

시변 추종제어기를 위한 디지털 재설계의 개선

Improving a Digital Redesign for Time-Varying Trackers

송현석, 이호재*, 김도완
(Hyun Seok Song¹, Ho Jae Lee¹, Do Wan Kim²)

¹Inha University

²Hanbat National University

Abstract: Digital redesign is yet another efficient tool to convert a pre-designed analog controller into a sampled-data one to maintain the analog closed-loop performance in the sense of state matching. A rising difficulty in developing a digital redesign technique for trackers with time-varying references is the unavailability of a closed-form discrete-time model of a system, even if it is linear time-invariant. A way to resolve this is to approximate the time-varying reference as a piecewise constant one, which deteriorates the state matching performance. Another remedy may be to decrease a sampling period, which however could numerically destabilize the optimization-based digital redesign condition. In this paper, we develop a digital redesign condition for time-varying trackers by approximating the time-varying reference through a triangular hold and by introducing delta-operated discrete-time models. It is shown that the digitally redesigned sampled-data tracker recovers the performance of the pre-designed analog tracker under a fast sampling limit. Simulation results on the formation flying of satellites convincingly show the effectiveness of the development.

Keywords: digital redesign, time-varying references, delta operator, performance recovery

I. 서론

많은 제어응용에서 제어목적은 종종 단순히 시스템의 안정화에 그치지 않고 시변신호의 추종(tracking)인 경우가 많다. 한 예로서, 인공위성 편대비행(formation flying)의 제어목적은 편대 내 주동기(leader)와 종동기(follower)간 상대위치가 미리 계획된 시변(time-varying)신호를 추종하는 것이다[1].

한편, 샘플치 제어(sampled-data control)는 외란에 대한 강인성(robustness), 실제 시스템 구현의 용이성의 이점을 보여 그 활용분야가 늘어나는 추세이다. 샘플치 제어기의 효율적인 설계기법으로 알려진 디지털 재설계는 잘 설계된 아날로그 제어기의 제어성능이 유지되도록 시스템의 이산시간 모델을 이용하여 상태정합(state matching)의 의미에서 등가인 샘플치 제어기로 변환하는 기법이다[2-4].

기존의 디지털 재설계 기법은 추종신호가 샘플 구간 내에서 시불변(time invariant)임을 가정한다[5]. 그 이유는 추종신호가 시변인 경우 시스템의 폐쇄형 해(closed-form solution)를 표현할 수 없어 이산시간 모델을 구할 수 없기 때문이다. 추종신호의 샘플 구간내의 시불변성을 구현하기 위하여 일반적으로 영차 홀드(zero-order hold)가 도입된다. 이러한 가정하에 재설계된 샘플치 제어기는 추종신호가 샘플 구간 내에서 불변(piecewise constant)일 경우 적절한 추종성능을 보이나, 샘플 구간 내에서 시변인 경우 무시할 수 없는 근사화 오차가 발생하여 샘플치 제어기의 추종성능이 저하된다. 또한 추종

응답이 샘플링 주기의 반에 해당되는 시간만큼 지연된다[3].

시변 추종신호에 영차 홀드를 도입하여 발생된 추종성능 저하와 응답의 시간지연 현상을 완화하기 위하여 샘플링 주기를 감소시키는 것이 일반적인 대처법으로 제시될 수 있으나[5]에 보고된 수치적 최적화 기반 디지털 재설계 기법에는 응용에 따라서 적절치 않을 수 있다. 그 이유는 샘플링 주기 $T \in \mathbb{R}_{>0}$ 을 갖는 이동 연산자(shift operator) $qf(t) = f(t+T)$ 에 기반한 이산시간 모델은 연속시간 모델과 점근적 관계성(asymptotic connection)이 없어 이동 연산자를 이용한 수치적 최적화 기반 디지털 재설계 기법은 샘플링 주기의 감소에 대한 수치적 안정성을 보장하지 않기 때문이다[6].

본 논문은 추종신호가 시변인 경우의 추종성능 개선을 위한 수치적 최적화 기반 디지털 재설계 기법을 논한다. 앞에서 언급된 문제점을 해결하기 위해 삼각 홀드(triangular hold)를 사용한다. 삼각 홀드는 시변신호를 인접한 두 개의 연속적인 샘플치들을 잇는 직선으로 근사화하며 영차 홀드보다 작은 근사화 오차를 발생시킨다. 또한 폐쇄형 해를 표현할 수 있으므로 이산시간 모델을 구할 수 있다. 수치적 최적화 기반 디지털 재설계 조건의 수치적 안정성을 보장하기 위하여 델타 연산자(delta operator) $\delta f(t) = (qf(t) - f(t))/T$ 를 이용한 디지털 재설계 기법에 제시한다. 샘플링 주기가 감소함에 따라 근사화된 추종신호에 기반하여 재설계된 샘플치 제어기가 미리 설계된 아날로그 제어기의 성능을 회복함을 보인다. 인공위성의 편대비행을 위한 샘플치 제어의 수치적 예제를 들어 논의된 결과의 정당성을 보인다.

II. 디지털 재설계의 성능 향상

다음 형태의 선형 시불변 시스템을 고려하자.

$$x_c = Ax_c + Bu_c, \quad x_c(0) = x_0, \quad y_c = Cx_c \quad (1)$$

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2010. 12. 16., 수정: 2011. 2. 7., 채택확정: 2011. 2. 25.

송현석, 이호재: 인하대학교 전자공학부

(hssong@control.inha.ac.kr/mylchi@inha.ac.kr)

김도완: 국립한밭대학교 전기공학과(dowankim@hanbat.ac.kr)

※ 본 논문은 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(2010-0003766).

여기서 $x_c \in \mathbb{R}^m$ 는 상태, $y_c \in \mathbb{R}^p$ 는 출력이다. 아날로그 제어기 $u_c \in \mathbb{R}^m$ 는

$$u_c = K_c x_c + E_c r \quad (2)$$

의 형태이며 (1)과 다음 페루프 시스템을 구성한다.

$$x_c = (A + BK_c)x_c + BE_c r, \quad x_c(0) = x_0 \quad (3)$$

가정 1: 아날로그 제어기 (2)는 다음 조건을 만족하도록 미리 설계되어 주어진다.

- 1) 시변 추종신호 $r \in \mathbb{R}^p$ 은 미리 주어진 시변 추종신호이다.
- 2) $\|r\|_{\mathcal{L}_\infty} = r_M$.
- 3) $r = 0$ 이면 (2)는 (3)의 점근적 안정성을 보장한다.

초기시간 $t = kT$ 에 대하여, (3)의 시간 $t = kT + T$ 에서의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} x_c(kT + T) &= e^{(A+BK_c)(t-kT)} x_c(kT) \\ &+ \int_{kT}^{kT+T} e^{(A+BK_c)(kT+T-\tau)} BE_c r(\tau) d\tau. \quad (4) \\ y_c &= Cx_c \end{aligned}$$

그러나 r 는 시변이므로 이산시간 모델을 도출할 수 없다. 이 제 삼각 홀드를 도입하여 시간구간 $[kT, kT + T)$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 에서 다음과 같이 근사화하면

$$r \approx \bar{r} := \left(\frac{r(kT + T) - r(kT)}{T} \right) (t - kT) + r(kT)$$

\bar{r} 은 다음의 성질을 만족한다.

$$r(kT) = \bar{r}(kT), \quad \frac{d}{dt} \bar{r}(t) = \frac{r(kT + T) - r(kT)}{T}$$

이제 아날로그 제어기는 다음과 같이 근사화되며

$$u_c = K_c x_c + E_c \bar{r} \quad (5)$$

다음의 초기조건 $x_c(0) = x_c(0) = x_0$ 을 갖는 근사 이산시간 페루프 모델을 확보할 수 있다[7].

$$\begin{aligned} x_c(kT + T) &= e^{(A+BK_c)T} x_c(kT) \\ &+ \int_{kT}^{kT+T} e^{(A+BK_c)(kT+T-\tau)} BE_c \bar{r}(\tau) d\tau \quad (6) \\ &= \phi x_c(kT) + \psi_1 r(kT) + \psi_2 r(kT + T) \\ y_c &= Cx_c \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \phi &:= e^{(A+BK_c)T} \\ \psi_1 &:= \frac{1}{T} (e^{(A+BK_c)T} - (A + BK_c)T - I) \\ &\quad \times (A + BK_c)^{-2} BE_c \\ \psi_2 &:= (e^{(A+BK_c)T} - I)(A + BK_c)^{-1} BE_c - \psi_1 \end{aligned}$$

이다.

참고 1: 추종신호의 수렴 성질 $T \rightarrow 0 \Rightarrow r \rightarrow \bar{r}$ 은 쉽게 유추된다. 따라서 다음을 만족하는 class- \mathcal{K} 함수 $\mu_1(T)$ 가 존재한다: $\|r - \bar{r}\| \leq \mu_1(T)$.

시스템 (1)에 샘플치 제어입력을 고려한 다음의 경우에 대하여

$$\begin{aligned} x_d &= Ax_d + Bu_d, \quad x_d(0) = x_0 \\ y_d &= Cx_d \end{aligned}$$

시간구간 $[kT, kT + T)$ 에서 아래의 샘플치 제어기를 도입하면

$$\begin{aligned} u_d &= u_d(kT) \\ &:= K_d x_d(kT) + E_d r(kT) + F_d r(kT + T) \quad (7) \end{aligned}$$

이산화된 페루프 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_d(kT + T) &= (G + HK_d)x_d(kT) + HE_d r(kT) \\ &+ HF_d r(kT + T) \quad (8) \end{aligned}$$

여기서 $G := e^{AT}$, $H := \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)} B d\tau$.

참고 2: 추종신호 r 은 미리 주어지므로 (6)과 (8)의 인과성(causality)은 훼손되지 않는다.

두 개의 모델들 (3)과 (8)에 델타 연산자를 적용하면 다음과 같이 등가의 이산시간 모델들을 얻는다.

$$\delta x_c(kT) = \phi_\delta x_c(kT) + \psi_{1\delta} r(kT) + \psi_{2\delta} r(kT + T) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta x_d(kT) &= (G_\delta + H_\delta K_d)x_d(kT) \\ &+ H_\delta E_d r(kT) + H_\delta F_d r(kT + T) \quad (10) \end{aligned}$$

여기서 $\phi_\delta := (\phi - I)T$, $\psi_{1\delta} := \psi_1/T$, $\psi_{2\delta} := \psi_2/T$, $G_\delta := (G - I)/T$, $H_\delta := H/T$ 이다.

식 (9)와 (10)으로부터 상태정합 조건, 즉 $x_c(kT) = x_d(kT)$ 의 가정하에 $x_c(kT + T) = x_d(kT + T)$ 가 성립하기 위한 조건을 유도하자. 델타 연산자는 선형 연산자이므로 $x_c(kT + T) = x_d(kT + T) \Leftrightarrow \delta x_c(kT) = \delta x_d(kT)$ 이며 상태정합이 성립하기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\phi_\delta = G_\delta + H_\delta K_d$$

$$\psi_{1\delta} = H_\delta E_d$$

$$\psi_{2\delta} = H_\delta F_d$$

정리 1: 다음의 선형행렬부등식을 만족하는 행렬들 $Q = Q^T \succ 0$, K_b , E_b , F_d 과 α_1 , α_2 , $\alpha_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ 가 존재한다면 $x_d(kT)$ 과 $x_c(kT)$ 는 근사하게 정합되며, $r = 0$ 인 경우 (10)은 점근적으로 안정하다.

Minimize $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ subject to

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1 Q & * \\ \phi_\delta Q - G_\delta Q - H_\delta M & -\alpha_1 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha_2 I & * \\ \psi_{1\delta} - H_\delta E_d & -\alpha_2 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha_3 I & * \\ \psi_{2\delta} - H_\delta F_d & -\alpha_3 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} QG_\delta^T + M^T H_\delta^T + G_\delta Q + H_\delta M & * \\ G_\delta Q + H_\delta M & -\frac{1}{T} Q \end{bmatrix} \prec 0 \quad (14)$$

증명: 전열계수(full-column rank)를 갖는 자유변수 X 를 도입하여 다음과 같은 부등식을 고려하자.

$$\|\phi_\delta - G_\delta - H_\delta K_d\|_2 \leq \alpha_1 \|X\|_2 \quad (15)$$

$P \succ XX^T$ 을 만족하는 X 를 정하고 2-놈(norm)의 정의에 의하여

$$(\phi_\delta - G_\delta - H_\delta K_d)^T (\phi_\delta - G_\delta - H_\delta K_d) \prec \alpha_1^2 P$$

을 만족한다. 여기서 슈어 여수법(Schur complement)을 사용하

고 $\text{diag}\{P^{-1}, I\}$ 에 의한 컨그루언스 변환(congruence transform) 후 변수치환 $Q := P^{-1}$, $M := K_d X$ 을 하면 (11)이 유도된다. 따라서 α_1 을 최소화할 경우 $\|\phi_\delta - G_\delta - H_\delta K_d\|_2$ 가 최소화되는 K_d 을 구할 수 있다.

유사하게 (12)는 다음 식과 등가이며

$$(\psi_{1\delta} - H_\delta E_d)^T (\psi_{1\delta} - H_\delta E_d) < \alpha_2^2 I$$

α_2 을 최소화하는 E_d 을 찾음으로써 $\|\psi_{1\delta} - H_\delta E_d\|_2$ 는 최소화된다. (13)도 동일한 방법으로 유도할 수 있다. 식 (14)는 리아푸노프(Lyapunov)의 의미에서 $r = 0$ 인 경우 (10)의 점근적 안정성을 보장한다. 이를 증명하기 위하여 다음 리아푸노프 함수 $V(x_d(kT)) := x_d^T(kT) P x_d(kT)$ 를 사용한다. 모든 $x_d \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $\delta V(x_d(kT)) < 0$ 는

$$T(G_\delta + H_\delta K_d)^T P(G_\delta + H_\delta K_d) + (G_\delta + H_\delta K_d)^T P + P(G_\delta + H_\delta K_d) < 0$$

와 등가이고 (14)와 등가이다.

참고 3: 샘플링 주기에 대한 다음의 점근적 성질들 $\phi_\delta \rightarrow A + BK_c$, $\psi_{1\delta} \rightarrow BE_c/2$, $\psi_{2\delta} \rightarrow BE_c/2$, $G_\delta \rightarrow A$, $H_\delta \rightarrow B$ 로부터 $T \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rightarrow 0$ 임을 알 수 있으며 따라서 $K_d \rightarrow K_c$, $E_d \rightarrow E_c/2$, $F_d \rightarrow E_c/2$ 다.

III. 성능회복 해석

본 절의 핵심을 다음 정리에 보인다.

정리 2: 정리 1에 의하여 근사화된 아날로그 제어기 (5)를 재설계한 샘플치 제어기 (7)은 아날로그 제어기 (2)의 성능을 회복한다.

증명 출력의 정합 오차를 $e := y_c - y_d$ 로 정의하자. 임의의 시간 $t = kT + h \in \mathbb{R}_{>0}$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $h \in [0, T)$ 에 대하여 $\|e\|$ 는 삼각부등식에 의하여 아래와 같이 표현된다.

$$\|e\| \leq \|y_c(kT + h) - y_c(kT)\| + \|y_c(kT) - y_d(kT)\| + \|y_d(kT) - y_d(kT + h)\|$$

페루프 시스템 (8)의 적분으로부터 유도된 다음 식에

$$y_d(kT + h) - y_d(kT) = C \left(h((A + BK_d)x_d(kT) + B(E_d r(kT) + F_d r(kT + T))) + \int_{kT}^{kT+h} A(x_d(\tau) - x_d(kT))d\tau \right)$$

그론월-벨만(Gronwall-Bellman) 부등식을 적용하면 아래의 관계를 얻는다.

$$\begin{aligned} & \sup_{h \in [0, T)} \|y_d(kT + h) - y_d(kT)\| \\ & \leq \|C\| \left(\frac{1}{\|A\|} (e^{\|A\|T} - 1) (\|A + BK_d\| l_1 + \|BE_d\| + \|BF_d\| r_M) \right) \\ & =: \mu_2(T) \end{aligned}$$

여기서 정리 1의 점근적 안정성과 가정 1에 의하여 $x_d(kT)$ 는 유한입력-유한출력의 의미에서 안정하므로 $l_1 := \sup_{k \in \mathbb{Z}_{[0, \infty)}} \|x_d(kT)\|$

$\|x_d(kT)\|$ 는 유한한 값이다. 따라서 $\mu_2 : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 는 class- \mathcal{K} 함수이다. 따라서 임의의 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ 에 대하여

$$\sup_{h_1 \in [0, T_1)} \left\| y_d \left(\left\lfloor \frac{kT + h}{T_1} \right\rfloor T_1 + h_1 \right) - y_d \left(\left\lfloor \frac{kT + h}{T_1} \right\rfloor T_1 \right) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

을 만족하는 $T_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ 이 존재함을 알 수 있다. 여기서 $h_1 \in [0, T_1)$ 는 $\lfloor (kT + h)/T_1 \rfloor T_1 + h_1 = kT + h$ 을 만족하는 상수이다.

유사하게 $\|y_c(kT + h) - y_c(kT)\|$ 에 대하여

$$\sup_{h_2 \in [0, T_2)} \left\| y_c \left(\left\lfloor \frac{kT + h}{T_2} \right\rfloor T_2 + h_2 \right) - y_c \left(\left\lfloor \frac{kT + h}{T_2} \right\rfloor T_2 \right) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

을 만족하는 $T_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ 이 존재한다. 여기서 $h_2 \in [0, T_2)$ 는 $\lfloor (kT + h)/T_2 \rfloor T_2 + h_2 = kT + h$ 을 만족하는 상수이다. 이제 $\|y_c(kT_3) - y_d(kT_3)\| \leq \varepsilon/4$ 를 만족하는 $T_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ 의 존재성을 조사하자. 식 (3)과 (8)로부터 다음의 부등식을 얻을 수 있으며

$$\begin{aligned} & \|y_c(kT) - y_d(kT)\| \\ & \leq \|C\| \left(e^{\|A\|T} (1 + T \|BK_c\|) \right. \\ & \quad \times \|x_c(kT - T) - x_d(kT - T)\| \\ & \quad + T e^{\|A\|T} (\|B(K_c - K_d)\| \|x_d(kT - T)\| \\ & \quad + \|B(E_c - E_d - F_d)\| \|r(kT)\| \\ & \quad \left. + \|BE_d\| \|r(kT) - r(kT - T)\| + \|BK_c\| \mu_3(T)) \right) \end{aligned}$$

다음의 부등식

$$\frac{1}{e^{\|A\|T} (1 + T \|BK_c\|)} < 1$$

을 사용하여 이것을 풀면

$$\begin{aligned} & \|y_c(kT) - y_d(kT)\| \\ & \leq \|C\| \left(\left(e^{\|A\|T} (1 + T \|BK_c\|) \right)^k \left(\|x_c(0) - x_d(0)\| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{1}{e^{\|A\|T} (1 + T \|BK_c\|) - 1} \right) T e^{\|A\|T} \right. \right. \\ & \quad \times (\|B(K_c - K_d)\| l_1 + \|B(E_c - E_d - F_d)\| r_M \\ & \quad \left. \left. + \|BE_d\| \|r(kT) - r(kT - T)\| + \|BK_c\| \mu_3(T)) \right) \right) \end{aligned}$$

의 부등식을 얻는다. 이제 로피탈 법칙(L'hospital's law)과 참고 1과 3에 의하여

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow 0} \frac{T e^{\|A\|T} \|B(K_c - K_d)\| l_1}{e^{\|A\|T} (1 + T \|BK_c\|) - 1} = 0 \\ & \lim_{T \rightarrow 0} \frac{T e^{\|A\|T} \|B(E_c - E_d - F_d)\| r_M}{e^{\|A\|T} (1 + T \|BK_c\|) - 1} = 0 \\ & \lim_{T \rightarrow 0} \frac{T e^{\|A\|T} \|BE_d\| \|r(kT) - r(kT - T)\|}{e^{\|A\|T} (1 + T \|BK_c\|) - 1} = 0 \\ & \lim_{T \rightarrow 0} \frac{T e^{\|A\|T} \|BK_c\| \mu_3(T)}{e^{\|A\|T} (1 + T \|BK_c\|) - 1} = 0 \end{aligned}$$

와

$$\lim_{T \rightarrow 0} (1 + T \|BK_c\|)^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} = e^{\|BK_c\|t}$$

그리고 초기값 가정 $x_d(0) = x_c(0) = x_0$ 은 $T \rightarrow 0 \Rightarrow \|y_c(kT)$

$-y_d(kT) \parallel \rightarrow 0$ 을 보장한다. 따라서

$$\left\| y_c \left(\left\lfloor \frac{kT+h}{T_3} \right\rfloor T_3 \right) - y_d \left(\left\lfloor \frac{kT+h}{T_3} \right\rfloor T_3 \right) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

을 만족하는 $T_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ 이 존재한다. 마지막으로 다음의 부등식으로부터

$$\begin{aligned} & \sup_{h \in [0, T)} \|y_c(kT+h) - y_c(kT+h)\| \\ & 6 \|C\| \sup_{h \in [0, T)} \left\{ e^{\|A+BK_c\|(kT+h)} \|x_c(0) - x_c(0)\| \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{kT+h} e^{\|A+BK_c\|(kT+h-\tau)} \|BE_c\| \|r(\tau) - r(\tau)\| d\tau \right\} \\ & 6 (kT+T) \|C\| e^{\|A+BK_c\|(kT+T)} \|BE_c\| \mu_1(T) \end{aligned}$$

$T \rightarrow 0 \Rightarrow \|y_c(kT+h) - y_c(kT+h)\| \rightarrow 0$ 을 유도할 수 있다. 따라서

$$\left\| y_c \left(\left\lfloor \frac{kT+h}{T_4} \right\rfloor T_4 + h_4 \right) - y_c \left(\left\lfloor \frac{kT+h}{T_4} \right\rfloor T_4 + h_4 \right) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

을 만족하는 $T_4 \in \mathbb{R}_{>0}$ 이 존재한다. 여기서 $h_4 \in [0, T_4)$ 는 $\lfloor (kT+h)/T_4 \rfloor T_4 + h_4 = kT+h$ 을 만족하는 상수이다. 이제 임의의 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ 에 대해 $T \leq \min\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ 을 만족하는 T 을 선택한다면 모든 $t \in \mathbb{R}_{>0}$ 에 대해 $\|e\| \leq \varepsilon$ 이므로 $T \rightarrow 0 \Rightarrow \|e\| \rightarrow 0$ 다.

IV. 수치적 예제

외란을 고려하지 않은 인공위성 편대내의 주동기와 중동기의 상대 운동 역학의 선형 모델은 다음의 상태 방정식으로 표현된다[8].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ w^2 - \frac{Mg}{\|R\|^3} & 0 & 0 & 0 & 2w & 0 \\ 0 & w^2 - \frac{Mg}{\|R\|^3} & 0 & -2w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Mg}{\|R\|^3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \\ &+ \begin{bmatrix} 0_3 \\ \frac{1}{m_f} I_3 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

여기서 $x := \text{col}\{\rho, \rho\}$, $R = [0, 4.224 \times 10^7, 0]^T \text{ m}$, $g = 6.673 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$, $M = 5.974 \times 10^{24} \text{ kg}$, $m_f = 410 \text{ kg}$, $w = 7.272 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 이다. 초기값 $x_c(0) = x_d(0) = x_0 = (0, 0, -20, 0, 0, 0)$ 이고 y_c 가 추종할 기준신호는

$$r = [100 \sin(4wt)(1 - e^{-0.05t^3}), 100 \cos(4wt)(1 - e^{-0.05t^3}), 0]^T$$

이다. 이 때 잘 설계된 아날로그 제어기의 이득은

$$K_c = 10^3 \times \begin{bmatrix} -9.9943 & 0.2598 & 0 \\ -0.8216 & -3.1798 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$E_c = 10^3 \times \begin{bmatrix} -2.8523 & -0.1102 & 0 \\ -0.1102 & -1.6256 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2864 \\ 9.9662 & -0.2598 & 0 \\ 0.8216 & 3.1517 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

으로 주어짐을 가정하자. 제안된 기법의 효용성을 입증하기 위하여 기존 [5]의 기법과 비교한다. 이 기법은 이동 연산자로 표현되는 이산시간 모델의 상태정합 조건을 수치적 최적화 문제로 표현하고 이를 풀어 샘플치 제어기 이득을 재설계한다. 따라서 제안된 기법의 비교대상으로 적절하다.

샘플링 주기가 $T=0.5 \text{ h}$ 인 경우 이동 연산자를 사용하여 재설계된[5] 샘플치 제어기의 이득은

$$\begin{aligned} K_{d\text{chang}} &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -1.1454 & 0.1218 & 0 \\ -0.0436 & -1.0550 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0850 \\ -1.0119 & -0.0950 & 0 \\ 0.0826 & -0.9210 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2649 \end{bmatrix} \\ E_{d\text{chang}} &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 1.0957 & -0.1226 & 0 \\ 0.0422 & 1.0246 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0839 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이다. 정리 1의 최적화 문제의 해로부터 재설계한 의한 샘플치 제어기의 이득은

$$\begin{aligned} K_d &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -1.1428 & 0.1241 & 0 \\ -0.0433 & -1.0519 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0835 \\ -1.0262 & -0.0977 & 0 \\ -0.0822 & -0.9206 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2622 \end{bmatrix} \\ E_d &= \begin{bmatrix} -297.5532 & -6.8065 & 0 \\ -138.2490 & 256.6011 & 0 \\ 0 & 0 & 40.25 \end{bmatrix} \\ F_d &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 1.3933 & -0.1158 & 0 \\ 0.1804 & 0.7680 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0436 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이다. 그림 1과 2의 모의실험 결과에서 보이듯이 제안된 기법의 상태정합 성능이 기존 기법보다 우수함을 알 수 있다. 그 이유는 [5]의 기법은 추종신호의 시변변성을 가정함에 있다. 따라서 시변 추종신호가 사용된 경우 상태정합 성능이 저하된다. 반면 제안된 기법은 추종신호의 시변성을 고려하여 개발된 기법으로 상태정합 성능이 우수하다.

그림 1에 나타난 만족스럽지 않은 시변 추종제어 성능을 개선하기 위한 일반적인 방법은 샘플링 주기를 감소시키는 것으로 알려져 있다. 샘플링 주기를 $T=1e-6 \text{ h}$ 로 감소시킨 경우 [5]에 의한 재설계된 샘플치 제어기의 이득은

$$\begin{aligned} K_{d\text{chang}} &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -4.0548 & -0.1071 & 0 \\ 0.1717 & -2.9615 & 0 \\ 0 & 0 & -2.9979 \\ -3.5405 & -0.2016 & 0 \\ 0.1522 & -3.9763 & 0 \\ 0 & 0 & -4.3626 \end{bmatrix} \\ E_{d\text{chang}} &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 9.9662 & -0.2598 & 0 \\ 0.8216 & 3.1517 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

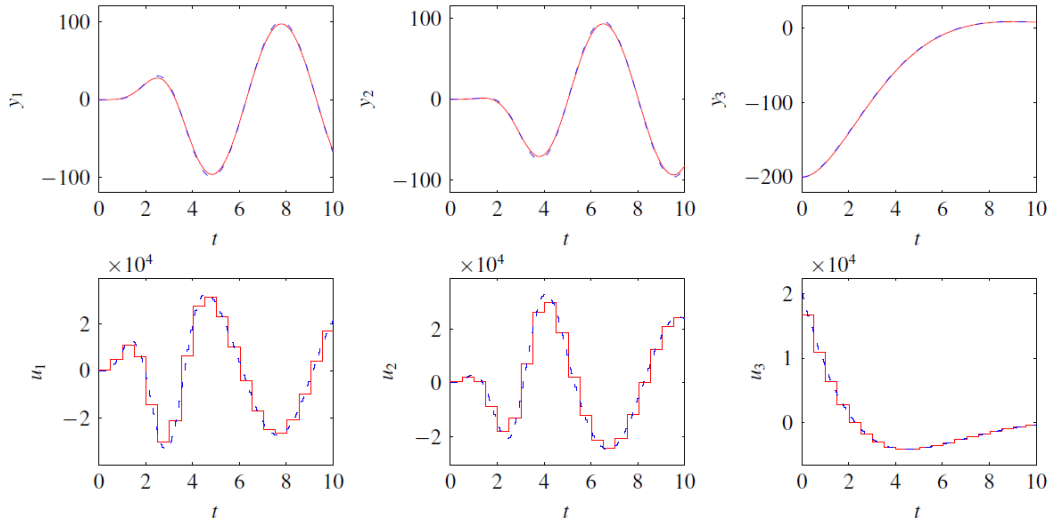


그림 1. $T=0.5$ h일 때의 시간응답(파란 점선: 아날로그 제어, 빨간 실선: [5]에 의한 샘플치 제어).
 Fig. 1. Time responses for $T=0.5$ h (dashed: analog, solid: [5]).

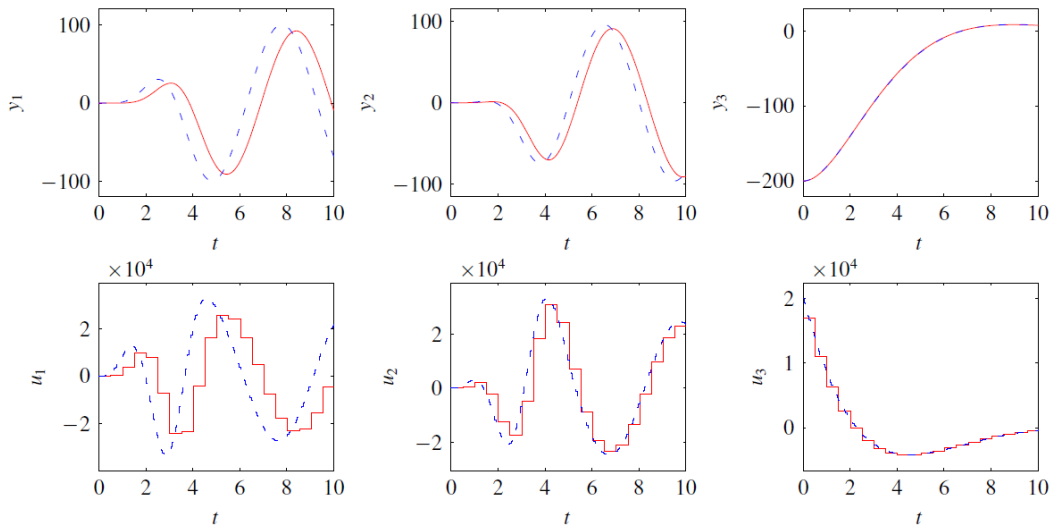


그림 2. $T=0.5$ h일 때의 시간응답(파란 점선: 아날로그 제어, 빨간 실선: 제안된 기법에 의한 샘플치 제어).
 Fig. 2. Time responses for $T=0.5$ h (dashed: analog, solid: proposed).

이며 제안된 기법에 의하여 재설계된 샘플치 제어기의 이득은

$$K_d = 10^3 \times \begin{bmatrix} -9.9943 & 0.2598 & 0 \\ -0.8216 & -537.9709 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0998 \\ -2.8523 & -0.1102 & 0 \\ -0.1108 & -1.6256 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2859 \end{bmatrix}$$

$$E_d = 10^3 \times \begin{bmatrix} 4.9832 & -0.1299 & 0 \\ 0.4108 & 1.5759 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$F_d = 10^3 \times \begin{bmatrix} 4.9830 & -0.1299 & 0 \\ 0.4108 & 1.5758 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

로 계산된다. 즉, $T \rightarrow 0$ 일 때, 제안된 설계 기법으로 재설계된 샘플치 제어기의 이득들은 $(K_d, E_d + F_d) \rightarrow (K_c, E_c)$ 을 만족한다. 따라서 $T \rightarrow 0$ 인 경우 제안된 기법은 상태정합의

의미에서 주어진 아날로그 제어 시스템의 성능을 회복한다.

이것은 정리 2의 성능회복 해석 결과와 일치한다. 이에 반하여 [5]에 의하여 재설계된 샘플치 제어기의 이득은 $(K_{d_{\text{chang}}}, E_{d_{\text{chang}}}) \rightarrow (K_c, E_c)$ 을 만족하지 않으며 상태정합의 의미에서 아날로그 제어 시스템의 성능을 회복하지 않는 것은 자명하다. 따라서 기존 기법은 샘플링 주기를 감소시키는 것이 시변 추종제어 성능의 개선을 보장하지 않는다.

V. 결론

본 논문에서는 시변 추종신호를 사용하는 아날로그 제어 시스템의 수치적 최적화 기반 디지털 재설계 기법을 논하였다. 디지털 재설계 조건은 선형행렬부등식의 형태로 유도된다. 근사화된 모델에 기반하여 제안된 기법으로 재설계된 샘플치 제어기는 성능회복이 보장된다. 적절한 수치적 예제로 제안된 기법의 우수성을 보였다.

참고문헌

- [1] H. J. Lee and D. W. Kim, "Sampled-data control of formation flying using optimal linearization," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*(in Korean), vol. 15, no. 1, pp. 61-66, Jan. 2009.
- [2] D. W. Kim and H. J. Lee, "Controlling linear systems with nonlinear perturbations under sampled-data output feedback: digital redesign approach," *International journal of Control*, vol. 83, no. 8, pp. 1718-1726, Aug. 2010.
- [3] S.-M. Guo, L.-S. Shieh, G. Chen, and C. F. Lin, "Effective chaotic orbit tracker: a prediction-based digital redesign approach," *IEEE Transactions on Circuits and Systems-Part I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 47, no. 11, pp. 1557-1570, Nov. 2000.
- [4] J. W. Sunkel, L.-S. Shieh, and J. L. Zhang, "Digital redesign of an optimal momentum management controller for the space station," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 14, no. 4, pp. 712-723, Apr. 1991.
- [5] W. Chang, J. B. Park, H. J. Lee, and Y. H. Joo, "LMI approach to digital redesign of linear time-invariant systems," *IEEE Proc. Control Theory and Applications*, vol. 149, pp. 297-302, Jul. 2002.
- [6] C. P. Neumann, "Properties of the delta operator model of dynamic physical systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 23, no. 1, pp. 296-301, Jan. 1993.
- [7] Y. Itoh and N. Hori, "Digital redesign based on the principle of equivalent areas using a slewer-hold," *Proc. of the 41st SICE Annual Conference*, vol. 3, pp. 1816-1821, 2002.
- [8] H. J. Lee, L.-S. Shieh, and D. W. Kim, "Digital control of nonlinear systems: optimal linearisation-based digital redesign approach," *IET Control Theory and Applications*, vol. 2, no. 4, pp. 337-351, Apr. 2008.



송 현 석

2009년 인하대학교 전자공학과 졸업. 현재 인하대학교대학원 석사과정 재학 중. 관심분야는 디지털 재설계, 샘플치 제어.



이 호 재

1998년 연세대학교 전기공학과(공학사). 2000년 연세대학교대학원 전기컴퓨터 공학과(공학석사). 2004년 동 대학원 전기전자 공학과(공학박사). 2005년 University of Houston, Houston, TX, USA 방문 조교수. 현재 인하대학교 전자전기공학부 조교수. 관심분야는 비선형 샘플치 제어, 편대 비행 제어, 디지털 재설계.



김 도 완

2002년 연세대학교 전기공학과(공학사). 2004년 연세대학교대학원 전기전자공학과(공학석사). 2007년 동 대학원 전기전자공학과(공학박사). 2008년 연세대학교 산업기술연구소 연구원 및 University of California at Berkeley, CA, USA 박사 후 과정. 2009년 연세대학교 전기전자공학과 BK 연구교수. 현재 국립한밭대학교 전기공학과 전임강사. 관심분야는 비선형 샘플치 제어, 지능제어, 디지털 재설계.