Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (2011) 17(4):299-303
DOI:10.5302/J.ICROS.2011.17.4.299 ISSN:1976-5622 eISSN:2233-4335

# 적분기 시스템에서 센서의 측정에러를 보상하는 출력 궤환 제어기 설계 및 분석

# Design and Analysis of an Output Feedback Controller for a Chain of Integrators System Compensating Measurement Noise of Feedback Sensor

김 현 도, 최 호 림*
(Hyun-Do Kim[1] and Ho-Lim Choi[1])
[1]Dong-A University

**Abstract:** In this paper, we propose an output feedback controller for a chain of integrators system compensating measurement noise of feedback sensor. Measurement noise makes feedback signals distorted, and results in performance degradation or even system failure. Therefore, we need to design a robust controller to accommodate the possible measurement noise in the feedback information. Our controller is equipped with a gain-scaling factor to reject or minimize the effect of measurement noise in output feedback information. We give a theoretical analysis of the controlled system and illustrate the improved control performance via an example.

**Keywords:** measurement noise, gain-scaling factor, output feedback, chain of integrators

## I. 서론

시스템의 출력 신호는 센서를 통해 측정하게 되는데 이 센서에 측정에러(measurement noise)가 포함되면 궤환(feedback) 신호를 왜곡시키게 되고 제어 시스템의 입력까지 왜곡시키게 되어 시스템이 정상적으로 작동할 수 없게 된다. 그러므로 이러한 측정에러의 영향을 최소화시킬 필요가 있다[2,7-10].

측정에러의 영향을 최소화시키기 위한 연구는 [10]에서 저역 통과 필터(low pass filter)를 적용한 상태 궤한 제어기를 통하여 측정에러를 보상하였으나 특정한 상태 변수에 측정에러가 있을 경우에만 신호의 보상을 효과적으로 보였으며, 또한 전체 상태를 측정해야하는 경우만을 다루었다.

본 논문에서는 관측기와 결합된 출력 궤환 제어기를 적용하였다. 따라서, 모든 상태를 측정할 필요가 없는 장점이 있으며 측정에러는 출력에만 존재하게 된다. 시스템의 출력 신호에 AC 성분 측정에러를 포함하였고[7], AC 측정에러의 영향을 받는 관측된 상태 변수의 ultimate bound를 최소화하기 위하여 Luenberger 관측기와 제어기의 이득에 gain-scaling factor가 추가된 출력 궤환 제어기를 제안하였다. 그리고 SISO 비선형 시스템에 입-출력 궤환 선형화를 적용하면 chain of integrators 시스템(적분기 시스템)으로 표현되기 때문에 n차의 적분기 시스템에 제안된 제어기를 적용하였다.

Lyapunov 안정성 기법과 라플라스 변환 기법을 혼용하여 전체 시스템의 분석을 하였으며 모든 상태들의 ultimate bound가 측정에러에 대하여 임의의 작은 값으로 축소됨을 보였고 이를 시뮬레이션을 통해 검증하였다.

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수: 2011. 1. 19., 수정: 2011. 2. 28., 채택확정: 2011. 3. 2.
김현도, 최호림: 동아대학교 전기공학과
(hyundo10@naver.com/hlchoi@dau.ac.kr)
※ 본 논문은 동아대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.

## II. 시스템과 문제의 정의

$n$차 SISO 적분기 시스템은 다음과 같다[10].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{1}$$

식 (1)을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2}$$
$$y = Cx \tag{3}$$

여기서 $x \in R^n$ 은 상태, $u \in R$ 는 입력, $y \in R$ 는 출력, $(A,B)$는 Brunovsky canonical pair, $C = [1, 0, \cdots, 0]$ 이다.

이 시스템에서 Luenberger 관측기를 이용한 출력 궤환 제어기는 다음과 같다[1].

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - L(y - C\hat{x}) \tag{4}$$
$$u = K\hat{x} \tag{5}$$

여기서 $\hat{x} \in R^n$ 은 관측된 상태, $L = [l_1, \cdots, l_n]^T$, $K = [k_1, \cdots, k_n]$ 이고 상태 오차를 $e_i = x_i - \hat{x}_i$, $i = 1, \cdots, n$ 로 정의한다.

식 (2)로부터 식 (4)를 빼고 식 (5)를 대입하여 정리하면 augmented closed-loop dynamics 는 다음과 같이 나타난다.

$$\dot{e} = A_L e \tag{6}$$
$$\dot{x} = A_K x - BKe \tag{7}$$

여기서 $A_L = A + LC$, $A_K = A + BK$ 이다. $A_L$ 과 $A_K$ 가 Hurwitz이기 위한 $L$, $K$ 의 값을 선택하면 $t \to 0$ 일 때 $e \to 0$,

$x \to 0$ 이 되어 전체 폐루프 시스템은 안정하게 된다.

이 시스템에서 출력센서의 오작동으로 측정에러가 포함됨을 가정하면 궤환 신호는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\overline{y} = y + d(t) \tag{8}$$

이 때 $d(t)$는 출력 센서에 포함되는 측정에러이다.

**Assumption 1:** $n$차 시스템에서 출력 신호에 포함되는 측정에러를 다음과 같은 AC 성분으로 설정한다.

$$d(t) = \alpha \sin \omega t \tag{9}$$

여기서 $\alpha \geq 0$ 는 AC 측정에러의 크기, $\omega \geq 1$ 는 AC 측정에러의 주파수이다.

**Remark 1:** 측정에러는 일반적으로 고주파 성분 신호이며 [2,9]에서도 정현파 함수에 대해 주로 사례를 가진다. 기존의 논문 [2,9]에서는 알려진 exosystem에서 발생하는 정현파 측정에러를 가정하여 에러의 크기와 주파수를 알 수 있음을 가정한 반면, 우리의 경우는 알 수 없는 $\alpha$, $\omega$ 를 가정하여 에러에 대한 조건을 더 일반화시켰다.

**Remark 2:** 복잡한 임의의 주기함수라도 삼각함수의 합인 푸리에 급수로 표현이 가능하므로 Assumption 1에서 설정한 정현파 함수는 푸리에 급수로 확장이 가능하다.

출력 신호에 AC 측정에러가 포함된 관측기는 식 (10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - L(\overline{y} - C\hat{x}) \tag{10}$$

식 (2)로부터 식 (10)을 빼고 식 (5)를 대입하여 augmented closed-loop dynamics로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{e} = A_L e + Ld(t) \tag{11}$$

$$\dot{x} = A_K x - BKe \tag{12}$$

식 (11)에서 $d(t)$의 영향으로 $e$의 모든 성분이 0으로 수렴하지 못하고 이로 인해 식 (12)의 $x$성분에도 $e$의 영향을 받아 0으로 수렴하지 않게 된다. 따라서, 기존의 Luenberger 관측기와 결합된 출력 궤환 제어기는 측정에러의 효과를 능동적으로 줄이는데 어려움이 있음을 알 수가 있다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 다음 장에서 Luenberger 관측기와 제어기의 이득에 gain-scaling factor가 추가된 출력 궤환 제어기를 제안한다.

## III. Gain-scaling factor가 추가된 출력 궤환 제어기

제안된 제어기는 관측기와 제어기에 gain-scaling factor를 추가시킨 출력 궤환 제어기로써 다음과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 gain-scaling factor는 $\varepsilon$ 으로 설정한다.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - L(\varepsilon)(\overline{y} - C\hat{x}) \tag{13}$$

$$u = K(\varepsilon)\hat{x} \tag{14}$$

여기서 $L(\varepsilon) = \left[\frac{l_1}{\varepsilon}, \frac{l_2}{\varepsilon^2}, \cdots, \frac{l_n}{\varepsilon^n}\right]^T$, $K(\varepsilon) = \left[\frac{k_1}{\varepsilon^n}, \frac{k_2}{\varepsilon^{n-1}}, \cdots, \frac{k_n}{\varepsilon}\right]$, $\varepsilon > 0$ 이다.

제어된 폐루프 시스템의 분석: 식 (2)로부터 식 (13)을 빼고 식 (14)를 대입하여 augmented closed-loop dynamics로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{e} = A_L(\varepsilon)e + L(\varepsilon)d(t) \tag{15}$$

$$\dot{x} = A_K(\varepsilon)x - BK(\varepsilon)e \tag{16}$$

여기서 $A_L(\varepsilon) = A + L(\varepsilon)C$ 와 $A_K(\varepsilon) = A + BK(\varepsilon)$ 이다. 행렬 $A_L = A_L(1)$ 과 $A_K = A_K(1)$ 이 Hurwitz가 되도록 $L$ 과 $K$ 를 선택한다. 그러면 식 (15)에 대한 Lyapunov equation은 $A_L^T P_L + P_L A_L = -I$ 이고 $E(\varepsilon) = \mathrm{diag}[1, \varepsilon, \cdots, \varepsilon^{n-1}]$ 으로 정의하면 모든 $\varepsilon > 0$ 에 대해서 다음과 같은 관계식을 가진다[3]. 여기서 $P_L = [p_{L_{ij}}], (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ 이고 positive definite matrix이다.

$$\begin{aligned} &\varepsilon A_L(\varepsilon) = E(\varepsilon)^{-1} A_L E(\varepsilon) \\ &A_L^T(\varepsilon)P_L(\varepsilon) + P_L(\varepsilon)A_L(\varepsilon) = -\varepsilon^{-1}E(\varepsilon)^2 \\ &P_L(\varepsilon) = E(\varepsilon)P_L E(\varepsilon) \end{aligned} \tag{17}$$

식 (15)에 대한 Lyapunov function을 $V_o(e) = e^T P_L(\varepsilon)e$ 로 두면 $e$의 궤적에 대한 미분값은 식 (17)의 관계에 의해서 다음과 같이 나타난다[6].

$$\begin{aligned} \dot{V}_o(e) &= \dot{e}^T P_L(\varepsilon)e + e^T P_L(\varepsilon)\dot{e} \\ &= -\varepsilon^{-1}\|E(\varepsilon)e\|^2 + 2\varepsilon^{-1}\{E(\varepsilon)e\}^T P_L L\alpha \sin \omega t \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\|E(\varepsilon)e\|^2 \\ &\quad - \varepsilon^{-1}\{E(\varepsilon)e\}^T \left(\frac{1}{2}\{E(\varepsilon)e\} - 2P_L L\alpha \sin \omega t\right) \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\|E(\varepsilon)e\|^2 \\ &\quad - \varepsilon^{-1}\{E(\varepsilon)e\}^T E(\varepsilon)\left(\frac{1}{2}e - 2E(\varepsilon)^{-1}P_L L\alpha \sin \omega t\right) \\ &\leq -\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\|E(\varepsilon)e\|^2 - \varepsilon^{-1}\{E(\varepsilon)e\}^T E(\varepsilon) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} |e_1| \\ |e_2| \\ \vdots \\ |e_n| \end{bmatrix} - 2\lambda_{\max}(P_L)\alpha \begin{bmatrix} |l_1| \\ \varepsilon^{-1}|l_2| \\ \vdots \\ \varepsilon^{-(n-1)}|l_n| \end{bmatrix}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

식 (18)에서 $e$의 ultimate bound는 다음과 같다. 여기서 ultimate bound는 $UB(\cdot)$ 으로 나타낸다.

$$UB\left(\begin{bmatrix} |e_1| \\ |e_2| \\ \vdots \\ |e_n| \end{bmatrix}\right) = 4\lambda_{\max}(P_L)\alpha \begin{bmatrix} |l_1| \\ \varepsilon^{-1}|l_2| \\ \vdots \\ \varepsilon^{-(n-1)}|l_n| \end{bmatrix} \tag{19}$$

식 (19)에서 $\varepsilon$이 1보다 큰 값을 가질 수록 $e_1$을 제외한 $e_2$, $\cdots, e_n$ 의 ultimate bound의 크기가 감소하는 것을 알 수 있다.

$e_1$의 ultimate bound와 $\varepsilon$의 관계를 확인하기 위해 식 (15)를 라플라스 변환하여 $E(s)$로 정리하면 다음과 같다.

$$E(s) = \left(sI - A_L(\varepsilon)\right)^{-1} e(0) + \left(sI - A_L(\varepsilon)\right)^{-1} L(\varepsilon)\frac{\alpha\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{20}$$

식 (20)에서 $E_1(s)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$E_1(s)=\frac{\varepsilon^n\left(s^{n-1}e_1(0)+s^{n-2}e_2(0)+\cdots+e_n(0)\right)}{\delta(s)}+\frac{\phi(s)}{\delta(s)}\frac{\alpha\omega}{s^2+\omega^2} \quad (21)$$

여기서 $\delta(s)=\varepsilon^n s^n-\phi(s)$, $\phi(s)=\varepsilon^{n-1}l_1 s^{n-1}+\varepsilon^{n-2}l_2 s^{n-2}+\cdots+\varepsilon l_{n-1}s+l_n$ 이다. 식 (21)에서 $\delta(s)$ 가 Hurwitz polynomial일때 final value theorem을 적용시키면 $e$ 의 초기값을 포함하는 첫 번째 항은 0으로 수렴하게 되고 final value theorem을 적용할 수 없는 식 (22)만 남게 된다[1,5].

$$\frac{A}{s+j\omega}+\frac{A}{s-j\omega}=\frac{A(s-j\omega)+B(s+j\omega)}{s^2+\omega^2} \quad (22)$$

여기서 $A=\frac{\alpha}{2}\frac{\gamma(\omega)-j\beta(\omega)}{\beta(\omega)+j(\varepsilon^n\omega^n+\gamma(\omega))}$, $B=\frac{\alpha}{2}\frac{\gamma(\omega)+j\beta(\omega)}{\beta(\omega)-j(\varepsilon^n\omega^n+\gamma(\omega))}$ 이고 $\gamma(\omega)=\mathrm{Re}(\phi(s)|_{s=j\omega})$, $\beta(\omega)=\mathrm{Im}(\phi(s)|_{s=j\omega})$ 이다. 식 (22)의 크기인 $A(s-j\omega)+B(s+j\omega)$ 를 감소시키면 $e_1$의 ultimate bound를 최소화시킬 수 있다.

$$\begin{aligned}&A(s-j\omega)+B(s+j\omega)\\&=-\frac{\alpha}{2}\left[\frac{\gamma(\omega)-j\beta(\omega)}{\beta(\omega)+j\left(\varepsilon^n\omega^n+\gamma(\omega)\right)}(s-j\omega)\right.\\&\qquad\left.+\frac{\gamma(\omega)+j\beta(\omega)}{\beta(\omega)-j\left(\varepsilon^n\omega^n+\gamma(\omega)\right)}(s+j\omega)\right]\\&=-\alpha\left[\frac{\beta(\omega)\left(\varepsilon^n\omega^n\right)}{\beta(\omega)^2+\left(\varepsilon^n\omega^n+\gamma(\omega)\right)^2}s\right.\\&\qquad\left.+\frac{\varepsilon^n\omega^n\gamma(\omega)+\gamma(\omega)^2+\beta(\omega)^2}{\beta(\omega)^2+\left(\varepsilon^n\omega^n+\gamma(\omega)\right)^2}\omega\right]\end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)에서 $\gamma(\omega)$ 에 대한 $\varepsilon$ 의 최고차항은 $\varepsilon^{n-2}$, $\beta(\omega)$ 에 대한 $\varepsilon$ 의 최고차항은 $\varepsilon^{n-1}$ 이다. 식 (23)를 $\varepsilon$ 에 관해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&A(s-j\omega)+B(s+j\omega)\\&=-\alpha\left[\frac{l_1\omega^{n-1}\varepsilon^{2n-1}+O\left(\varepsilon^{2n-3}\right)}{\omega^{2n}\varepsilon^{2n}+O\left(\varepsilon^{2n-2}\right)}s+\frac{l_2\omega^{2n-1}\varepsilon^{2n-1}+O\left(\varepsilon^{2n-2}\right)}{\omega^{2n}\varepsilon^{2n}+O\left(\varepsilon^{2n-2}\right)}\omega\right]\end{aligned} \quad (24)$$

식 (24)에서 분자의 $\varepsilon$ 의 차수보다 분모의 $\varepsilon$ 의 차수가 더 크므로 $\varepsilon>1$ 이 큰 값을 가질 수록 $A(s-j\omega)+B(s+j\omega)$ 의 크기가 감소하게 된다. 따라서 $\varepsilon$값을 크게 하면 $e_1$의 ultimate bound를 최소화시킬 수 있음을 알 수 있다.

식 (16)에 대한 Lyapunov equation은 $A_K^TP_K+P_KA_K=-I$ 이므로 식 (17)에서와 같이 유사하게 $\varepsilon>0$ 에 대해서 다음과 같은 관계식을 가진다. 여기서 $P_K=[p_{K_{ij}}],(1\le i\le n,1\le j\le n)$ 이고 positive definite matrix이다.

$$\begin{aligned}&\varepsilon A_K(\varepsilon)=E(\varepsilon)^{-1}A_KE(\varepsilon)\\&A_K^T(\varepsilon)P_K(\varepsilon)+P_K(\varepsilon)A_K(\varepsilon)=-\varepsilon^{-1}E(\varepsilon)^2\\&P_K(\varepsilon)=E(\varepsilon)P_KE(\varepsilon)\end{aligned} \quad (25)$$

식 (16)에 대한 Lyapunov function을 $V_c(x)=x^TP_K(\varepsilon)x$ 로 두면 $x$ 의 궤적에 대한 미분값은 식 (25)의 관계에 의해서 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned}\dot V_c(x)&=\dot x^TP_K(\varepsilon)x+x^TP_L(\varepsilon)\dot x\\&=-\varepsilon^{-1}\|E(\varepsilon)x\|^2-2\varepsilon^{-1}\{E(\varepsilon)x\}^TP_KBKE(\varepsilon)e\\&=-\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\|E(\varepsilon)x\|^2\\&\quad-\varepsilon^{-1}\{E(\varepsilon)x\}^T\left(\frac{1}{2}\{E(\varepsilon)x\}-2P_KBKE(\varepsilon)e\right)\\&=-\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\|E(\varepsilon)x\|^2\\&\quad-\varepsilon^{-1}\{E(\varepsilon)x\}^TE(\varepsilon)\left(\frac{1}{2}x+2E(\varepsilon)^{-1}P_KBKE(\varepsilon)e\right)\\&\le-\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\|E(\varepsilon)x\|^2-\varepsilon^{-1}\{E(\varepsilon)x\}^TE(\varepsilon)\\&\quad\times(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}|x_1|\\|x_2|\\\vdots\\|x_n|\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}|p_{K_{1n}}|\\\varepsilon^{-1}|p_{K_{2n}}|\\\vdots\\\varepsilon^{-(n-1)}|p_{K_{nn}}|\end{bmatrix}\\&\quad\times(|k_1||e_1|+\varepsilon|k_2||e_2|+\cdots+\varepsilon^{n-1}|k_n||e_n|))\end{aligned} \quad (26)$$

식 (26)에서 $x$의 ultimate bound는 다음과 같다.

$$UB\left(\begin{bmatrix}|x_1|\\|x_2|\\\vdots\\|x_n|\end{bmatrix}\right)=4\begin{bmatrix}|p_{K_{1n}}|\\\varepsilon^{-1}|p_{K_{2n}}|\\\vdots\\\varepsilon^{-(n-1)}|p_{K_{nn}}|\end{bmatrix}\times(|k_1||e_1|+\varepsilon|k_2||e_2|+\cdots+\varepsilon^{n-1}|k_n||e_n|) \quad (27)$$

식 (27)에서 $|e_1|,\cdots,|e_n|$ 에 $e$ 의 ultimate bound인 식 (19)를 대입하면 다음과 같다.

$$UB\left(\begin{bmatrix}|x_1|\\|x_2|\\\vdots\\|x_n|\end{bmatrix}\right)=16\lambda_{\max}(P_L)\alpha\begin{bmatrix}|p_{K_{1n}}|\\\varepsilon^{-1}|p_{K_{2n}}|\\\vdots\\\varepsilon^{-(n-1)}|p_{K_{nn}}|\end{bmatrix}\times(|k_1||l_1|+|k_2||l_2|+\cdots+|k_n||l_n|) \quad (28)$$

식 (28)에서 $\varepsilon$ 이 큰 값을 가질수록 $(\varepsilon>1)$, $x_1$ 을 제외한 $x_2,\cdots,x_n$ 의 ultimate bound의 크기가 감소하는 것을 알 수 있다. $x_1$ 의 ultimate bound와 $\varepsilon$ 의 관계를 확인하기 위해 식 (16)을 라플라스 변환하여 $X(s)$ 로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}X(s)&=\left(sI-A_K(\varepsilon)\right)^{-1}x(0)\\&\quad-\left(sI-A_K(\varepsilon)\right)^{-1}BK(\varepsilon)E(s)\end{aligned} \quad (29)$$

식 (29)에서 초기 값을 포함하는 항은 0으로 수렴하는 항이므로 첫번째 항을 제외하고 나머지 항을 $X_r(s)=\left(sI-A_K(\varepsilon)\right)^{-1}BK(\varepsilon)E(s)$ 로 두고 $X_{r1}(s)$ 을 구하면 다음과 같다.

여기서 $X_r(s)=[X_{r1}(s),\cdots,X_{rn}(s)]^T$ 이다.

$$X_{r1}(s)=\frac{1}{\eta(s)}\left(\frac{k_1}{\varepsilon^n}E_1(s)+\frac{k_2}{\varepsilon^{n-1}}E_2(s)+\cdots+\frac{k_n}{\varepsilon}E_n(s)\right) \tag{30}$$

여기서 $\eta(s)=s^n-\frac{k_n}{\varepsilon}s^{n-1}-\frac{k_{n-1}}{\varepsilon^2}s^{n-2}-\cdots-\frac{k_1}{\varepsilon^n}$ 이다. $\eta(s)$ 가 Hurwitz polynomial이므로 분석을 위해 $\eta(s)$ 의 근을 서로 다른 근이라 가정하고 식 (30)의 $E_i(s),(i=1,\cdots,n)$ 에 $E(s)$ 의 ultimate bound를 대입하면 식 (31)과 같은 형태를 가진다. 여기서 $E(s)$의 ultimate bound는 $E_b(s)=[E_{b1}(s),\cdots,E_{bn}(s)]^T$ 이다

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\cdots(s+\lambda_n)}\\&\quad\times\left(\frac{k_1}{\varepsilon^n}E_{b1}(s)+\frac{k_2}{\varepsilon^{n-1}}E_{b2}(s)+\cdots+\frac{k_n}{\varepsilon}E_{bn}(s)\right)\\&=\left(\frac{a_1}{(s+\lambda_1)}+\frac{a_2}{(s+\lambda_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(s+\lambda_n)}\right)\\&\quad\times\left(\frac{k_1}{\varepsilon^n}E_{b1}(s)+\frac{k_2}{\varepsilon^{n-1}}E_{b2}(s)+\cdots+\frac{k_n}{\varepsilon}E_{bn}(s)\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s+\lambda_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{\varepsilon^{n+1-i}}E_{bi}(s)\right)\end{aligned} \tag{31}$$

여기서 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 은 $\eta(s)$ 의 근이고, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 은 $\frac{1}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\cdots(s+\lambda_n)}$ 을 부분분수 전개 했을 때의 상수값이다. 식 (31)을 라플라스 역변환을 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\exp(-\lambda_i t)\right)*\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{\varepsilon^{n+1-i}}e_{bi}(t)\right)\\&=\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\exp(-\lambda_i(t-\tau))\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{\varepsilon^{n+1-i}}e_{bi}(\tau)\right)d\tau\end{aligned} \tag{32}$$

식 (19)와 식 (24)에서 $\varepsilon$ 이 큰 값일수록 $e$ 의 ultimate bound가 감소함을 보였기 때문에 $e_{bi}(t)$ 의 최댓값을 $\frac{b_i}{\varepsilon}$ 로 두고 식 (32)를 식 (33)과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\exp(-\lambda_i(t-\tau))\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{\varepsilon^{n+1-i}}e_{bi}(\tau)\right)d\tau\\&\le\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\exp(-\lambda_i(t-\tau))\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{\varepsilon^{n+1-i}}\frac{b_i}{\varepsilon}\right)d\tau\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{\varepsilon^{n+1-i}}\frac{b_i}{\varepsilon}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\exp(-\lambda_i t)\int_0^t\exp(\lambda_i\tau)d\tau\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{\varepsilon^{n+1-i}}\frac{b_i}{\varepsilon}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\left[1-\exp(-\lambda_i t)\right]\right)\end{aligned} \tag{33}$$

식 (33)에서 $\exp(-\lambda_i t)$ 는 정상상태에서 0으로 수렴하게 된다. 따라서, 정상상태에서 $x_1$의 ultimate bound를 나타내면 다음과 같다.

$$UB(x_1)\le\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{k_1b_1}{\varepsilon^n}+\frac{k_2b_2}{\varepsilon^{n-1}}+\cdots+\frac{k_nb_n}{\varepsilon}\right)\times\left(\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2}{\lambda_2}+\cdots+\frac{a_n}{\lambda_n}\right) \tag{34}$$

식 (34)에서 $x_1$의 ultimate bound는 $\varepsilon>1$ 이 큰 값을 가질 수록 감소하게 되므로 AC 측정 에러를 감소시킬 수 있음을 알 수 있다. 지금까지의 내용을 정리하여 나타내면 다음 Theorem 1과 같다.

**Theorem 1:** (a) Assumption 1을 가정하고, (b) $A_L$과 $A_K$가 Hurwitz이기 위한 $L$, $K$을 선택한다. 제안된 제어기에서 $\eta(s)$의 근을 서로 다른 근으로 두면 $\varepsilon>1$ 이 큰 값을 가질 수록 $e$와 $x$의 ultimate bound는 감소한다.

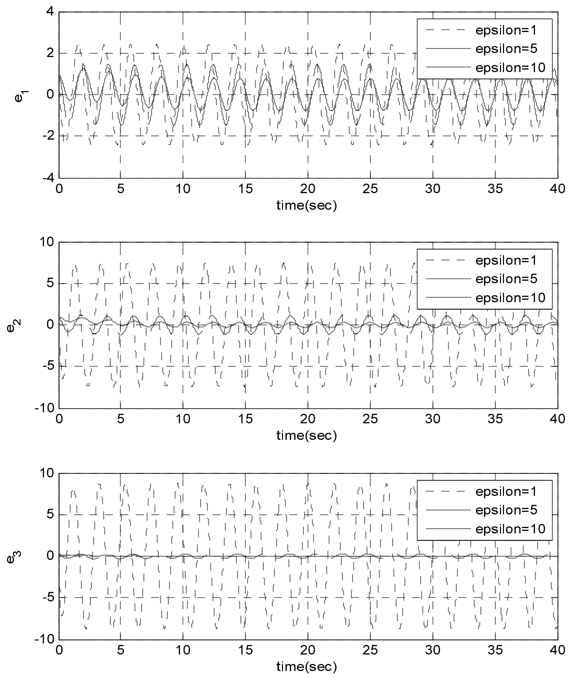


그림 1. 시뮬레이션 결과: $e_1, e_2, e_3$.

Fig. 1. Simulation result: $e_1, e_2, e_3$.

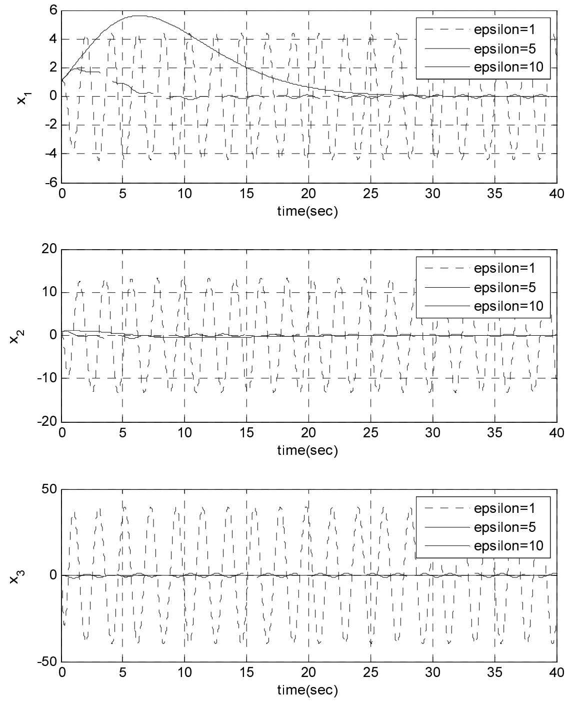


그림 2. 시뮬레이션 결과: $x_1, x_2, x_3$.

Fig. 2. Simulation result: $x_1, x_2, x_3$.

**Remark 3:** Theorem 1에서 알 수 있듯이 이득의 조절요소인 $\varepsilon$ 을 키울 수록 더 작은 ultimate bound를 획득할 수 있음을 알 수 있다. 즉, 작은 크기의 입력 값(small gain input)을 시스템에 적용시키는 형태로 이는 feedforward system을 제어할 때와 같은 원리이다[4]. 따라서, 본 결과는 feedforward system으로 확장 연구가 가능하며 이는 추후의 연구주제로 다룰 수 있다.

## IV. 시뮬레이션

제안된 제어기법의 검증을 위해 $n=3$ 인 경우에 대해서 시뮬레이션을 적용한다. 3차 적분기 시스템의 초기값은 $x_1(0)=-1$, $x_2(0)=1$, $x_3(0)=0.1$ 이고 AC 측정에러는 $2\sin 3t$ 로 설정한다. 관측기에 대해서 $A_L$ 의 극점을 $-3$, $-4$, $-5$ 로 설정하고, 제어기에 대해서 $A_K$ 의 극점을 $-3$, $-4$, $-5$ 로 설정한다. $\varepsilon$ 의 값을 크게 했을 때의 $e$ 의 응답을 확인하기 위한 시뮬레이션은 그림 1과 같다. 그림 1에서 $\varepsilon$ 값을 증가시켰을 때 $e$ 의 ultimate bound가 감소하는 것을 알 수 있다. $\varepsilon$ 값을 크게 했을 때의 $x$ 의 응답을 확인하기 위한 시뮬레이션은 그림 2와 같다. 그림 2에서 $\varepsilon$ 값을 증가시켰을 때 $x$ 의 ultimate bound가 감소하여 AC측정에러의 영향이 작아지는 것을 알 수 있다.

## V. 결론

본 논문에서는 출력 센서의 오작동으로 AC 측정에러가 센서에 포함됨을 가정하였다. Lyapunov 안정성 분석을 통해서 $e_1$과 $x_1$을 제외한 나머지 상태변수에 대해서 ultimate bound를 줄일 수 있음을 해석하였다. Lyapunov 안정성 분석은 충분조건이기 때문에 이것을 통해 해석 할 수 없는 상태 변수 $e_1$과 $x_1$의 ultimate bound는 라플라스 변환을 통하여 해석을 하였고 3차 적분기 시스템에 대해서 제안된 제어기를 사용하여 시뮬레이션으로 유효성을 검증하였다. 제안된 제어기법에서 gain-scaling factor인 $\varepsilon$ 값을 증가시킴으로써 AC 측정에러를 효과적으로 줄일 수 있음을 확인하였다.

## 참고문헌


[1] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd Ed., Oxford University Press Inc., 1999.

[2] Z. Chen, "A remark on sensor disturbance rejection of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 9, pp. 2206-2210, Sep. 2009.

[3] H.-L. Choi and J.-T. Lim, "Output feedback stabilization for a class of Lipschitz nonlinear systems," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E88-A, no. 2, pp. 602-605, Feb. 2005.

[4] H.-L. Choi, J.-S. Kim, J.-S. Youn, and K.-S. Lee, "Global stabilization of a class of feedforward nonlinear systems with unknown growth rate and input delay by output feedback," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E92-A, no. 11, pp. 2932-2935, Nov. 2009.

[5] S. J. Joo and J. H. Seo, "Design and analysis of the nonlinear feedback linearizing control for an electromagnetic suspension system," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 5, no. 1, pp. 135-144, Jan. 1996.

[6] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd Ed., Prentice Hall Inc., 2002.

[7] H.-D. Kim, J.-S. Youn, and H.-L. Choi, "Design of an output feedback controller compensating measurement noise for a ball and beam system," *KIEE summer Conference*(in Korean), Busan, Korea, pp. 1653-1654, Jul. 2010.

[8] T. B. Sekara and M. R. Matausek, "Optimization of PID controller based on maximization of the proportional gain under constraints on robustness and sensitivity to measurement noise," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no 1, pp. 184-189, Jan. 2009.

[9] A. Serrani, A. Isidori, and L. Marconi, "Semi-global nonlinear output regulation with adaptive internal model," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 46, no 8, pp. 1178-1194, Aug. 2001.

[10] J.-S. Youn and H.-L. Choi, "Design and analysis of a state feedback controller for a chain of integrators system under measurement noise," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*(in Korean), vol. 16, no. 10, pp. 969-974, Oct. 2010.



**김 현 도**

2010년 동아대학교 전기공학과 졸업. 2010년~현재 동아대학교 대학원 전기공학과 석사과정 재학중. 관심분야는 제어이론, 비선형 시스템 제어.

**최 호 림**

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제15권 제4호 참조.