새로운 구간 분해 방법을 이용한 구간 시변지연을 갖는 선형시스템의 안정성

논 문
60-9-17

Stability of Linear Systems with Interval Time-varying Delay via New Interval Decomposition

김 진 훈*
(Jin-Hoon Kim)

Abstract - In this paper, we consider the stability of linear systems with an interval time-varying delay. It is known that the adoption of decomposition of delay improves the stability result. For the interval time-delay case, they applied it to the interval of time-delay and got less conservative results. Our basic idea is to apply the general decomposition to the low limit of delay as well as interval of time-delay. Based on this idea, by using the modified Lyapunov-Krasovskii functional and newly derived Lemma, we present a less conservative stability criterion expressed as in the form of linear matrix inequality(LMI). Finally, we show, by well-known two examples, that our result is less conservative than the recent results.

Keyworks : Stability, Interval time-delay, General decomposition, Lyapunov-Krasovskii, LMI

1. 서 론

시간지연 선형시스템에 대한 안정성 해석 혹은 안정화 문제는 시스템의 상태방정식 내에 시간지연 항을 포함하고 있는 시간지연 선형시스템에 대하여 안정성을 해석하거나 안정화를 보장하는 제어기를 설계하는 것이다. 시간지연 선형시스템은 시스템이 갖고 있는 시간지연 항이 시스템 자체의 불안정성이나 성능하락의 원인으로 작용하기 때문에 오랫동안 많은 연구자들의 관심을 끌어온 문제들 중의 하나이다 [13].

시간지연 선형시스템에 대한 안정성 해석 혹은 안정화 문제는 크게 시간지연 독립과 시간지연 종속의 두 가지로 분류할 수 있다. 시간지연 독립(time-delay independent)은 모든 시간지연 요소의 크기에 대해 안정성 혹은 안정화를 보장하는 조건이기에 시간지연 종속(time-delay dependent) 안정성보다 더 보수적이기 때문에 시간지연 종속 안정성에 더 많은 관심이 있어 왔다. 이러한 시간지연 선형시스템에 대한 안정성 해석문제에서 시간지연 독립 문제는 초기에 Razumikhin조건을 이용해서 해결하였다. 그러나 시간 지연 독립의 경우 모든 시간 지연에 대하여 만족하는 결과를 얻어야 하는 관계로 현재에는 시간지연 종속의 연구에 집중되고 있다. 이의 대표적인 것이 Lyapunov-Krasovskii(L-K) 함수를 이용하는 것으로, 현재에는 대부분의 경우 L-K 함수를 이용하여 더 나은 결과를 얻고자 노력하고 있다[13].

다음의 상태방정식으로 기술된 시변 시간지연을 갖는 선형시스템을 생각하자.

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x[t-d(t)] \\ x(t) = \phi(t), t \in [-h_2, 0]\end{cases} \tag{1}$$

여기서 $x \in R^n$은 상태벡터, 행렬 $A, A_d \in R^{n \times n}$은 상수 행렬, 그리고 초기조건 $\phi(t)$는 연속 미분 가능 벡터이다. 다음으로 시간지연 $d(t)$는 이의 특성상 (a) 상수 시간지연 (b) 시변 시간지연 (c) 구간 시변 시간지연의 세 가지로 분류되며, 또한 시변 시간지연의 경우 이의 (i) 변화율의 상한이 알려진 경우 (ii) 변화율의 상한이 알려지지 않은 경우로 나뉜다. 본문에서는 이 중 가장 일반적인 경우인 양수 $h_1, h_2 > 0$에 대하여 다음을 만족하는 구간 시변 시간지연이다.

$$0 < h_1 \le d(t) \le h_2, \quad \text{and} \quad \dot{d}(t) \le \mu; \ \forall t \ge 0 \tag{2}$$

여기서 $\mu > 0$ 이며, 시간지연의 변화율이 알려지지 않은 경우는 $\mu \to \infty$로 하면 된다.

위의 시간지연에 대한 조건 (2)를 갖는 시스템 (1)의 안정성을 보장하는 결과를 얻는데 가장 많이 사용되어진 대표적인 L-K함수는 다음 형태의 이차함수(quadratic function)이다[6][9].

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x^T(t)Px(t) + \int_{t-d(t)}^{t} x^T(\theta)R_d x(\theta) d\theta \\ &+ \sum_{i=1}^{2}\int_{t-h_i}^{t} x^T(\theta)R_i x(\theta)d\theta \\ &+ \sum_{i=1}^{2}\int_{-h_i}^{0}\int_{t+s}^{t} \dot{x}^T(\theta)Q_i \dot{x}(\theta)d\theta ds \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 첫 번째 이차항(x^TPx)은 Lyapunov 안정성 결과를

* 정 회 원 : 충북대학교 전자정보대학 전자공학부 교수
E-mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr
접수일자 : 2011년 6월 19일
최종완료 : 2011년 8월 8일

얻는데 필요한 가장 기본적 형태이고, 1차 적분항들은 시간지연 미분항의 상한, 2중적분 항들은 시간지연의 크기를 포함하기 위한 이차항들이다.

현재에도 L-K함수 (3)을 변형하여 좀 더 나은 결과를 얻기 위하여 많은 노력을 하고 있으며, 이에 따른 많은 결과들이 제시되었다. 이 중 대표적인 것으로는 시스템 모델변환 [1][3][12], 구간 분활[4][8][10], 삼차적분[9][12], 준양확정행렬의 추가[7], 변수추가[9][9], 영(zero) 더미(dummy) 함수 추가[5]등이 있다.

특별히 구간 분활은 LMI의 개수는 증가하지만 기존의 결과보다 우수함을 보였다. 이의 대표적으로 Jiang et al.[4]]은 구간 $[h_1, h_2]$를 동일한 2개 부구간으로 나누어 얻어진 결과를 제시하였고, 또한 Yu et. al.[8]는 구간 $[h_1, h_2]$를 동일한 2개 또는 3개의 부구간으로 나누어 얻어진 결과를 제시하였다. 그리고 Zhu et. al.[10]는 구간 $[0, h_2]$을 하나의 non-convex 스칼라 $\alpha \in [0,1]$를 도입하여 두 개의 부 구간 $[0, \alpha h_2]$와 $[\alpha h_2, h_2]$으로 나누어 얻어진 결과를 제시하였다.

위에서 지적하였듯이 구간분할 방법은 구간 $[h_1, h_2]$을 적당한 크기로 동일하게 분할하여 결과를 얻는 것으로 분할의 개수가 많아지면 이에 따라 LMI의 개수가 증가하는 데 반하여 성능은 향상되는 결과를 얻는다.

2. 예비 결과

본 논문에서는 시간지연이 속하는 구간 $[h_1, h_2]$을 일반적인 개수 N개로 동일하게 분할할 뿐만 아니라 구간의 하한인 h_1도 일반적인 개수 M으로 동일하게 분할함으로써, 즉

$$\begin{cases} [h_1, h_2] = \cup_{k=1}^{N}[h_1+(k-1)h_0, \quad h_1+kh_0]; h_0 = \dfrac{h_2-h_1}{N} \\ [0, h_1] = \cup_{k=1}^{M}[(k-1)\eta_0, \ \ k\eta_0]; \ \eta_0 = \dfrac{h_1}{M}. \end{cases} \tag{4}$$

기존의 결과보다 우수한 결과를 얻는 것이다. 다음의 보조정리는 주요 결과를 유도하는데 사용될 예비결과이다. 먼저 보조정리 1은 기존에 잘려진 Jensen의 부등식으로 이는 적분 구간 내에 시간지연이 없는 경우에 사용될 것이다. 그리고 보조정리 2는 적분 구간 내에 시간지연이 포함된 경우에 사용될 새로운 결과이다.

보조정리 1[13]: 행렬 $X = X^T > 0$와 스칼라 $a < b$에 대하여,다음의 부등식은 Jensen의 부등식으로 잘 알려진 관계식이다.

$$-\int_{t-b}^{t-a}\dot{x}^T(s)X\dot{x}(s)ds \le -\frac{1}{b-a}\left(\int_{t-b}^{t-a}\dot{x}(s)ds\right)^T X\left(\int_{t-b}^{t-a}\dot{x}(s)ds\right). \tag{5}$$

보조정리 2: 벡터 $x \in R^n$과 대칭행렬 $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix} \ge 0$, $X \in R^{n \times n} > 0$, 그리고 스칼라 $0 < a \le d(t) \le b$에 대하여 다음이 항상 성립한다.

$$-\int_{t-b}^{t-a}\dot{x}^T(s)X\dot{x}(s)ds \le -\frac{1}{b-a}\begin{bmatrix} \int_{t-b}^{t-d(t)}\dot{x}(s)ds \\ \int_{t-d(t)}^{t-a}\dot{x}(s)ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \int_{t-b}^{t-d(t)}\dot{x}(s)ds \\ \int_{t-d(t)}^{t-a}\dot{x}(s)ds \end{bmatrix} \tag{6}$$

증명: 첫 번째로 $d(t) = a$인 경우에는

$$\begin{aligned} r.h.s. \ of(6) &= -\frac{1}{b-a}\begin{bmatrix} \int_{t-b}^{t-a}\dot{x}(s)ds \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \int_{t-b}^{t-a}\dot{x}(s)ds \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{b-a}\left(\int_{t-b}^{t-a}\dot{x}(s)ds\right)^T X\left(\int_{t-b}^{t-a}\dot{x}(s)ds\right) \end{aligned}$$

다음으로 $d(t) = b$인 경우에는

$$\begin{aligned} r.h.s. \ of(6) &= -\frac{1}{b-a}\begin{bmatrix} 0 \\ \int_{t-b}^{t-a}\dot{x}(s)ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \int_{t-b}^{t-a}\dot{x}(s)ds \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{b-a}\left(\int_{t-b}^{t-a}\dot{x}(s)ds\right)^T X\left(\int_{t-b}^{t-a}\dot{x}(s)ds\right) \end{aligned}$$

이 되어, $d(t) = a$ 또는 $d(t) = b$인 경우, (6)식은 보조정리 1의 Jensen 부등식 (5)와 동일하게 된다. 따라서 우리는 $d(t) \in (a,b)$인 경우만 (6)를 증명하여도 충분하다. 이를 위하여 새로운 스칼라 $\beta := \dfrac{d(t)-a}{b-d(t)}$를 정의하면, $d(t) \in (a,b)$인 경우 $\beta \in (0, \infty)$이고 다음의 관계식이 성립한다.

$$\frac{1}{b-d(t)} = \frac{1+\beta}{b-a}, \ \frac{1}{d(t)-a} = \frac{1+1/\beta}{b-a} \tag{7}$$

먼저 Schur complement[11] 성질에 의하여 다음의 동치관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & X \end{bmatrix} \ge 0 &\Leftrightarrow X - Y^T X^{-1} Y \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \beta X - \beta Y^T X^{-1} Y \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \beta X & -Y \\ -Y^T & \frac{1}{\beta}X \end{bmatrix} \ge 0, \forall \beta \in (0, \infty) \end{aligned} \tag{8}$$

다음으로 (6)의 좌변에 (i) 적분구간 $[t-b, t-a]$를 $[t-b, \ t-d(t)]$와 $[t-d(t), t-a]$로 분리하고, (ii) 보조정리 1의 Jensen의 부등식을 두 항에 각각 적용하고, (iii) (7)의 관계식을 적용하고, (iv) 마지막으로 (8)의 관계식을 순차적으로 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & l.h.s. \ of(6) \\ &= -\int_{t-b}^{t-d(t)}\dot{x}^T(s)X\dot{x}(s)ds - \int_{t-d(t)}^{t-a}\dot{x}^T(s)X\dot{x}(s)ds \\ &\le -\frac{1}{b-d(t)}\left(\int_{t-b}^{t-d(t)}\dot{x}(s)ds\right)^T X\left(\int_{t-b}^{t-d(t)}\dot{x}(s)ds\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{d(t)-a}\left(\int_{t-d(t)}^{t-a}\dot{x}(s)ds\right)^T X\left(\int_{t-d(t)}^{t-a}\dot{x}(s)ds\right)\\
&=-\frac{1+\beta}{b-a}\left(\int_{t-b}^{t-d(t)}\dot{x}(s)ds\right)^T X\left(\int_{t-b}^{t-d(t)}\dot{x}(s)ds\right)\\
&\quad-\frac{1+1/\beta}{b-a}\left(\int_{t-d(t)}^{t-a}\dot{x}(s)ds\right)^T X\left(\int_{t-d(t)}^{t-a}\dot{x}(s)ds\right)\\
&\le-\frac{1+\beta}{b-a}\left(\int_{t-b}^{t-d(t)}\dot{x}(s)ds\right)^T X\left(\int_{t-b}^{t-d(t)}\dot{x}(s)ds\right)\\
&\quad-\frac{1+1/\beta}{b-a}\left(\int_{t-d(t)}^{t-a}\dot{x}(s)ds\right)^T X\left(\int_{t-d(t)}^{t-a}\dot{x}(s)ds\right)\\
&\quad+\frac{1}{b-a}\begin{bmatrix}\int_{t-b}^{t-d(t)}\dot{x}(s)ds\\ \int_{t-d(t)}^{t-a}\dot{x}(s)ds\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\beta X & -Y\\ -Y^T & \frac{1}{\beta}X\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int_{t-b}^{t-d(t)}\dot{x}(s)ds\\ \int_{t-d(t)}^{t-a}\dot{x}(s)ds\end{bmatrix}\\
&=-\frac{1}{b-a}\begin{bmatrix}\int_{t-b}^{t-d(t)}\dot{x}(s)ds\\ \int_{t-d(t)}^{t-a}\dot{x}(s)ds\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}X & Y\\ Y^T & X\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int_{t-b}^{t-d(t)}\dot{x}(s)ds\\ \int_{t-d(t)}^{t-a}\dot{x}(s)ds\end{bmatrix}\\
&=r.h.s.\quad of(6)\ .
\end{aligned}
$$

이것으로 증명을 마친다. *Box*

이 논문에서 사용되는 기호는 표준적인 것이다. 먼저, $R^n, R^{n\times m}$은 n차원의 실수 벡터, $n\times m$차원의 실수 행렬을 의미하고, $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 나타낸다. 다음으로 대칭행렬 X에 대하여, $X>0$(또는 $X>0$)은 음 확정(또는 양 확정) 행렬을 나타낸다. 끝으로 $0_{n\times m}$, I_n은 $n\times m$ 차원의 영(zero)행렬, $n\times n$ 항등행렬을 나타낸다.

3. 주요 결과

시간지연에 대한 조건(2)를 갖는 시변 시간지연을 갖는 시간지연 선형시스템(1)의 안정성을 보장하는 결과를 LMI로 나타낸 것이 다음의 정리 1이다.

정리 1. 시간지연에 대한 조건 (2)을 갖는 시간지연 시스템 (1)에 대하여, h_0,η_0를 (4)에 정의된 값이라 하자. 다음의 LMI를 동시에 만족하는 대칭 양확정행렬 $P,Q,X_k,H_k\in R^{n\times n}>0,\ R\in R^{nN\times nN}>0, Z\in R^{nM\times nM}>0$, 그리고 일반적 행렬 $Y_k\in R^{n\times n}$이 존재하면

$$\text{(i)}\ \ \Phi_0+\Psi_0+\Phi_k<0, \tag{9}$$

$$\text{(ii)}\ \ \begin{bmatrix}X_k & Y_k\\ Y_k^T & X_k\end{bmatrix}\ge 0, k=1,2,\cdots,N \tag{10}$$

제약 조건 (2)를 갖는 구간 시간지연 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다. 여기서 행렬 Φ_0,Ψ_0,Φ_k 다음으로 정의되며,

$$
\begin{aligned}
\Phi_0 &= v_0^T P\boldsymbol{A}_c+\boldsymbol{A}_c^T P v_{0}+v_0^T Q v_0-(1-\mu)e_d^T Q e_d\\
&\quad+[e_0^T e_1^T\cdots e_{N-1}^T]R[e_0^T e_1^T\cdots e_{N-1}^T]^T\\
&\quad-[e_1^T e_2^T\cdots e_N^T]R[e_1^T e_2^T\cdots e_N^T]^T\\
&\quad+[v_0^T v_1^T\cdots v_{M-1}^T]Z[v_0^T v_1^T\cdots e_{M-1}^T]^T\\
&\quad-[v_1^T v_2^T\cdots v_M^T]Z[v_1^T v_2^T\cdots v_M^T]^T\\
&\quad+h_0\boldsymbol{A}_c^T(\sum_{i=1}^N X_i)\boldsymbol{A}_c+\eta_0\boldsymbol{A}_c^T(\sum_{i=1}^M H_i)\boldsymbol{A}_c\ ,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$\Psi_0=-\frac{1}{\eta_0}\sum_{i=1}^M(v_{i-1}-v_i)^T H_i(v_{i-1}-v_i), \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_k &=-\frac{1}{h_0}\sum_{i=1,i\neq k}^N(e_{i-1}-e_i)^T X_i(e_{i-1}-e_i)\\
&\quad-[e_d^T-e_k^T]\begin{bmatrix}X_k & Y_k\\ Y_k^T & X_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_d-e_k\\ e_{k-1}-e_d\end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

또한 상수행렬 $\boldsymbol{A}_c,v_k,e_k,e_d$는 다음의 값들이다.

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{A}_c=Av_0+A_d e_d\\
v_k^T=[0_{n\times kn}\quad I_n\quad 0_{n\times n(N+M+1-k)}], k=0,1,2,\cdots,M\\
e_k^T=[0_{n\times(M+k)n}\quad I_n\quad 0_{n\times n(N+1-k)}], k=0,1,2,\cdots,N\\
e_d=[0_{n\times n(M+N+1)}\quad I_n].
\end{cases}
\tag{14}
$$

증명. 먼저 (4)에 정의된, $h_0=\frac{h_2-h_1}{N}$, $\eta_0=\frac{h_1}{M}$를 이용하여 다음과 같은 Lyapunov-Krasovskii 후보함수를 생각하자.

$$
\begin{aligned}
V(x_t) &= x^T(t)Px(t)+\int_{t-d(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds\\
&\quad+\int_{t-h_1-h_0}^{t-h_1}\chi_1^T(s)R\ \chi_1(s)ds+\int_{t-\eta_0}^t\chi_2 T(s)Z\ \chi_2(s)ds\\
&\quad+\sum_{i=1}^N\int_{-h_1-ih_0}^{-h_1-(i-1)h_0}\int_{t+s}^t\dot{x}^T(s)X_i\dot{x}(s)dsd\theta\\
&\quad+\sum_{i=1}^M\int_{-i\eta_0}^{-(i-1)\eta_0}\int_{t+s}^t\dot{x}^T(s)H_i\ \dot{x}(s)dsd\theta
\end{aligned}
\tag{15}
$$

여기서 $P>0, Q>0, R>0, Z>0, X_i>0, H_i>0$ 이고

$$
\begin{cases}
\chi_1^T(s)=[x^T(s)\ \ x^T(s-h_0)\ \ x^T(t-2h_0)\ \cdots\ x^T(s-(N-1)h_0)]\\
\chi_2^T(s)=[x^T(s)\ \ x^T(s-\eta_0)\ \ x^T(t-2\eta_0)\ \cdots\ x^T(s-(M-1)\eta_0)].
\end{cases}
$$

다음으로 위에 정의된 L-K 후보함수 (15)에 대하여 시스템 (1)의 궤적에 따른 시간 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) &= 2x^T(t)P\dot{x}(t)+x^T(t)Qx(t)\\
&\quad-[1-\dot{d}(t)]x^T(t-d(t))Qx(t-d(t))\\
&\quad+\chi_1^T(t-h_1)R\chi_1(t-h_1)+\chi_1^T(t-h_1-h_0)R\chi_1(t-h_1-h_0)\\
&\quad+\chi_2^T(t)Z\chi_2(t)-\chi_2^T(t-\eta_0)Z\chi_2(t-\eta_0)\\
&\quad+h_0\sum_{i=1}^N\dot{x}^T(t)X_i\dot{x}(t)+\eta_0\sum_{i=1}^M\dot{x}^T(t)H_i\dot{x}(t)\\
&\quad+V_1(x_t)+V_2(x_t)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

여기서

$$\begin{cases} V_1(x_t) = -\sum_{i=1}^{N}\int_{t-h_1-ih_0}^{t-h_1-(i-1)h_0}\dot{x}^T(s)X_i\dot{x}(s)ds \\ V_2(x_t) = -\sum_{i=1}^{M}\int_{t-i\eta_0}^{t-(i-1)\eta_0}\dot{x}^T(s)H_i\dot{x}(s)ds. \end{cases}$$

다음으로 $\xi_t \in R^{n(N+M+2)}$를 다음과 같이 정의하고

$$\begin{aligned}\xi_t^T := [&x^T(t)\,x^T(t-\eta_0)\;\; x^T(t-2\eta_0)\cdots x^T(t-M\eta_0)\\ &x^T(t-h_1-h_0)\,x^T(t-h_1-2h_0)\;\cdots\; x^T(t-h_1-Nh_0)\\ &x^T(t-d(t))]\end{aligned}$$

(14)에 정의된 상수 행렬 v_i, e_i, e_d를 이용하면 다음이 성립한다.

$$\begin{cases}\xi_t^T[v_0^T v_1^T \cdots v_M^T(=e_0^T)\;\; e_1^T e_2^T \cdots e_N^T\, e_d^T] = \xi_t^T, \\ x^T(t-\eta_M) = \xi_t^T v_M^T = \xi_t^T e_0^T = x^T(t-h_1), \\ x^T(t-h_1-Nh_0) = \xi_t^T e_N^T = x^T(t-h_2).\end{cases}$$

그리고, 시간지연에 대한 조건 (2)와 ξ_t, v_i, e_i, e_d를 이용하여 (16)를 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t) = \xi_t^T\Big\{&2v_0^T P\boldsymbol{A}_c + v_0^T Q v_0 - (1-\mu)e_d^T Q e_d \\ &+ [e_0^T e_1^T \cdots e_{N-1}^T]R[e_0^T e_1^T \cdots e_{N-1}^T]^T \\ &- [e_1^T e_2^T \cdots e_N^T]R[e_1^T e_2^T \cdots e_N^T]^T \\ &+ [v_0^T v_1^T \cdots v_{M-1}^T]Z[v_0^T v_1^T \cdots e_{M-1}^T]^T \\ &- [v_1^T v_2^T \cdots v_M^T]Z[v_1^T v_2^T \cdots v_M^T]^T \\ &+ h_0\boldsymbol{A}_c^T(\sum_{i=1}^{N}X_i)\boldsymbol{A}_c + \eta_0\boldsymbol{A}_c^T(\sum_{i=1}^{M}H_i)\boldsymbol{A}_c\Big\}\xi_t + V_1(x_t) + V_2(x_t) \\ = \xi_t^T&\Phi_0\xi_t + V_1(x_t) + V_2(x_t) \end{aligned} \tag{17}$$

여기서 Φ_0는 (11)에 정의된 행렬이다. 다음으로 V_1, V_2의 상한을 구하자. 먼저 보조정리 1를 이용하면 다음과 같은 V_2의 상한을 얻는다.

$$\begin{aligned}V_2(x_t) &\le -\frac{1}{\eta_0}\xi_t^T\left\{\sum_{i=1}^{M}(v_{i-1}-v_i)^T H_i(v_{i-1}-v_i)\right\}\xi_t \\ &= \xi_t^T\Psi_0\xi_t.\end{aligned} \tag{18}$$

여기서 Ψ_0는 (12)에 정의 된 행렬이다. 그리고 시간 지연 $d(t)$가 N 분할된 부구간 중 k번째, 즉 $d(t)\in[h_1+(k-1)h_0, h_1+kh_0]$ 인 경우 V_1은 다음으로 표시되고

$$\begin{aligned}V_1(x_t) &= -\sum_{i=1}^{N}\int_{t-h_1-ih_0}^{t-h_1-(i-1)h_0}\dot{x}^T(s)X_i\dot{x}(s)ds \\ &= -\sum_{i=1, i\ne k}^{N}\int_{t-h_1-ih_0}^{t-h_1-(i-1)h_0}\dot{x}^T(s)X_i\dot{x}(s)ds \\ &\quad -\sum_{i=k}^{k}\int_{t-h_1-ih_0}^{t-h_1-(i-1)h_0}\dot{x}^T(s)X_i\dot{x}(s)ds \\ &= -\sum_{i=1, i\ne k}^{N}\int_{t-h_1-ih_0}^{t-h_1-(i-1)h_0}\dot{x}^T(s)X_i\dot{x}(s)ds \\ &\quad -\int_{t-h_1-kh_0}^{t-h_1-(k-1)h_0}\dot{x}^T(s)X_k\dot{x}(s)ds\end{aligned}$$

위의 마지막 등식의 첫 번째 항은 보조정리 1을, 두 번째 항은 보조정리 2를 각각 적용하면 다음의 상한을 얻는다.

$$\begin{aligned}V_1(x_t) &\le -\xi_t^T\left\{\frac{1}{h_0}\sum_{i=1, i\ne k}^{N}(e_{i-1}-e_i)^T X_i(e_{i-1}-e_i)\right\}\xi_t \\ &\quad -\xi_t^T\left\{[e_d^T - e_k^T]\begin{bmatrix}X_k & Y_k\\ Y_k^T & X_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_d - e_k\\ e_{k-1}-e_d\end{bmatrix}\right\}\xi_t \\ &= \xi_t^T\Phi_k\xi_t\end{aligned} \tag{19}$$

여기서 Φ_k는 (13)에 정의 된 행렬이다.

다음으로 위에서 유도한 관계식 (18), (19)를 (17)에 적용하면, 시간지연 $d(t)$가 구간 $[h_1, h_2]$을 N 등분한 부구간 중 k번째 부구간에 속하는 경우, 즉 $d(t)\in[h_1+(k-1)h_0, h_1+kh_0]$ 인 경우 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}&\dot{V}(x_t) \le \xi_t^T(\Phi_0+\Psi_0+\Phi_k)\xi_t\ , \quad \text{whenver} \\ &\quad \forall d(t)\in[h_1+(k-1)h_0, h_1+kh_0] \quad \text{and}\begin{bmatrix}X_k & Y_k\\ Y_k^T & X_k\end{bmatrix}\ge 0\end{aligned} \tag{20}$$

또한 위의 (20)은 $\forall k\in[1,N]$에서 성립한다는 사실과 다음의 동치관계로 인하여

$$d(t)\in[h_1,h_2] \Leftrightarrow d(t)\in\cup_{k=1}^{N}[h_1+(k-1)h_0, h_1+kh_0]$$

시간지연 $\forall d(t)\in[h_1,h_2]$ 에 대하여 다음을 얻고

$$\begin{aligned}&\dot{V}(x_t) \le \xi_t^T(\Phi_0+\Psi_0+\Phi_k)\xi_t\ , \quad \text{whenver} \\ &\quad \forall d(t)\in[h_1,h_2] \quad \text{and}\begin{bmatrix}X_k & Y_k\\ Y_k^T & X_k\end{bmatrix}\ge 0\ ,\ \forall k = 1,2,\cdots,N\end{aligned}$$

마지막으로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}&\Phi_0+\Psi_0+\Phi_k < 0, \text{and}\begin{bmatrix}X_k & Y_k\\ Y_k^T & X_k\end{bmatrix}\ge 0\ , \forall k = 1,2,\cdots,N \\ &\Rightarrow \dot{V}(x_t) < 0, \forall \xi_t \ne 0, \forall d(t)\in[h_1,h_2]\end{aligned}$$

따라서 Lyapunov-Krasovskii 안정성 정리[13]로부터 시간지연에 대한 조건 (2)를 갖는 시간 지연 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다. 이것으로 증명을 마친다. *Box*

4. 수치 예제

위에서 제시된 결과의 유용성을 보이기 위해 잘 알려진 두 개의 수치 예제를 제시한다.

예제 1. 다음과 같은 잘 알려진 시간 지연 시스템을 생각하자[6][8][9][12].

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t-d(t)) \\ d(t) \in [h_1, h_2],\ \dot{d}(t) \le \mu, \forall t \ge 0 \end{cases} \tag{21}$$

다음의 표 1은 $\mu \to \infty$으로 주어진 경우, 여러 종류의 하한(h_1)의 크기에 따른 안정성이 보장되는 상한(h_2) 의 크기를 보여주는 비교 결과이다. 이 표 1에서 정리 1의 결과는 두 개의 구간 $[0,h_1],[h_1,h_2]$을 모두 5개의 부구간(즉, $M=N=5$)으로 나누어 적용한 결과이다.

표 1 여러 h_1에 따른 최대 h_2값($\mu \to \infty$)
Table 1 Maximal h_2 for various h_1 when $\mu \to \infty$

methods	$h_1=0.5$	$h_1=1.0$	$h_1=2.0$
Jiang[4]	1.07	1.64	2.39
He[5]	1.09	1.74	2.43
Shao[6]	1.13	1.87	2.50
Sun[9]	1.90	1.90	2.56
Yue[8]	2.11	2.19	2.64
정리 1	**2.20**	**2.28**	**2.78**

이 표 1에서 보듯이 구간 분할을 적용한 Yue[8]의 결과는 구간분할을 적용하지 않은 최근의 결과[4][5][6][9] 보다 우수하며, 또한 정리 1의 결과는 구간분할을 적용한 Yue[8]의 결과보다 우수함을 보인다.

다음으로 $\mu=0.3$ 일 때 하한(h_1)에 따른 안정성을 보장하는 상한(h_2)의 비교 결과가 다음의 표 2이다. 이 표 2의 결과는 표 1과 마찬가지로 $M=N=5$을 사용하였다. 또한 다음의 표 3은 $\mu=0.3$인 경우, (4)에 정의된 구간 분할 개수 (M,N)에 따른 안정도를 보장하는 여러 종류의 하한(h_1)에 따른 상한값(h_2)들이다.

표 2 여러 h_1에 따른 최대 $h_2(\mu=0.3)$
Table 2 Maximal h_2 for various h_1 when $\mu=0.3$

h_1	$h_1=3$	$h_1=4.0$	$h_1=5.0$	$h_1=6.0$
Shao[6]	3.25	4.07	-	-
Sun[9]	3.34	4.18	5.02	-
정리1	**3.49**	**4.29**	**5.14**	**6.01**

표 3 여러 분할 개수에 따른 최대 h_2의 비교($\mu=0.3$)
Table 3 Maximal h_2 for various decomposition($\mu=0.3$)

$h_1 \backslash (M,N)$	(3,3)	(3,5)	(5,3)	(5,5)
2	3.18	3.18	3.20	3.20
3	3.48	3.48	3.49	3.49
4	4.28	4.28	4.29	4.29
5	5.12	5.12	5.14	5.14

위의 표 3은 분할의 개수(M,N)가 증가하면 증가할수록 주어진 하한에 따라 상한의 크기가 증가함을 보여준다.

예제 2. 다음과 같은 잘 알려진 시간 지연 시스템을 생각하자[6][9].

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(t-d(t)) \\ d(t) \in [h_1, h_2],\ \dot{d}(t) \le \mu, \forall t \ge 0 \end{cases} \tag{22}$$

다음의 표 4는 $\mu=0.3$으로 주어진 경우, 여러 종류의 하한에 따른 안정성을 보장하는 상한 크기를 기존의 결과들과 비교한 것이다. 이 표에서 정리1의 결과는 구간분할의 크기를 $M=N=3$으로 한 결과이다.

표 4 여러 h_1에 따른 최대 $h_2(\mu=0.3)$
Table 4 Maximal h_2 for various h_1 when $\mu=0.3$

methods	$h_1=0.3$	$h_1=0.5$	$h_1=1.0$
Shao[6]	2.2224	2.2278	2.2474
Sun[9]	2.2634	2.2858	2.3167
정리 1	**2.4344**	**2.4384**	**2.4447**

마지막으로 다음의 표 3는 $\mu \to \infty$인 경우 시스템의 안정성이 보장되는 최대 h_2를 정리 1을 이용하여 구한 후, 최근의 결과와 비교한 것이다. 이 표에서 정리1의 결과는 구간분할의 크기를 $M=N=3$으로 한 결과이다.

표 5 여러 h_1에 따른 최대 h_2값($\mu \to \infty$)
Table 5 Maximal h_2 for various h_1 when $\mu \to \infty$

methods	$h_1=1$	$h_1=3$	$h_1=5$
Shao[6]	1.6169	3.3894	5.2773
Sun[9]	1.6198	3.3430	5.2970
정리 1	**1.8074**	**3.5195**	**5.3859**

마지막으로 위의 표 1,2,4,5에서 보듯이 새로이 제시된 정리 1의 결과는 최근의 결과[6][9]와 비교할 때, $\mu \to \infty$인 경우와 바운드 된 μ의 경우 모두 개선된 h_2 값을 보여 주고, 또한 표 3에서 보여주듯이 구간분할의 개수가 증가하면 주어진 하한에 따라 안정성을 보장하는 상한의 크기가 증가함을 보여준다. 이들을 종합하면 새로이 제시된 정리 1은 기존의 결과들 보다 매우 유용성함을 보여주는 것이다.

4. 결 론

본 논문에서는 구간 시변 지연을 갖는 시간지연 시스템에 대해서 안정성 문제를 다루었다. 주어진 구간 $[h_1,h_2]$를 균일하게 N개의 부구간으로 나눌 뿐만아니라, 하한 h_1도 균일하게 M개의 부구간으로 나누는 구간분해 방법을 새롭게 채택

하였다. L-K 함수 접근 방법을 이용하였으며, 이의 미분의 상한을 구하는 과정에 분할된 구간 내에 시간지연이 없는 경우는 잘 알려진 Jensen의 부등식을 이용하였고, 반대로 시간지연이 포함된 부 구간에 대하여는 새로이 유도된 부등식을 이용하여 시스템의 안정성이 보장되는 결과를 LMI 형태로 제시하였다. 마지막으로 두 개의 수치 예제를 통하여 새로이 제시된 결과가 기존의 분할을 이용하지 않은 경우나 분할을 이용한 모든 결과보다 우수함을 보였다.

감사의 글

이 논문은 2010년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

[1] E. Fridman and U. Shaked, "A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems", *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 47, pp. 253-270, 2001.

[2] M. Wu, Y. He, J.-H. She and G.-P. Liu, "Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay system", *Automatica,* vol. 40, no. 8, pp.1435-1439, 2004.

[3] Q.-L. Han, "A descriptor system approach to robust stability of uncertain neutral systems with discrete and distributed delays", *Automatica,* vol 40, pp. 1791-1796, 2004.

[4] X. Jiang and Q. L. Han, " On H_∞ control for linear systems with interval time-varying delay", *Automatica,* vol. 41, pp. 2099-2106, 2005.

[5] Y. He, Q.-G. Wang, L. Xie and C. Lin, "Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay", *Automatica,* vol. 43, pp. 371-376, 2007.

[6] H. Shao, "Improved delay-dependent stability criteria for systems with a delay varying in a range", *Automatica,* vol. 44, pp. 3215-3218, 2008.

[7] P. Park and J.W. Ko, "Stability and robust stability for systems with a time-varying delay,

[8] D. Yue, E. Tian and Y. Zhang, A piecewise analysis method to stability analysis of linear continuous/ discrete systems with time-varying delay, *Int. J. of Robust and Nonlinear Contro*l, vol.19, pp. 1493-1518, 2009.

[9] J. Sun, G.-P.. Liu, J. Chen and D. Rees, "Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays", *Automatica,* vol. 46, pp. 466-470, 2010.

[10] X.L. Zhu, G.-H. Yang, "New results of stability analysis for susyems with time-varying delay", *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol.20, pp.596-606, 2010.

[11] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishhnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied mathematics, 1994.

[12] J.-H. Kim, "Note on stability of linear systems with time-varying delay", *Automatica*(will be printed in 2011).

[13] K. Gu, V.L. Kharitonov and J. Chen, *Stability of time-delay systems*, Birkhausser, 2003.

저 자 소 개

김 진 훈 (金 鎭 勳)

1961년 10월 18일생. 1985년 서울대 전기공학과 졸업. 1985년-1986년 신영전기(주) 연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과졸업(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과 졸업(공박). 1993년-1994년 경상대 제어계측공학과 전임강사. 1998년 미국 UCI 방문교수. 2008년 미국 UTA 방문교수. 1995년 – 현재 충북대학교 전자정보대학 교수.

Tel : 043-261-2387

Fax : 043-268-2386.

E-mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr