응용통계연구 (2011)
24(4), 647–656
DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2011.24.4.647

불완비블록계획법을 평가하기 위한 λ행렬

장대흥[1]

[1]부경대학교 통계학과

(2011년 1월 접수, 2011년 3월 채택)

요 약

발생행렬은 블완비블럭계획법을 나타내는 좋은 도구이나 우리가 발생행렬을 이용하여 관심의 대상인 블완비블럭계획법이 균형불완비블럭계획법이 되는 지를 알기는 충분하지 않다. 그래서 필요한 수단이 구조행렬이다. 불완비블럭계획법을 평가하기 위한 또 다른 수단으로서 우리는 확장발생행렬과 λ행렬을 제안할 수 있다. 확장발생행렬과 λ행렬을 통하여 우리는 관심의 대상인 블완비블럭계획법이 균형불완비블럭계획법이 되는 지를 명확히 밝힐 수가 있고, 그 패턴도 상세히 파악할 수 있게 된다.

주요용어: 균형불완비블럭계획법, 확장발생행렬, λ행렬.

1. 서론

처리의 개수가 t이고 블럭의 개수가 b인 블럭계획법에서 한 블럭에 모든 처리를 포함하지 못 하면 불완비블럭계획(IBD; Incomplete Block Design)이 된다. 이러한 IBD가 균형불완비블럭계획법(BIBD; Balanced Incomplete Block Design)이 되려면 다음과 같은 조건들이 만족이 되어야 한다.

1. 모든 블럭에서 k개의 처리가 이루어진다. 즉, 모든 블럭의 크기는 k개로 같다.
2. 각 처리는 r개의 블럭에 나타난다. 즉, 모든 처리의 반복수는 r로 같다.
3. 임의의 두 처리가 동시에 이루어지는 블럭의 수는 λ로 동일하다. 즉, 임의의 두 처리가 같은 블럭에서 만나는 횟수는 λ로 동일하다.

앞으로 이러한 BIBD를 BIBD$(t, b, k, r; \lambda)$로 표기하기로 하자. BIBD에서 다음 관계식이 성립한다.

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{t-1}. \tag{1.1}$$

IBD나 BIBD에 대한 연구는 여러 학자들에 의하여 최근까지도 활발히 연구되고 있다 (예로 Spurrier (2008), Rueda 등 (2009), Shu와 Raghavarao (2010) 등이 있다).

발생행렬(incidence matrix, 결합행렬이라고도 함) N은 $t\times b$ 행렬으로서 각 행은 대응되는 처리를 나타내고 각 열은 대응되는 블럭을 나타낸다. 원소 n_{ij}는 i번째 처리가 j번째 블럭에 있으면 1이고, 없으면 0이 된다. 이 발생행렬은 블완비블럭계획법을 나타내는 좋은 도구이다. 우리는 발생행렬을 통하여 관심의 대상인 IBD가 BIBD가 되기 위한 첫 번째 조건(모든 블럭의 크기는 k개로 같다)과 두 번째 조건(모든 처리의 반복수는 r로 같다)을 만족하는 지를 확인할 수가 있다. 그러나 우리가 발생행렬을 통하여 관

[1](608-737) 부산광역시 남구 대연3동 599-1, 부경대학교 통계학과, 교수. E-mail: dhjang@pknu.ac.kr

심의 대상인 IBD가 BIBD가 되기 위한 첫 번째 조건과 두 번째 조건을 만족하는 지를 좀 더 확실히 확인하기 위해서는 2절에서 언급할 확장발생행렬이 좋은 도구가 될 수 있다.

확장발생행렬을 통해서는 임의의 두 처리가 같은 블럭에서 만나는 횟수가 λ로 동일한 지를 확인하기가 어렵다. 특히 블럭의 개수나 처리의 개수가 큰 경우는 더욱 그렇다. 이 때 발생행렬로부터 얻게 되는 구조행렬(structural matrix) $S = NN'$을 통하여 우리는 임의의 두 처리가 같은 블럭에서 몇 번 만나는 지를 알 수 있게 된다. BIBD에서는 구조행렬이 다음과 같이 나타내어진다. 즉, 대각선 원소들은 모두 r이 되고 비대각선 원소들은 모두 λ가 된다.

$$S = NN' = (r - \lambda)I + \lambda J$$

여기서, I는 항등행렬이고 J는 모든 원소가 1인 정방행렬이다.

구조행렬을 통하여 우리는 임의의 두 처리가 같은 블럭에서 몇 번 만나는 지는 알 수 있게 되나 임의의 두 처리가 만나는 블럭을 확인할 수는 없다. 그러므로 임의의 두 처리가 같은 블럭에서 몇 번 만나는 지도 알 수 있고 임의의 두 처리가 만나는 블럭도 확인할 수 있는 수단이 필요하다. 이러한 기능을 하는 행렬이 2절에서 언급할 λ행렬이다. 우리는 이러한 λ행렬을 이용하면 임의의 두 처리가 같은 블럭에서 만나는 횟수가 λ로 동일한 지를 확인할 수가 있고, 임의의 두 처리가 만나는 블럭도 확인할 수가 있다. 그러므로 확장발생행렬과 λ행렬을 이용하면 우리는 관심의 대상인 IBD가 BIBD가 되는 지를 밝힐 수가 있고 그 패턴도 상세히 파악할 수 있게 된다.

본 논문에서는 2절에서 불완비블럭계획법을 평가하기 위한 방법으로서 확장발생행렬과 λ행렬에 대하여 언급하고 3절에서 예들을 보이고 4절에서 결론을 내렸다.

2. 확장발생행렬과 λ행렬

우리가 발생행렬을 통하여 관심의 대상인 IBD가 BIBD가 되기 위한 첫 번째 조건(모든 블럭의 크기는 k개로 같다)과 두 번째 조건(모든 처리의 반복수는 r로 같다)을 만족하는 지를 좀 더 확실히 확인하기 위해서는 발생행렬 주위(오른쪽과 아래쪽)에 각 행들과 열들의 합들을 각각 나타내면 된다. 이러한 행렬을 확장발생행렬이라 부르자. 이러한 확장발생행렬을 통하여 우리는 관심의 대상인 IBD가 BIBD가 되기 위한 첫 번째 조건과 두 번째 조건을 만족하는 지를 좀 더 확실히 확인할 수 있다.

λ행렬은 $t \times t$ 행렬로서 각 행과 각 열은 대응되는 처리를 나타낸다. 우리는 확장발생행렬로부터 손쉽게 λ행렬을 다음과 같은 방법으로 만들 수 있다.

1. λ행렬에서 하삼각행렬은 구조행렬을 그대로 표시한다.
2. λ행렬에서 대각선 원소를 제외한 상삼각행렬에서는 i번째 행에 대응되는 i번째 처리와 j번째 열에 대응되는 j번째 처리가 만나는 블럭을 λ행렬의 (i, j) 칸에 모두 표시한다($i < j$).

이렇게 구한 λ행렬을 이용하면 임의의 두 처리가 같은 블럭에서 만나는 횟수 λ를 알 수가 있게 된다. 이런 연유로 λ행렬이라는 명칭을 붙였다. 또한, 임의의 두 처리가 만나는 블럭도 확인할 수가 있다.

$T = N'N$이라 하자. 그러면 T행렬의 대각선원소들이 모두 같은 값일 때 이 값이 k가 된다. 확장발생행렬과 T행렬을 통해서는 BIBD가 되기 위한 첫 번째 조건과 두 번째 조건을 확인할 수가 있고, λ행렬을 통해서는 BIBD가 되기 위한 세 번째 조건을 확인할 수가 있다. 물론, 확장발생행렬을 통해서도 BIBD가 되기 위한 세 번째 조건을 확인할 수가 있고 λ행렬과 T행렬을 통해서도 BIBD가 되기 위한 첫 번째 조건과 두 번째 조건을 확인할 수가 있으나 우리는 확장발생행렬과 T행렬을 통해서는 모든 블럭의 크기와 모든 처리의 반복수를 한 눈에 확인할 수가 있고, λ행렬을 통하여 임의의 두 처리가 같은 블럭에

서 만나는 횟수 λ를 한 눈에 확인할 수가 있다. 또한, λ행렬을 통해서는 임의의 두 처리가 만나는 블럭도 확인할 수가 있다.

BIBD에 대한 모형식을 우리는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y_{ijl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ijl}, \tag{2.1}$$

여기서 $i = 1, 2, \ldots, t$; $j = 1, 2, \ldots, b$; $l = n_{ij}$(0 또는 1)이고, τ는 처리효과, β는 블럭효과, ϵ은 오차항이다. 그러면 처리 모평균 추정값, 수정된 처리제곱합, 처리 모평균 추정값에 대한 분산, 처리 모평균 차 추정값에 대한 분산은 각각 다음과 같이 구해진다 (Hinkelmann과 Kempthorne, 2008).

$$\hat{\tau}_i = \frac{k}{\lambda t}\left(T_{i..} - \frac{1}{k}\sum_j n_{ij}T_{.j.}\right) \tag{2.2}$$

$$\mathrm{SS}_{trt(adj.)} = \frac{k}{\lambda t}\sum_i\left(T_{i..} - \frac{1}{k}\sum_j n_{ij}T_{.j.}\right)^2 \tag{2.3}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\tau}_i) = \frac{k(t-1)}{\lambda t^2}\sigma_\epsilon^2 \tag{2.4}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}) = \frac{2k}{\lambda t}\sigma_\epsilon^2 = \frac{2}{r-(r-\lambda)/k}\sigma_\epsilon^2 = \frac{2}{rE}\sigma_\epsilon^2, \tag{2.5}$$

여기서 σ_ϵ^2은 오차항의 분산, $T_{i..}$는 i번째 처리에 있는 r개의 데이터의 합, $T_{.j.}$는 j번째 블럭에 있는 k개의 데이터의 합, 그리고 $E = t(k-1)/\{k(t-1)\}$(효율인자(efficiency factor))라 부름)이다. 식 (2.2)–(2.5)에서 보는 바와 같이 BIBD를 사용한 분산분석시 λ는 매우 중요한 역할을 수행하게 된다. 특히 처리효과의 대비(contrast)에 대한 추정과 검정에 중요한 역할을 한다.

우리는 λ행렬에 나타나는 정보를 이용하여 처리효과의 대비에 대한 추정/검정을 행할 수 있을 뿐만이 아니라 관심의 대상인 IBD가 BIBD가 되는 지를 밝힐 수 있고 BIBD 외에 부분적 균형불완비블럭계획법(PBIBD; Partially Balanced Incomplete Block Design), 그룹분류가능계획법(GD; Group-divisible Design), 순환계획법(CD; Cyclic Design) 등을 밝힐 수 있다. PBIBD에서는 λ행렬을 통하여 처리들 사이의 동반관계(association scheme)를 알아낼 수 있다.

GD에서 동반분류(associated class)가 2인 경우 처리 i와 i'가 1차 동반관계에 있으면 처리 모평균 차 추정값에 대한 분산은 다음과 같이 구해지고

$$\mathrm{Var}(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}) = \frac{2k}{r(k-1)+\lambda_1}\sigma_\epsilon^2 \tag{2.6}$$

처리 i와 i'가 2차 동반관계에 있으면 처리 모평균 차 추정값에 대한 분산은 다음과 같이 구해지므로 GD에서도 λ(λ_1과 λ_2)는 중요한 역할을 수행하게 된다 (Hinkelmann과 Kempthorne, 2008).

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}\right) = \frac{2k}{r(k-1)+\lambda_1}\sigma_\epsilon^2\left(1 + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{t\lambda_2}\right). \tag{2.7}$$

3. 수치 예

관심의 대상인 IBD가 BIBD가 되는 지를 밝히기 위하여 우리가 확장발생행렬, T행렬, λ행렬을 어떻게 이용할 수 있는 지를 보기 위하여 예들을 들어보기로 하자. 여러 종류의 IBD를 다루기 위하여 총 8가지 예들을 고려하였다. 다음 예들은 이우선 (1998), Dean과 Voss (1999), Hinkelmann과 Kempthorne (2008), 박성현 (2009), Onyiah (2009)의 책들에서 인용한 IBD들이다.

예제 3.1: 건초를 만드는 풀을 대상으로 다섯 종류의 비료를 비교하고자 한다. 실험을 위하여 10개의 블럭을 선택하였다. 각 블럭에서 다섯 종류의 비료 중 세 종류의 비료만을 적용하였다. 특성값은 추수한 건초의 무게이다. 다음 표 3.1은 이 실험에 대한 결과이다.

앞의 자료표를 이용하면 다음과 같은 발생행렬 N_1과 확장발생행렬 A_1을 구할 수 있다. 발생행렬에서 각 행은 대응되는 처리를, 각 열은 대응되는 블럭을 나타낸다.

$$\mathbf{N_1} = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A_1} = \left(\begin{array}{c|c} 1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1 & 6 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,1 & 6 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0 & 6 \\ 1\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0 & 6 \\ 1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1 & 6 \\ \hline 3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3 & \end{array}\right).$$

확장발생행렬 A_1을 이용하면 대응되는 λ행렬 Λ_1을 구할 수 있다. 확장발생행렬과 λ행렬을 이용하면 $t = 5$, $b = 10$, $k = 3$, $r = 6$, $\lambda = 3$임을 알 수 있다. 따라서 이 IBD가 BIBD(5, 10, 3, 6; 3)임을 알 수 있다.

$$\mathbf{\Lambda_1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & \{3,6,10\} & \{4,6,7\} & \{1,3,7\} & \{1,4,10\} \\ 3 & 6 & \{6,8,9\} & \{2,3,9\} & \{2,8,10\} \\ 3 & 3 & 6 & \{5,7,9\} & \{4,5,8\} \\ 3 & 3 & 3 & 6 & \{1,2,5\} \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

참고로 구조행렬과 T행렬을 구해보면 다음과 같다.

$$\mathbf{S_1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{T_1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

예제 3.2: 어떤 IBD의 발생행렬이 다음과 같은 N_2일 때 우리는 이 발생행렬을 이용하여 확장발생행렬 A_2와 대응되는 λ행렬 Λ_2를 구할 수 있다. 확장발생행렬과 λ행렬을 이용하면 이 IBD가 BIBD(7, 7, 3, 3; 1)임을 알 수 있다.

표 **3.1.** 건초 실험

비료의 종류	블럭									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2.41		4.33	4.57		2.32	4.87			5.47
2		2.82	4.92			2.61		3.22	4.32	4.95
3				4.10	4.67	3.14	5.27	5.81	6.11	
4	5.44	6.10	7.03		3.82		6.88		6.43	
5	4.17	5.55		5.67	5.67			4.07		6.54

$$\mathbf{N_2} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,1\,1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \left(\begin{array}{c|c} 1\,0\,0\,0\,1\,0\,1 & 3 \\ 1\,1\,0\,0\,0\,1\,0 & 3 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,0\,1 & 3 \\ 1\,0\,1\,1\,0\,0\,0 & 3 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,0\,0 & 3 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1\,0 & 3 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,1\,1 & 3 \\ \hline 3\,3\,3\,3\,3\,3\,3 & \end{array}\right), \quad \mathbf{\Lambda_2} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & \{1\} & \{7\} & \{1\} & \{5\} & \{5\} & \{7\} \\ 1 & 3 & \{2\} & \{1\} & \{2\} & \{6\} & \{6\} \\ 1 & 1 & 3 & \{3\} & \{2\} & \{3\} & \{7\} \\ 1 & 1 & 1 & 3 & \{4\} & \{3\} & \{4\} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & \{5\} & \{4\} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & \{6\} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

이 IBD에서 특정 블럭이 제거되면 어떤 현상이 일어나는 지를 우리는 λ행렬에서 쉽게 알 수 있다. 예로 7번 블럭이 제거되어 발생행렬이 N_3로 바뀌면 확장발생행렬이 A_3로, λ행렬도 Λ_3로 바뀐다. Λ_2과 Λ_3를 비교해 보면 Λ_3는 Λ_2에서 7번 블럭을 제거하기만 하면 된다. 7번 블럭이 제거되면 확장발생행렬 A_3와 λ행렬 Λ_3에서 보는 것처럼 7번 블럭이 제거된 IBD는 더 이상 BIBD가 되지 못함을 알 수 있다.

$$\mathbf{N_3} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \left(\begin{array}{c|c} 1\,0\,0\,0\,1\,0 & 2 \\ 1\,1\,0\,0\,0\,1 & 3 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,0 & 2 \\ 1\,0\,1\,1\,0\,0 & 3 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,0 & 3 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1 & 3 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,1 & 2 \\ \hline 3\,3\,3\,3\,3\,3 & \end{array}\right), \quad \mathbf{\Lambda_3} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & \{1\} & & \{1\} & \{5\} & \{5\} & \\ 1 & 3 & \{2\} & \{1\} & \{2\} & \{6\} & \{6\} \\ 0 & 1 & 2 & \{3\} & \{2\} & \{3\} & \\ 1 & 1 & 1 & 3 & \{4\} & \{3\} & \{4\} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & \{5\} & \{4\} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & \{6\} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

예제 3.3: 어떤 IBD의 발생행렬이 다음과 같은 N_4일 때 우리는 이 발생행렬을 이용하여 확장발생행렬 A_4와 대응되는 λ행렬 Λ_4를 구할 수 있다. 확장발생행렬과 λ행렬을 이용하면 이 IBD가 BIBD(5, 10, 3, 6; 3)임을 알 수 있다.

$$\mathbf{N_4} = \begin{pmatrix} 1\;1\;1\;1\;1\;1\;0\;0\;0\;0 \\ 1\;1\;1\;0\;0\;0\;1\;1\;1\;0 \\ 1\;0\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;0\;1 \\ 0\;1\;0\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;1 \\ 0\;0\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A_4} = \left(\begin{array}{c|c} 1\;1\;1\;1\;1\;1\;0\;0\;0\;0 & 6 \\ 1\;1\;1\;0\;0\;0\;1\;1\;1\;0 & 6 \\ 1\;0\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;0\;1 & 6 \\ 0\;1\;0\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;1 & 6 \\ 0\;0\;1\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;1 & 6 \\ \hline 3\;3\;3\;3\;3\;3\;3\;3\;3\;3 & \end{array}\right),$$

$$
\mathbf{\Lambda_4} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
6 & \{1,2,3\} & \{1,4,5\} & \{2,4,6\} & \{3,5,6\} \\
3 & 6 & \{1,7,8\} & \{2,7,9\} & \{3,8,9\} \\
3 & 3 & 6 & \{4,7,10\} & \{5,8,10\} \\
3 & 3 & 3 & 6 & \{6,9,10\} \\
3 & 3 & 3 & 3 & 6
\end{pmatrix} \end{array}.
$$

예제 3.4: 어떤 IBD의 발생행렬이 다음과 같은 N_5일 때 우리는 이 발생행렬을 이용하여 확장발생행렬 A_5와 대응되는 λ행렬 Λ_5를 구할 수 있다. 확장발생행렬과 λ행렬을 이용하면 이 IBD가 PBIBD(6, 6, 3, 3; 2, 1)이면서 그룹분류가능계획법임을 알 수 있다. 즉, $\lambda_1 = 2$이고 $\lambda_2 = 1$이어서 동반분류가 2가 된다. 이를 통하여 처리들 사이의 동반관계를 알 수 있다. 6개의 처리를, 처리가 각각 두 개인 3개의 그룹 (1, 2), (3, 4), (5, 6)으로 나눌 수 있다. 같은 그룹에 속하는 처리끼리는 1차 동반관계($\lambda_1 = 2$)를 갖고, 다른 그룹에 속하는 처리끼리는 2차 동반관계($\lambda_2 = 1$)를 갖는다. $\lambda_1 = 2$가 $\lambda_2 = 1$보다 크므로 식 (2.3)과 (2.4)를 이용하여 두 처리간 차이에 대한 분산을 구해보면 1차 동반관계($\lambda_1 = 2$)를 갖는 두 처리간 차이에 대한 분산이 2차 동반관계($\lambda_2 = 1$)를 갖는 두 처리간 차이에 대한 분산보다 $1/6\,\sigma_\epsilon^2$만큼 더 작음을 알 수 있다.

$$
\mathbf{N_5} = \begin{pmatrix}
1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1
\end{pmatrix}, \quad
\mathbf{A_5} = \left(\begin{array}{c|c}
1\,0\,0\,1\,0\,1 & 3 \\ 1\,0\,1\,1\,0\,0 & 3 \\ 1\,1\,0\,0\,1\,0 & 3 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,0 & 3 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,1 & 3 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1 & 3 \\ \hline 3\,3\,3\,3\,3\,3 &
\end{array}\right), \quad
\mathbf{\Lambda_5} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
3 & \{1,4\} & \{1\} & \{4\} & \{6\} & \{6\} \\
2 & 3 & \{1\} & \{4\} & \{3\} & \{3\} \\
1 & 1 & 3 & \{2,5\} & \{2\} & \{5\} \\
1 & 1 & 2 & 3 & \{2\} & \{5\} \\
1 & 1 & 1 & 1 & 3 & \{3,6\} \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3
\end{pmatrix} \end{array}.
$$

예제 3.5: 어떤 IBD의 발생행렬이 다음과 같은 N_6일 때 우리는 이 발생행렬을 이용하여 확장발생행렬 A_6와 대응되는 λ행렬 Λ_6를 구할 수 있다. 확장발생행렬과 λ행렬을 이용하면 이 IBD가 PBIBD(6, 9, 2, 3; 1, 0)이면서 그룹분류가능계획법임을 알 수 있다. 즉, $\lambda_1 = 1$이고 $\lambda_2 = 0$이어서 동반분류가 2가 된다. 이를 통하여 처리들 사이의 동반관계를 알 수 있다. 6개의 처리를, 처리가 각각 세 개인 2개의 그룹 (1, 2, 3), (4, 5, 6)으로 나눌 수 있다.

$$
\mathbf{N_6} = \begin{pmatrix}
1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1
\end{pmatrix}, \quad
\mathbf{A_6} = \left(\begin{array}{c|c}
1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 3 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0 & 3 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1 & 3 \\ 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0 & 3 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0 & 3 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1 & 3 \\ \hline 2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2 &
\end{array}\right), \quad
\mathbf{\Lambda_6} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
3 & & & \{1\} & \{2\} & \{3\} \\
0 & 3 & & \{4\} & \{5\} & \{6\} \\
0 & 0 & 3 & \{7\} & \{8\} & \{9\} \\
1 & 1 & 1 & 3 & & \\
1 & 1 & 1 & 0 & 3 & \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3
\end{pmatrix} \end{array}.
$$

예제 3.6: 어떤 IBD의 발생행렬이 다음과 같은 N_7일 때 우리는 이 발생행렬을 이용하여 확장발생행렬 A_7과 대응되는 λ행렬 Λ_7을 구할 수 있다. 확장발생행렬과 λ행렬을 이용하면 이 IBD가 PBIBD(12, 6, 6, 3; 3, 1)이면서 그룹분류가능계획법임을 알 수 있다. 즉, $\lambda_1 = 3$이고 $\lambda_2 = 1$이어서 동반분류가 2가 된다. 이를 통하여 처리들 사이의 동반관계를 알 수 있다. 12개의 처리를, 처리가 각각 세 개인 4개의 그룹 (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (10, 11, 12)으로 나눌 수 있다.

$$\mathbf{N_7} = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0 \\ 1&0&0&1&1&0 \\ 1&0&0&1&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A_7} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&0&0&0&3 \\ 1&1&1&0&0&0&3 \\ 1&1&1&0&0&0&3 \\ 1&0&0&1&1&0&3 \\ 1&0&0&1&1&0&3 \\ 1&0&0&1&1&0&3 \\ 0&1&0&1&0&1&3 \\ 0&1&0&1&0&1&3 \\ 0&1&0&1&0&1&3 \\ 0&0&1&0&1&1&3 \\ 0&0&1&0&1&1&3 \\ 0&0&1&0&1&1&3 \\ \hline 6&6&6&6&6&6& \end{array}\right),$$

$$\mathbf{\Lambda_7} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12 \end{array} & \begin{pmatrix} 3&\{1,2,3\}&\{1,2,3\}&\{1\}&\{1\}&\{1\}&\{2\}&\{2\}&\{2\}&\{3\}&\{3\}&\{3\} \\ 3&3&\{1,2,3\}&\{1\}&\{1\}&\{1\}&\{2\}&\{2\}&\{2\}&\{3\}&\{3\}&\{3\} \\ 3&3&3&\{1\}&\{1\}&\{1\}&\{2\}&\{2\}&\{2\}&\{3\}&\{3\}&\{3\} \\ 1&1&1&3&\{1,4,5\}&\{1,4,5\}&\{4\}&\{4\}&\{4\}&\{5\}&\{5\}&\{5\} \\ 1&1&1&3&3&\{1,4,5\}&\{4\}&\{4\}&\{4\}&\{5\}&\{5\}&\{5\} \\ 1&1&1&3&3&3&\{4\}&\{4\}&\{4\}&\{5\}&\{5\}&\{5\} \\ 1&1&1&1&1&1&3&\{2,4,6\}&\{2,4,6\}&\{6\}&\{6\}&\{6\} \\ 1&1&1&1&1&1&3&3&\{2,4,6\}&\{6\}&\{6\}&\{6\} \\ 1&1&1&1&1&1&3&3&3&\{6\}&\{6\}&\{6\} \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&3&\{3,5,6\}&\{3,5,6\} \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&3&3&\{3,5,6\} \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&3&3&3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

예제 3.7: 어떤 IBD의 발생행렬이 다음과 같은 N_8일 때 우리는 이 발생행렬을 이용하여 확장발생행렬 A_8와 대응되는 λ행렬 Λ_8를 구할 수 있다. 확장발생행렬과 λ행렬을 이용하면 이 IBD가 BIBD(7, 7, 4, 4; 2)이면서 순환계획법임을 알 수 있고 $\lambda = 2$임을 알 수 있다.

$$\mathbf{N_8} = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&1&1 \\ 1&1&0&1&0&0&1 \\ 1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&1&0&1 \\ 1&0&0&1&1&1&0 \\ 0&1&0&0&1&1&1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A_8} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1&0&1&0&0&1&1&4 \\ 1&1&0&1&0&0&1&4 \\ 1&1&1&0&1&0&0&4 \\ 0&1&1&1&0&1&0&4 \\ 0&0&1&1&1&0&1&4 \\ 1&0&0&1&1&1&0&4 \\ 0&1&0&0&1&1&1&4 \\ \hline 4&4&4&4&4&4&4& \end{array}\right),$$

$$\mathbf{\Lambda_8} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & \{7,1\} & \{1,3\} & \{3,6\} & \{3,7\} & \{1,6\} & \{7,6\} \\ 2 & 4 & \{1,2\} & \{2,4\} & \{4,7\} & \{4,1\} & \{2,7\} \\ 2 & 2 & 4 & \{2,3\} & \{3,5\} & \{5,1\} & \{5,2\} \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \{3,4\} & \{4,6\} & \{6,2\} \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & \{4,5\} & \{5,7\} \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & \{5,6\} \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

예제 3.8: 어떤 IBD의 발생행렬이 다음과 같은 N_9일 때 우리는 이 발생행렬을 이용하여 확장발생행렬 A_9과 대응되는 λ행렬 Λ_9을 구할 수 있다. 발생행렬 N_9을 보면 블럭의 패턴이 3의 사이클을 이루며 반복되고 있음을 알 수 있다. λ행렬의 (i,j) 칸에 블럭을 모두 표시하기에는 공간의제약이 있으므로 λ행렬에서 $b1 = \{1,4,7,10,13,16\}$, $b2 = \{2,5,8,11,14,17\}$, $b3 = \{3,6,9,12,15,18\}$라는 심볼을 이용하였다. 확장발생행렬과 λ행렬을 이용하면 이 IBD가 PBIBD$(6,18,4,12;12,6)$가 됨을 알 수 있다. 6개의 처리를, 처리가 각각 세 개인 2개의 그룹 $(1,2,3)$, $(4,5,6)$으로 나눌 수 있다.

$$\mathbf{N_9} = \begin{pmatrix} 110110110110110110 \\ 101101101101101101 \\ 011011011011011011 \\ 011011011011011011 \\ 101101101101101101 \\ 110110110110110110 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A_9} = \left(\begin{array}{c|c} 110110110110110110 & 12 \\ 101101101101101101 & 12 \\ 011011011011011011 & 12 \\ 011011011011011011 & 12 \\ 101101101101101101 & 12 \\ 110110110110110110 & 12 \\ \hline 444444444444444444 & \end{array}\right),$$

$$\mathbf{\Lambda_9} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12 & b1 & b2 & b2 & b1 & b1,b2 \\ 6 & 12 & b3 & b3 & b1,b3 & b1 \\ 6 & 6 & 12 & b2,b3 & b3 & b2 \\ 6 & 6 & 12 & 12 & b3 & b2 \\ 6 & 12 & 6 & 6 & 12 & b1 \\ 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. 결론

관심의 대상인 불완비블럭계획이 균형불완비블럭계획법이 되기 위한 첫 번째 조건(모든 블럭의 크기는 k개로 같다.)과 두 번째 조건(모든 처리의 반복수는 r로 같다.)을 만족하는 지를 좀 더 확실히 확인하기 위해서는 발생행렬을 확장한 확장발생행렬이 유용한 수단이 될 수 있다. 확장발생행렬과 더불어 λ행렬을 이용하면 우리는 관심의 대상인 블완비블럭계획법이 균형불완비블럭계획법이 되는 지를 밝힐 수 있다. λ행렬을 통하여 관심의 대상인 불완비블럭계획이 균형불완비블럭계획법이 되기 위한 세 번째 조건(임의의 두 처리가 같은 블럭에서 만나는 횟수가 λ로 동일하다.)을 만족하는 지를 확인할 수가 있고, 임의의 두 처리가 만나는 블럭도 확인할 수가 있다. 그러므로 확장발생행렬과 λ행렬을 이용하면 우리는 관심의 대상인 블완비블럭계획법이 균형불완비블럭계획법이 되는 지를 밝힐 수가 있고 그 패턴도 상세히 파악할 수 있게 된다.

참고문헌

박성현 (2009). <개정판 현대실험계획법>, 민영사, 서울.

이우선 (1998). <최신실험설계>, 영풍문고, 서울.

Dean, A. and Voss, D. (1999). *Design and Analysis of Experiments*, Springer, New York.

Hinkelmann, K. and Kempthorne, O. (2008). *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, Hoboken.

Onyiah, L. (2009). *Design and Analysis of Experiments*, CRC Press, Boca Raton.

Rueda, D. R., Cotta, C. and Fernandez, A. (2009). Finding balanced incomplete block designs with metaheuristics, *EvoCOP 2009, LNCS 5482*, 156–167.

Shu, X. and Raghavarao, D. (2010). Balanced and partially balanced incomplete block designs with autocorrelation errors, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**, 3230–3235.

Spurrier, J. (2008). A-optimal and MV-optimal incomplete block designs for comparing successive treatments, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **37**, 1996–2009.

λ Matrix for Evaluating an Incomplete Block Design

Dae-Heung Jang[1]

[1]Department of Statistics, Pukyong National University

(Received January 2011; accepted March 2011)

Abstract

Incidence matrix is a useful tool for presenting incomplete block designs; however, it is inadequate to use only an incidence matrix in examining whether a certain incomplete block design becomes a balanced incomplete block design or not. We can use a structural matrix as a useful tool to show whether a certain incomplete block design becomes a balanced incomplete block design or not. We propose an augmented incidence matrix and λ matrix as another tools for evaluating incomplete block designs. Through the augmented incidence matrix and λ matrix, we can ascertain whether a certain incomplete block design becomes a balanced incomplete block design or not.

Keywords: Balanced incomplete block design, augmented incidence matrix, λ matrix.

[1]Professor, Department of Statistics, Pukyong National University, 599-1 Daeyeon-dong, Nam-gu, Busan 608-737, Korea. E-mail: dhjang@pknu.ac.kr