 수 있다. 이러한 루프 게인 추정 방법은 아직도 산업체에서 많이 사용하는 방법이다.

외란은 다음의 과정을 통해서도 추정될 수 있다. 그림 1에서 각 주파수에서 발생하는 외란 $D(j\omega)$ 는 에러 신호, 제어기 출력, 플랜트 모델을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D(j\omega) = E(j\omega) + P(j\omega)U(j\omega) \tag{4}$$

플랜트 불확실성은 (4)의 직접적인 계산을 불가능하게 하기 때문에 공칭 플랜트 모델 $P_n(j\omega)$ 을 사용하고 플랜트 불확실성의 영향을 최대한 보상하는 방법을 고려한다. 루프 게인 조정 알고리즘은 플랜트 불확실성에 대해서도 루프 게인을 일정하게 유지하기 위해 제어기의 DC 게인을 조정하는 알고리즘이다[7,8]. 그래서 (4)는 공칭 플랜트 모델과 보상 게인 K_c 를 적용하여 다음과 같이 수정될 수 있다.

$$\hat{D}(j\omega) = E(j\omega) + K_c P_n(j\omega)U(j\omega) \tag{5}$$

루프 게인 조정 결과를 토대로 제어기 DC 게인의 변화를 역으로 보상 게인 K_c 에 적용함으로써 플랜트 불확실성의 영향은 외란 추정에서 반영될 수 있다. 최소 루프 게인 $L_{min}(j\omega)$ 는 추정된 외란 (5)를 최대 허용 에러 e_{max} 로 나눔으로써 얻을 수 있다.

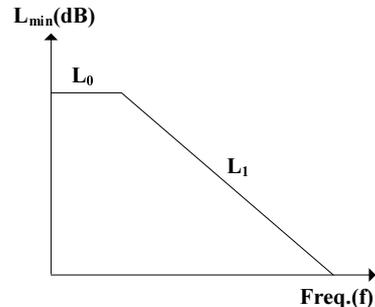


그림 2. 추정된 최소 루프 게인.
Fig. 2. An estimated minimum loop gain.

외란 제거를 효율적으로 하기 위해 강인 H_∞ 제어는 외란의 특성을 반영한 가중 함수를 고려하는 것이 필요하다. 이러한 루프 형성을 고려한 강인 H_∞ 제한 조건을 만족하는 제어기를 설계하기 위해 추정된 최소 루프 게인을 $Z(j\omega) = W(j\omega)E(j\omega)$ 와 같이 정의된 가중 함수 $W(j\omega)$ 로 도입한다. 페루프 시스템 (2)에 가중 함수 $W(j\omega) \cong (A_w, B_w, C_w, 0)$ 를 포함하면 가중 함수가 포함된 페루프 시스템은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_g(t) &= \bar{A}_g \bar{x}_g(t) + \bar{H}_{1g} p(t) + \bar{B}_{1g} d(t) \\ z(t) &= \bar{C}_{1g} \bar{x}_g(t) \\ q(t) &= \bar{E}_{1g} \bar{x}_g(t), \quad p(t) = \Delta q(t), \quad \|\Delta\| \leq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{A}_g = \begin{bmatrix} A & B_2 C_c & 0 \\ B_c C_2 & A_c & 0 \\ B_w C_2 & 0 & A_w \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_{1g} = \begin{bmatrix} H_1 \\ B_c H_2 \\ B_w H_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{1g} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \\ B_w \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_{1g} = [0 \quad 0 \quad C_w], \quad \bar{E}_{1g} = [E_1 \quad 0 \quad 0]$$

루프 형성을 고려한 강인 H_∞ 제한 조건은 가중 함수가 포함된 페루프 시스템 (6)이 모든 허용되는 외란과 불확실성에 대해 강인 안정하고 $\|T_{dz}(j\omega)\|_\infty < \gamma$ 이면 만족하게 된다. 만약 $\gamma < 1$ 을 만족하는 강인 제어기가 존재하면 각 주파수에서 에러는 다음과 같이 최대 허용 오차 e_{max} 내에 존재하게 된다.

$$|E(j\omega)| = \frac{|T_{dz}(j\omega)| |D(j\omega)|}{|W(j\omega)|} \leq \frac{|D(j\omega)|}{|L_{min}(j\omega)|} = e_{max} \quad (7)$$

(6)을 만족하는 모든 외란과 불확실성에 대해 (8)을 만족하는 Lyapunov 함수 $V(\bar{x}) = \bar{x}^T P_\infty \bar{x}$, $P_\infty > 0$ 가 존재하면 가중 함수가 포함된 페루프 시스템 (6)은 강인 안정하고 $\|T_{dz}(j\omega)\|_\infty < \gamma$ 를 만족하게 된다.

$$\frac{d}{dt} V(\bar{x}) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 d^T(t)d(t) < 0 \quad (8)$$

강인 최적 H_∞ 설계에서는 γ 를 최소화하는 목적 함수 J_1 을 도입할 수 있다. 루프 형성을 고려한 강인 H_∞ 제한 조건은 (9)를 만족하는 행렬 $A_\infty, B_\infty, C_\infty, X_\infty = P_\infty^{-1} > 0$ 와 상수 $\lambda_1 > 0$ 을 구하는 문제로 변환될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_g X_\infty + X_\infty \bar{A}_g^T & \bar{B}_{1g} & \bar{H}_{1g} & X_\infty \bar{C}_{1g}^T & \lambda_1 X_\infty \bar{E}_{1g}^T \\ \bar{B}_{1g}^T & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ \bar{H}_{1g}^T & 0 & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ \bar{C}_{1g} X_\infty & 0 & 0 & -I & 0 \\ \lambda_1 \bar{E}_{1g} X_\infty & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 I \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

2. 극점 위치 제한 조건

예기치 못한 일시적인 외부 충격이나 외부 외란에 의해 에러 등의 제어신호들이 일시적으로 커질 수 있고 시스템이 불안정해질 수 있다. 이러한 일시적인 외란을 빠르게 안정화시키기 위해서는 오버슈트, 상승 시간, 안정화 시간 등의 과도 응답 특성이 고려되어야 한다. 대부분의 시스템은 2차 선형 시스템으로 근사화될 수 있고 일시적인 외부 입력은 스텝 입력으로 간주될 수 있다. 그래서 본 논문에서는 2차 시스템에 스텝 입력이 인가되었을 때의 과도 응답 특성을 고려한다. 2

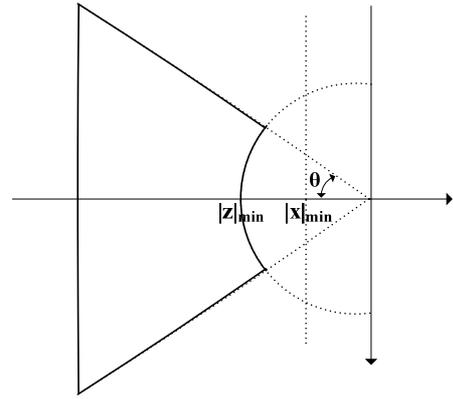


그림 3. 과도 응답 성능 지수에 의한 특성 영역.
Fig. 3. A specified subregion obtained by transient performance metrics.

차 시스템에 대한 오버슈트, 상승 시간, 안정화 시간은 다음과 같이 감쇠 상수 ξ 와 고유 주파수 ω_n 로 나타낼 수 있다.

$$\exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \leq O_d(\%), \quad \frac{3}{\xi\omega_n} \leq t_s, \quad \frac{1.8}{\omega_n} \leq t_r \quad (10)$$

페루프 시스템의 모든 극점이 존재해야 하는 특성 영역은 목표로 하는 과도 응답 특성에 따라 구한 감쇠 상수 ξ 와 고유 주파수 ω_n 의 범위를 토대로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \xi &\geq \xi_d \quad (|\theta| \leq \theta_d), \quad \xi\omega_n = x \geq |x|_{min} = \frac{3}{t_s}, \\ \omega_n &= |z| \geq |z|_{min} = \frac{1.8}{t_r}. \end{aligned} \quad (11)$$

따라서 목표로 하는 과도 응답 특성은 그림 3과 같이 페루프 시스템의 극점이 설정된 특정 영역에 존재하도록 하는 극점 위치 제한 조건을 고려함으로써 다루어질 수 있다.

(12)를 만족하는 대칭 행렬 $\alpha \in R^{m \times m}$ 과 $\beta \in R^{m \times m}$ 가 존재하면 안정화 영역 D 는 LMI 영역이다[9,10].

$$D = \{z \in C : f_D(z) := \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T < 0\} \quad (12)$$

여기서 $f_D(z) = [\alpha_{kl} + \beta_{kl}z + \beta_{lk}\bar{z}]_{k,l \leq m}$ 이다. LMI 영역은 원, 타원, 포물선 등의 대칭이고 볼록한 모든 다면체 영역을 포함한다. (13)을 만족하는 대칭 행렬 $X_D > 0$ 이 존재하면 페루프 시스템의 모든 극점은 설정된 LMI 영역에 포함되게 된다 [9-11].

$$\begin{aligned} M_D(\bar{A} + \bar{H}_1 \Delta \bar{E}_1, X_D) &= \alpha \otimes X_D \\ &+ \beta \otimes (\bar{A} + \bar{H}_1 \Delta \bar{E}_1) X_D + \beta^T \otimes ((\bar{A} + \bar{H}_1 \Delta \bar{E}_1) X_D)^T \\ &= Y_D + \beta \otimes (\bar{H}_1 \Delta \bar{E}_1 X_D) + \beta^T \otimes (\bar{H}_1 \Delta \bar{E}_1 X_D)^T < 0 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $Y_D = \alpha \otimes X_D + \beta \otimes (\bar{A} X_D) + \beta^T \otimes (\bar{A} X_D)^T$ 이다. (13)을 만족하는 충분 조건은 Lyapunov 이론과 S-절차를 이용하여 행렬 부등식으로 표현될 수 있다[11]. 결과적으로 모든 페루프 극점은 다음을 만족하는 행렬 $X_D > 0$ 와 상수 $\lambda_2 > 0$ 이 존재하면 설정된 LMI 영역에 포함되게 되고 극점 위치 제한 조건은 만족하게 된다.

$$\begin{bmatrix} Y_D & \beta \otimes \bar{H}_1 & I \otimes \lambda_2 X_D \bar{E}_1^T \\ \beta^T \otimes \bar{H}_1^T & -\lambda_2 I & 0 \\ I \otimes \lambda_2 \bar{E}_1 X_D & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

3. 루프 게인 제한 조건

외란 감쇠와 과도 응답 특성의 성능이 높아짐에 따라 설계 되는 제어 시스템은 불필요하게 큰 루프 게인, 제어기 게인, 제어 대역폭을 가지게 된다. 상대적으로 큰 루프 게인은 예기치 못한 작은 외란 입력에도 제어 신호를 포화하게 하고 궁극적으로 시스템을 불안정하게 한다. 더구나 상대적으로 큰 제어 대역폭은 액추에이터의 이차 공진 등의 원하지 않는 영향을 더 많이 받게 된다. 그래서 강인 H_∞ 제한 조건과 극점 위치 제한 조건을 만족하면서 루프 게인과 제어 대역폭은 최소화되어야 한다. 불확실성을 가지는 제어 시스템의 경우 루프 함수의 대역폭은 수식으로 표현하기가 어렵기 때문에 본 논문에서는 공칭 루프 함수의 DC 게인과 대역폭의 곱인 $L_n(0)\omega_L$ 을 최소화하는 목적 함수 J_2 를 고려한다. 유전자 알고리즘의 검색 과정을 통해 목적 함수 J_2 의 최적화는 고려될 수 있다.

III. 유전자 알고리즘과 LMI 설계 방법에 의한 다중 제한 조건을 가진 강인 제어기의 설계

본 논문에서 고려한 강인 H_∞ 제한 조건, 극점 위치 제한 조건, 루프 게인 제한 조건을 가진 강인 제어 문제는 다음의 최적화 문제로 나타낼 수 있다.

(9)와 (14)을 만족하는 행렬 $A_\infty, B_\infty, C_\infty, X_\infty > 0, X_D > 0$ 에 대해 목적함수 $J_1 = \gamma$ 와 $J_2 = L_n(0)\omega_L$ 를 최적화하라. (15)

(9)와 (14)에 존재하는 비선형 항목 때문에 (15)를 LMI 최적화 문제로 변환하기 위해 다음과 같이 Lyapunov 행렬 $X = X_1 = X_D$ 와 새로운 제어 변수들을 도입하는 것이 필요하다.

$$\begin{aligned} X_\infty &= \begin{bmatrix} X_1 & X_{12} \\ X_{12} & X_2 \end{bmatrix}, \quad X = X_1 = X_D, \quad X = \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & U \end{bmatrix}, \\ X^{-1} &= \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & V \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_c = NB_c, \quad \hat{C}_c = C_c M^T, \\ \hat{A}_c &= SAR + SB_c C_c M^T + NB_c C_c R + NA_c M^T \end{aligned} \quad (16)$$

이러한 변환은 최적화 문제 (15)의 해의 범위를 제한하게 되고 루프 게인 제한 조건은 선형 행렬 부등식으로 표현될 수 없다. 그래서 본 논문에서는 LMI 설계 방법과 유전자 알고리즘을 통합한 설계 방법에 의해 최적화 문제 (15)를 만족하는 강인 제어기를 설계한다. 유전자 알고리즘의 개체군으로 제어기 파라미터를 사용하면 모든 후보 개체에 대해 (9)과 (14)의 비선형 항목들은 선형화되기 때문에 (15)는 LMI 최적화 문제가 된다. 그러면 (16)의 변환은 필요가 없게 되고 (15)를 만족하는 해의 범위도 제한되지 않게 된다. 그림 4는 최적화 문제 (15)를 다루기 위한 본 논문에서 제안하는 LMI 설계 방법이 포함된 유전자 알고리즘을 나타낸다.

본 논문에서는 개체 변수의 수를 줄이기 위해 제어기 $C(s)$ 의 계수를 개체 변수로 사용한다. 실수값을 가지는 개체들은 초기에 임의적으로 생성되며 실현 가능성 테스트를 위해 각

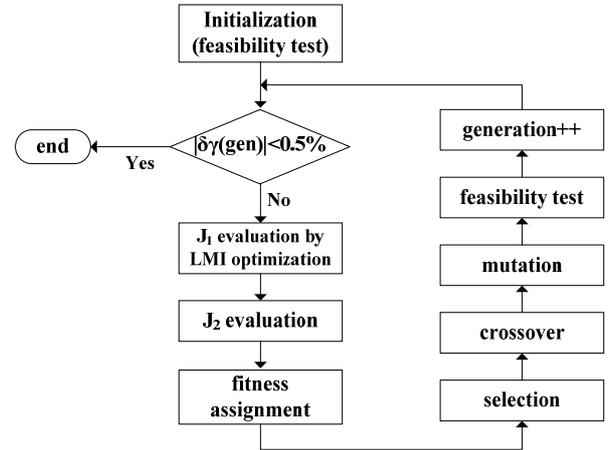


그림 4. LMI 설계 방법이 포함된 유전자 알고리즘의 흐름도.
Fig. 4. A flow diagram showing a genetic algorithm with the LMI approach.

개체들로부터 제어기 행렬을 구성한다. 각 개체에 대한 제어기 행렬들을 (9)와 (14)에 대입한 후 LMI 최적화 방법을 사용하여 (9)와 (14)를 만족하는 행렬 $X_\infty > 0, X_D > 0$ 와 상수 $\gamma > 0$ 가 존재하는 지를 체크한다. 이러한 실현 가능성 테스트를 만족하지 않는 개체들은 초기 개체에서 취소된다. 초기 단계는 실현 가능한 개체가 설정된 개체군의 수와 같을 때까지 계속된다.

각 개체에 대해 목적 함수 $J_1 = \gamma$ 와 $J_2 = L_n(0)\omega_L$ 의 값이 설정되고 목적 함수의 우선 순위에 따라 $\gamma \geq 1$ 일 때는 $J = J_1$ 로 설정하고 $\gamma < 1$ 일 때는 $J = J_2$ 로 설정한다. 이것은 강인 H_∞ 제한 조건과 극점 위치 제한 조건이 우선적으로 만족되어야 함을 의미한다. 목적 함수 J 는 선형 등급 알고리즘(linear ranking algorithm)에 의해 등급화되고 적합도(fitness)가 각 개체에 할당된다. 다음 세대를 위한 개체들은 확률론적인 일반 샘플링(stochastic universal sampling)에 의해 선택되고 교차 확률에 따라 교차 연산자를 적용하여 생성된다. 교차 후 각 개체는 돌연변이 확률에 따라 돌연변이가 발생하고 최종적으로 실현 가능성 테스트를 실행한다. 실현 가능성 테스트를 만족하는 개체만이 다음 세대를 위해 현 개체군에 재삽입된다. 이러한 유전자 알고리즘은 적절한 중단 조건 ($|\delta\gamma(\text{gen})| < 0.5\%$)이 만족될 때까지 계속된다.

IV. 시뮬레이션 결과

본 논문에서 제안한 다중 제한 조건을 가진 강인 제어기 설계 방법의 타당성을 평가하기 위해 DVD 기록기의 트랙 추종 시스템에 적용하였다. 그림 5는 트랙 추종 시스템의 블록도를 나타낸다. 트랙 추종 시스템은 광 위치 센서, 트랙킹

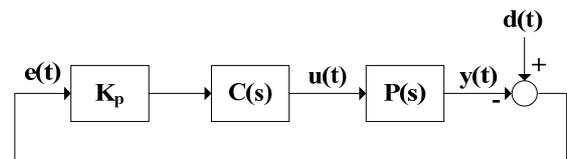


그림 5. 트랙 추종 시스템의 블록도.
Fig. 5. Block diagram of a track-following system.

액츄에이터 $P(s)$, 트랙킹 제어기 $C(s)$, 필터 및 증폭 회로로 구성된다. 트랙킹 에러 $e(t)$ 는 트랙 중심과 빔 스팟 위치 사이의 차이를 나타낸다. 트랙킹 에러는 광 소자에 의해 검출되며 증폭 계인 K_p 를 거쳐 트랙킹 제어기에 입력된다. 디스크 트랙에 존재하는 편심 때문에 디스크가 회전하면 트랙킹 외란 $d(t)$ 가 트랙 추종 시스템에 발생한다. 트랙킹 액츄에이터의 동작은 2차 선형 시스템으로 근사화될 수 있다. 트랙킹 액츄에이터의 공진 주파수, 감쇠 상수, DC 계인은 대략 64 Hz, 0.079, 1 mm/V이다. 액츄에이터의 데이터 시트에 있는 이러한 특성값들의 편차를 고려하여 액츄에이터 계수들은 공칭값에서 10%내에서 변한다고 가정한다. 이러한 액츄에이터 불확실성을 고려하여 트랙킹 액츄에이터는 다음과 같이 모델링될 수 있다[7].

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + H_1 p(t) + B_2 u(t) \\ e(t) &= C_2 x(t) + H_2 p(t) + d(t) \\ q(t) &= E_1 x(t), \quad p(t) = \Delta q(t), \quad \|\Delta\| \leq 1 \end{aligned} \quad (17)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 9216 \\ -17.5 & -63.73 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.88 & 3.18 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [-0.064 \quad 0], \quad H_2 = [-0.0032 \quad 0], \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

DVD 디스크의 트랙 피치의 반인 $0.37 \mu\text{m}$ 가 증폭 계인 K_p 를 거쳐 1.8V의 트랙킹 에러 신호로 생성되었다면 증폭 계인 K_p 는 $4.86 \times 10^6 \text{ [V/M]}$ 이다. 증폭된 트랙킹 에러 $K_p e(t)$ 만이 측정 가능하기 때문에 트랙킹 제어기는 $K_p e(t)$ 를 입력으로 가지는 에러 궤환 형태가 된다.

디스크에 기록된 데이터를 재생하기 위해서는 액츄에이터 불확실성과 트랙킹 외란에 대해서 트랙킹 에러는 $\pm 0.03 \mu\text{m}$ 안에 유지되어야 한다. 그리고 초기 트랙킹 에러, 외부 충격, 디스크 결함과 같은 예기치 못한 외부 입력에 대해 오버슈트가 30% 보다 작고 상승 시간이 0.6 ms이내, 안정화 시간이 2.5 ms 이내가 되도록 하여야 한다. 이러한 일시적인 외부 입력들에 대해 트랙 추종 시스템을 최대한 빨리 안정화하지 못하면 광 픽업은 트랙 중심을 서서히 벗어나 데이터를 순차적으로 재생하지 못하게 된다. 트랙 추종 시스템의 안정성을 위해 루프 게인과 제어 대역폭은 각각 90 dB와 6 kHz 이내가 되도록 하여야 한다. 루프 게인이나 제어 대역폭이 너무 커지면 외란에 민감하게 반응하게 되고 액츄에이터 부공진의 영향이 커져 트랙 추종 시스템은 발진하게 된다. 이러한 제어 목적들을 만족하는 강인 트랙킹 제어기를 설계하기 위해 본 논문에서 제안한 강인 H_∞ 제한 조건, 극점 위치 제한 조건, 루프 게인 제한 조건을 만족하는 강인 제어기 설계 방법을 적용한다.

시뮬레이션에서는 DVD 디스크가 7200 rpm(120 Hz)의 각속도로 회전한다고 가정한다. 그러면 디스크 회전 주파수와 그 정수배 주파수에서 트랙킹 외란 크기는 상대적으로 커지게 된다. 각 주파수에서 발생하는 트랙킹 외란의 크기는 (5)와 루프 게인 조정 알고리즘을 적용하여 추정될 수 있다[7]. 최소 트랙킹 루프 게인은 추정된 트랙킹 외란과 최대 허용 트랙킹 에러로부터 얻을 수 있고 강인 H_∞ 제한 조건을 위한 가중 함수로 사용하였다.

$$W(s) = \frac{2734s^2 + 1.94 \times 10^8 s + 1.89 \times 10^{12}}{s^3 + 2244s^2 + 2.08 \times 10^6 s + 4.94 \times 10^8} \quad (18)$$

목표로 하는 오버슈트, 안정화 시간, 상승 시간에 대한 식을 통해 감쇠 상수와 고유 주파수에 대한 범위를 구하면 $\zeta \geq 0.38, \omega_n \geq 3000, \zeta \omega_n \geq 1200$ 이다.

$$\exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \leq 0.3, \quad \frac{1.8}{\omega_n} \leq 0.0006, \quad \frac{3}{\zeta\omega_n} \leq 0.0025 \quad (19)$$

트랙 추종 시스템의 모든 극점이 존재하여야 하는 특성 영역은 감쇠 상수와 고유 주파수의 범위로부터 구할 수 있고 본 논문에서는 이를 근사화한 다음과 같은 LMI 영역을 특성 영역으로 설정하였다.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{z \in C : f_D(z) := \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T < 0\} \\ \alpha &= \begin{bmatrix} 6000 & 0 \\ 0 & -32000 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

본 논문에서는 유전자 알고리즘을 위한 개체 변수로 트랙킹 제어기의 계수 ($a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$)를 설정하였다. 개체 변수들은 초기에 임의적으로 선택되었고 20개의 실현 가능한 개체들이 생성되었다. 개체들은 확률론적인 일반 샘플링(stochastic universal sampling)에 의해 선택되었고 선택된 개체들은 0.8의 교차 확률을 가진 선형 재결합 교차 연산을 통해 재결합되었다. 교차 후 각 개체들은 0.15 확률을 가지고 돌연변이가 진행되었고 실현 가능성 테스트를 실행하였다. 실현 가능성을 만족하는 개체들만이 다음 세대를 위해 현 개체군에 다시 재삽입되었다. 이러한 설계 파라미터를 적용하여 (15)를 만족하는 트랙킹 제어기를 구하면 (21)과 같고 γ 최소값은 0.769, 공칭 루프 DC 게인 $L_n(0)$ 은 87.9 dB, 제어 대역폭 W_L 은 5.07 kHz이다.

$$\frac{2.5 \times 10^6 s^3 + 6.6 \times 10^{10} s^2 + 5.8 \times 10^{14} s + 2.2 \times 10^{18}}{s^4 + 2.0 \times 10^6 s^3 + 2.5 \times 10^{11} s^2 + 2.5 \times 10^{15} s + 1.6 \times 10^{18}} \quad (21)$$

그림 6은 디스크 회전 주파수와 그 2배와 3배 주파수에 대

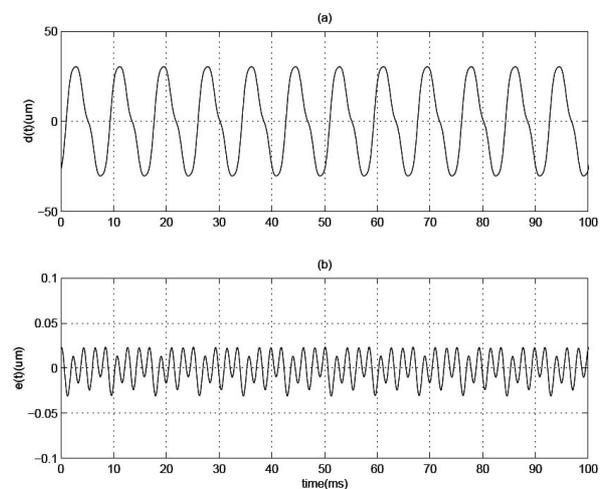


그림 6. 외란 감쇠 특성: 외란 (a)에 대한 트랙킹 에러 (b).
Fig. 6. The tracking error when $d(t) = 30\sin(120 \times 2\pi t) + 6\sin(240 \times 2\pi t) + 2\sin(360 \times 2\pi t) \mu\text{m}$.

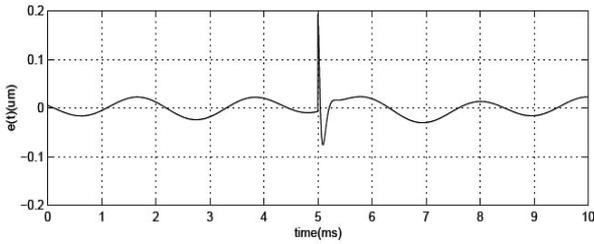


그림 7. 과도 응답 특성: 스텝 입력에 대한 트래킹 에러.

Fig. 7. The tracking error when $d(t)=30\sin(120 \times 2\pi t)+6\sin(240 \times 2\pi t)+2\sin(360 \times 2\pi t)$ μm and $0.2 \text{ r}(t-0.025)$ μm .

한 외란 성분을 가지는 트래킹 외란 $d(t)=30\sin(120 \times 2\pi t)+6\sin(240 \times 2\pi t)+2\sin(360 \times 2\pi t)$ μm 을 인가 하였을 때의 트래킹 에러를 나타내는데 레이저 빔 스팟을 목표 트랙에서 40.5 트랙을 벗어나게 하는 트래킹 외란에 대해서 트래킹 에러가 최대 허용 에러 $\pm 0.03 \mu\text{m}$ 내에 유지되는 것을 볼 수 있다. 그림 7은 그림 6에 인가된 트래킹 외란에 스텝 입력 $0.2 \text{ r}(t-0.025)$ μm 이 인가되었을 때의 트래킹 에러를 나타낸다. 과도 응답 성능을 평가하기 위해 $0.2 \mu\text{m}$ 크기의 스텝 입력을 트래킹 제어를 시작한 2.5 ms 후에 인가하였다. 그림 7은 안정화 시간과 상승 시간 특성이 설계 스펙을 만족함을 나타내지만 오버슈트는 스펙보다 조금 큰 32%인 것을 볼 수 있다. 이것은 2차 선형 시스템에 대한 식 (19)을 6차의 트랙 추종 시스템에 적용했기 때문이다. 보다 높은 차원의 모델을 적용하면 오버슈트 성능을 개선해주겠지만 복잡도가 매우 증가하게 된다.

V. 결론

본 논문에서는 불확실성과 외란을 가지는 선형 시스템에 대해 강인 H_∞ 제한 조건, 극점 위치 제한 조건, 루프 게인 제한 조건을 만족하는 강인 제어기 설계 방법을 제안하였다. 강인 H_∞ 제한 조건과 극점 위치 제한 조건은 행렬 부등식으로 나타낼 수 있고 루프 게인 제한 조건은 목적 함수를 통해 유전자 알고리즘에서 고려될 수 있다. 다중 제한 조건을 만족하는 강인 최적 제어기는 LMI 설계 방법과 유전자 알고리즘을 통합한 설계 방법에 의해 설계될 수 있다. 제안된 제어기 설계 방법은 광 디스크 드라이브의 트랙 추종 시스템에 적용되었고 시뮬레이션 결과를 통해 제어기 설계 방법의 타당성을 보였다.

참고문헌

[1] C.-C. Hsu, S.-C. Chang and C.-Y. Yu, "Tolerance design of robust controllers for uncertain interval systems based on evolutionary algorithms," *IET Control Theory and Applications*, vol. 1, no. 1, pp. 244-252, 2007.
 [2] G Pereira and H. X. Araujo, "Robust output feedback controller design via genetic algorithms and LMIs: The mixed H_2/H_∞ problem," *Proc. of American Control Conference*, Boston, USA, pp. 3309-3314, June 2004.
 [3] D. Neumann and H. X. Araujo, "Mixed H_2/H_∞ control for uncertain systems under pole placement constraints using genetic algorithms and LMIs," *Proc. of IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Taipei, Taiwan, pp. 460-465,

Sep. 2004.
 [4] M. F. Miranda, R. H. C. Takahashi, and F. G. Jota, "Hierarchical approach for H_∞ robust control design: S/KS mixed sensitivity with genetic algorithm," *IET Control Theory and Application*, vol. 1, no. 1, pp. 18-24, 2007.
 [5] X. Dai, G. Liu, and Z. Long, "Discrete-time fault detection observer design: a genetic algorithm approach," *Proc. of World Congress on Intelligent Control and Automation*, Chongqing, China, pp. 2843-2848, June 2008.
 [6] A. Arvani, M. Teshnehlab, and M. Aliyari sh., "Robust H_∞ controller design for distillation column based on Multi-objective optimization and genetic algorithms," *IEEE Symposium on Industrial Electronics and Applications*, Kuala Lumpur, Malaysia, pp. 773-777, Oct. 2009.
 [7] M.-N. Lee and K. B. Jin, "A controller design method for constructing a robust track-following system," *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, vol. 54, no. 2, pp. 538-544, 2008.
 [8] M.-N. Lee and K. B. Jin, "An optimal tracking controller based on the estimation of tracking vibration quantity," *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, vol. 51, no. 2, pp. 478-484, 2005.
 [9] M. Chilali and P. Gahinet, " H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 358-367, 1996.
 [10] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali, "Multiobjective output-feedback control via LMI optimization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 7, pp. 896-911, 1997.
 [11] M.-N. Lee, J.-H. Moon, and M. J. Chung, "Design of a robust H_∞ controller with regional stability constraints under sinusoidal disturbances," *Proc. of Asian Control Conference*, vol. 1, pp. 713-716, 1997.
 [12] M. N. Lee and K. B. Jin, "A tracking gain-up controller design for controlling the shake of actuator," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 15, no. 10, pp. 988-993, 2009.



이 문 노

1991년 경북대학교 전자공학과(공학사). 1993년 한국과학기술원 전기 및 전자공학(공학석사). 1998년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사). 2001년 9월~현재 동의대학교 컴퓨터공학과 부 교수. 관심분야는 제어 이론 및 응용, 임베디드 시스템, 지능형 시스템.



이 흥 규

1977년 서울대학교 전자공학과(공학사). 1979년 서울대학교 전자공학과(공학석사). 1989년 서울대학교 전자공학과(공학박사). 1979년~1992년 국방과학연구소 선임연구원. 1992년~현재 한국기술교육대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 진화로봇, 유전자알고리즘, 로보틱스.