

보험위험 확률모형에서의 파산확률

박현숙¹ · 최정규²

¹한림대학교 금융정보통계학과, ²한림대학교 금융정보통계학과

(2011년 4월 접수, 2011년 6월 채택)

요약

본 연구는 보험산업에서 관심을 갖는 파산확률의 근사적 추이를 살펴보기 위하여 크레임의 분포가 정규변동성 성질을 갖는 사례를 통하여 파산가능성의 추이를 살펴보고, 정확한 파산확률 유도에 결정적인 역할을 하는 계수를 추정하는 실증연구에 초점을 둔다. 추정된 결정계수와 보험위험 확률모형의 안전지수와의 연관성을 분석하여 파산확률의 추이를 진단하는 방법도 함께 진행된다.

주요어: 보험위험 확률모형, 파산확률, 정규변동성, 레비확률과정.

1. 서론

보험회사 입장에서는 보험료 지급에 있어서 손실을 최소화하기 위해 자사 위험도의 추세를 설명하는 모형이 필요하고, 이러한 모형으로 부터 금융위기 및 자연재해 등의 영향으로 빚어질 위험(risk) 정도를 미리 예측 가능하도록 하는 점에 관심을 갖는다. 본 연구는 보험위험 확률과정을 레비확률과정으로 고려하여 레비가 갖는 샘플패스의 성질 규명을 기반으로 얻어진 이론결과를 토대로 한다. 보험산업에서 발생하는 빅크레임(big-claims) 사건이 실제 보험 자료에서 관측되어진다는 면에서 레비 확률과정을 고려하는 것은 현실적으로 타당하다고 본다.

보험회사에서 가장 관심을 두는 것은 언제 파산이 일어나는가에 관한 것이다. 이러한 연구는 크게 크레머(Cramér)와 난크레머(non-Cramér) 접근방법으로 나눌 수 있으며, 크레머 접근방법은 Bertoin과 Doney (1994)의 결과가 대표적이다. 그들은 레비의 멱지수(Lévy exponent)를 0으로 만드는 크레머 멱계수(Cramér coefficient)가 존재함을 보였다. 난크레머 접근방법은 이러한 크레머 멱계수가 존재하지 않는 경우로써 빅크레임의 발생을 가정할 때에, 이들의 분포가 두터운 꼬리 분포(heavy tailed distribution)를 갖는 문제에 접근하는 방식이다.

보험위험 확률과정을 레비확률과정으로 고려하는 연구 동향은 레비 확률과정의 업워드 점프(upward jumps)가 큰 경우에 집중되어 있는데, 이를 반영하기 위하여 연구자들은 크레임의 분포가 두터운 꼬리를 갖는 분포로 가정되는 이론연구에 집중하고 있다. 다시 표현하자면 난크레머 접근 방법을 통한 연구가 활발히 진행되고 있다. 파산확률과 밀접하게 관련된 변수(quantities)들을 살펴보면, 파산시점(first passage time), 오버슈트(overshoots at first passage), 언더슈트(undershoots at first passage), 파산이 일어나는 직전에서의 패스의 최대값(the last maximum before ruin)과 그 시점(time of the last maximum at first passage) 등이 있는데, 이들의 성질을 규명하는 대표적 연구는 Bertoin과 Doney (1994),

본 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임(No. NRF 2010-0007290).

¹교신저자: (200-702) 춘천시 옥천동, 한림대학교 금융정보통계학과, 부교수. E-mail: hspark@hallym.ac.kr

Dickson과 Hipp (2001), Tang과 Tsitsiashvili (2003), Klüppelberg 등 (2004), Doney와 Kyprianou (2006), Park과 Maller (2008), 그리고 Park (2010, 2011) 등에서 찾아볼 수 있다.

본 연구에서는 자연재해나 금융위기에 의해 발생 가능한 빅크레임의 가정하에 보험회사의 초기자본금이 증가할수록 파산확률의 근사적 추이가 어떻게 변화되는지를 살펴보기 위한 실증연구에 초점을 둔다. 이를 위하여 크레임의 분포가 열지수 분포(subexponential distribution)의 성질을 갖는 가정하에 Park (2010)의 유한시간대에서 얻어진 근사적인 파산확률(approximate ruin probability)과 본 연구에서 고려하는 크레임의 분포가 정규변동성(regular variation) 성질을 갖는 경우에서 정확히 계산되는 파산확률(exact ruin probability)의 근사적 추이를 비교한다. Bingham 등 (1987)에서 알려져 있듯이, 열지수 분포족은 정규변동성 성질을 갖는 분포족을 포함하므로 꼬리가 긴 크레임 분포로써 지수분포와 역정규 분포를 이용한 모의실험을 통하여 파산확률의 근사적 추이를 살펴본다. 정규변동성 분포족의 정의, 몇 가지 분포족들의 관계, 그리고 몇 가지 기호(notations)를 2장에서 간략히 설명하고, 파산확률의 근사적 비교를 위한 연구방법은 3장에서 다룬다.

자본금이 충분하여도 보험회사의 리스크에 영향을 주는 몇 가지 주요요인들이 있다. 예를들면, 보험자금의 흐름에 영향을 주는 안전지수(safety premium)와 정규변동성 성질을 갖는 크레임의 적률생성 함수와 연계된 결정계수 등. 이들의 관계를 모의실험을 통하여 어떻게 움직이는지를 규명하여, 연관성에 따라 파산확률이 설명되어진다는 점도 3장에서 살펴보고자 한다. 본 논문의 결과가 기여하는 점을 요약하면 다음과 같다.

1. 레비확률과정의 적률생성함수가 유한하다는 조건에서 유도된 정확히 계산된 파산확률 제안.
2. 크레임의 분포가 정규변동성 분포족에 속하는 경우, 초기자산이 증가함에 따른 근사적 파산확률과 정확한 파산확률과의 추이(behavior) 비교를 위한 모의실험.
3. 정확히 계산된 파산확률은 크레임 확률변수의 적률생성함수의 인덱스에 직접적인 영향을 받게 되는데, 모의실험을 통하여 그 정도를 확인, 그리고 인덱스와 제안된 보험위험 확률과정의 안전지수(safety premium)와의 연관성(relationship) 분석.

지금의 흐름과 몇 가지 지수값들과의 연관성이 있다는 점을 파악하는 것은 보험회사 입장에서 중요하다. 어느 시기에 파산가능성이 커질지를 관련된 지수를 통하여 조정이 가능하거나 예측이 가능하다는 것은 실질적인 자사의 자금 운영에 큰 도움이 될 것이기 때문이다. 국내외 보험회사의 자료 공개가 제한되어 있기 때문에, 본 연구에서는 실제 크레임의 자료를 통한 분석을 진행하지는 못하였으나, 모의실험을 통한 연구 방법과 결과가 실제 자료만 주어진다면 직접적으로 적용 가능한 방법임을 제시하고자 한다.

2. 연구내용

보험위험 확률모형(insurance risk model)을 다음의 서플러스 확률과정(surplus processes)으로 제안한다.

$$U_t = u + \gamma t - S_t, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

여기서 $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ 는 레비메저 Π_s 을 갖는 서브오디네이터(subordinator)이며 크레임 사이즈 Y 는 확률분포 F 를 갖는 *i.i.d.* 확률변수로써 콤파운드 포아송 확률과정(compound Poisson process)으로 모형화된다. 이때 N_t 는 인텐시티 $\lambda > 0$ 을 갖는 포아송 확률과정이다. u 는 초기자본이고, γ 는 프리미엄업(premium rate)으로써 $\gamma = (1 + \theta)E[S_1]$ 으로 정의되고, 이때 θ 는 안전지수(safety premium or premium loading factor)이다.

이러한 시나리오에서 보험산업에서 가장 관심이 집중되는 문제는 확률과정 U_t 가 음의 값을 갖게 되어 파산하게 되는 경우이다. 이와 같은 파산의 가능성을 무한시간대(infinite time horizon)에서와 유한시간대(finite time horizon)에서 $u, t \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여 다음과 같이 고려한다.

$$\psi(u) = P(X_s > u, \text{ for some } s > 0),$$

그리고

$$\psi(u; t) = P(X_s > u, \text{ for some } s \in (0, t)),$$

여기서 $X_s = S_s - \gamma s$ 은 트리플렛(triplet) $(\gamma, \sigma^2, \Pi_X)$ 을 갖는 레비확률과정이다. 이 때 Π_X 는 레비메저(Lévy measure)이고, 레비확률과정은 다음과 같은 레비-킨첸(Lévy-Khintchine)형태 $E(e^{i\theta X_t}) = e^{t\Psi(\theta)}$ 으로 표현된다.

$$\Psi(\theta) = i\theta\gamma - \frac{\sigma^2\theta^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x 1_{|x|<1}) \Pi_X(dx),$$

여기서 $t \geq 0$ 에 대하여 $\theta \in \mathbb{R}$ 이고 $\Psi(\theta)$ 을 레비 멱지수(Lévy exponent)라 부른다.

본 연구는 다음의 두 가지 가정을 전제로 진행된다.

- 레비확률과정이 $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty$ a.s.이고, 파산이 반드시 일어난다 ($\tau(u) < \infty$). 이 때 $\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : X_t > u\}$, $u > 0$ 이다.
- 크레임의 분포 F 는 두터운 꼬리 분포족에 속하는 정규변동성 성질을 갖는 분포족(regularly varying distribution class)에 속한다.

레비확률과정 X_t 의 드리프트(drift)가 $-\infty$ 라는 가정은 보험회사에서 프리미엄의 수입이 지속적으로 증가한다는 경우를 설명하는 것으로써 보험회사 입장에서는 바람직한 가정이 되는 셈이다. 이 때 크레임의 총량 S_t 가 크게 발생하여 초기자본금 u 를 넘어서게 된다면 그 보험회사는 파산에 직면하게 되고, 이 시점에서의 오버슈트는 보험회사의 부족한 금액(deficit)을 설명하는 변수이다. 반면에 파산이 일어날 직전 보험회사의 잉여자금(surplus)은 언더슈트가 설명하여 준다. 레비확률과정의 샘플패스에서 업워드 점프(upward jump)의 크기가 갖는 분포의 특성은 레비메저가 정규변동성 분포족에 포함된다는 가정으로 표현된다.

2.1. 정규변동성 분포족

크레임의 분포가 속하는 정규변동성 분포족의 정의를 살펴보기 전에, 몇 가지 표기법에 대하여 간략하게 언급한다. 분포함수 F 의 n -차 컨볼루션(n -fold convolution)은 F^{*n} 으로 표기하고, 양의 값을 갖는 두 함수 $f(\cdot)$ 와 $g(\cdot)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$ 이면 $f(x) \sim g(x)$ 으로 표기한다. 보통 모든 $x > 0$ 에 대하여 $\bar{F}(x) = 1 - F(x) > 0$ 을 갖는 어떤 확률변수 X 가 두터운 꼬리 분포를 가졌다는 것은 모든 $\theta > 0$ 에 대하여 $E \exp(\theta X) = \infty$ 일 경우를 말한다. 하지만 본 연구의 실증분석에서는 적률생성함수가 유한이면서 꼬리가 긴 분포가 만족하는 정규변동성 성질을 갖는 분포족의 사례를 이용할 것이다. 잘 알려진 두터운 꼬리 분포족으로는 열지수분포족이 있다. 만일 분포함수 F 에 대하여 다음의 관계가 성립하면 F 는 열지수 분포족 S 에 속한다고 말한다 (Embrechts 등, 1979).

$$\bar{F}^{*n}(x) \sim n\bar{F}(x), \quad \text{for some } n = 2, 3, \dots$$

Teugels (1975)은 두 분포함수 F 와 G 에 대하여, 만일 $F \in \mathcal{S}$ 이고 $\bar{F} \sim \bar{G}$ 이라면 $G \in \mathcal{S}$ 임을 설명하였다. 더불어 모든 열지수 분포 F 가 꼬리가 긴 분포(long tailed distribution class, $F \in \mathcal{L}$)라는 점은 다음의 관계가 성립한다는 의미이다 (Embrechts 등, 1997, Lemma 1.3.5(a)).

$$\bar{F}(x+a) \sim \bar{F}(x), \quad \text{for some } a \neq 0.$$

다음의 관계가 성립되는 분포함수 F 는 지배적으로 변동되는 꼬리를 갖는 분포족(distribution class with dominatedly -varying tails, $F \in \mathcal{D}$)에 속한다고 말한다.

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} < \infty, \quad \text{for some } 0 < y < 1.$$

Goldie (1978)과 Embrechts 등 (1997)의 Proposition 1.4.4(a)는 분포족 $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ 이 열지수분포족의 부분포족(subclass)임을 설명하였다. 분포족 $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ 은 다음의 관계가 성립되는 정규변동성 분포족($F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$)을 포함한다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} = y^{-\alpha}, \quad \text{for some } \alpha \geq 0 \text{ and all } y > 0.$$

정규변동성 분포족에 속하는 $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ 분포함수는 모든 α_1 과 α_2 에 대하여 다음의 조건이 성립된다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha_1} \bar{F}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha_2} \bar{F}(x)} = 0, \quad \text{for } \alpha_1 < \alpha < \alpha_2.$$

조건 (2.2)가 만족되는 분포들은 α_1 차 모멘트 (moment)가 유한(finite)하다. 두터운 꼬리 분포족이 갖는 성질과 그들의 응용은 Bingham 등 (1987)과 Embrechts 등 (1979)을 참조한다.

Remark 2.1: 두터운 꼬리를 갖는 분포함수를 설명하는 분포족의 포함관계는 $\mathcal{R}_{-\alpha} \subsetneq \mathcal{D} \cap \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{L}$ 이 된다.

2.2. 파산확률의 근사적 추이

레비확률과정이 spectrally positive하고, 레비확률과정의 드리프트가 $-\infty$ 라고 가정하면, 난크레머 조건하에서 초기자본금이 무한히 커질수록 무한시간대에서 파산확률의 근사적 추이는 다음과 같다 (Park과 Maller, 2008).

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P(\tau(u) < \infty) = |EX_1| \left(\frac{\alpha}{\phi(\alpha)} \right)^2 \int_{y \in [u, \infty)} \bar{\Pi}_X^+(y) dy, \quad \text{for some } \alpha > 0, \quad (2.2)$$

여기서 $\phi(\alpha)$ 은 레비확률과정의 라플라스 멱지수(Laplace exponent of X)이고, $\bar{\Pi}_X^+(x) = \Pi_X\{(x, \infty)\}$ 이다. 레비확률과정과는 독립인 랜덤타임 τ_q 는 모수 $q > 0$ 인 지수분포를 갖을 경우에서, $\alpha > 0$ 와 $u \geq 0$ 에 대하여, Pecherskii-Rogozin identity을 이용하여 유도한 유한 시간대에서의 파산확률은 다음과 같다 (Park, 2010).

$$E \left(e^{-\alpha \tau(u)} \mathbf{1}_{[\tau(u) < \infty]} \right) = E \left(\mathbf{1}_{[\bar{X}_{\tau_q} > u]} \right),$$

그리고

$$P^{(u)}(\tau(u) \leq t) = \frac{c(\alpha, q)}{\kappa(q, 0)} \int_{[u, \infty)} P(\mathcal{H}_t \in dy),$$

여기서 $\kappa(q, 0)$ 는 이변량 서브오디네이터의 결합 라플라스 멱지수(joint Laplace exponent of bivariate subordinators)이고 $c(\alpha, q)$ 는 α 와 q 에 의존된 함수이다. 이 때 $P^{(u)}$ 은 파산이 반드시 일어난다는 조건인 $\tau(u) < \infty$ 을 전제하는 조건부확률을 표기하는 것이다. 이와 같은 이론적 결과를 토대로 정규변동성 분포의 사례를 이용하여 3장에서는 파산확률의 근사적 추이를 살펴보는 실증적 방법을 고려한다.

3. 연구방법 및 결과

보험회사의 서플러스에 대한 안전지수를 고려하기 위하여 식 (2.1)로 부터 다음과 같은 보험위험모형을 고려한다.

$$U_t = u + (1 + \theta)\lambda\mu_1 t - S_t, \quad t \geq 0,$$

여기서 $\mu_1 = E(Y_i)$ 이다. 보험위험 확률과정에서 관심이 되는 파산확률의 근사적 추이를 조명하기 위한 여러가지 실증적 연구방법들은 파산확률의 추정량의 효율성(efficiency)을 기준으로 하여 근사이론의 성과를 뒷받침해 주고 있다. 효율성이 좋은 실증적 방법을 통하여 보험산업의 현실적 상황을 예측할 수도 있고, 그 상황과 이론적 가정을 조율하여 이론 연구의 활용성을 강구하는 방안이 되기도 한다. 많은 근사기법 중 본 연구에서 제안하는 정규변동성 성질을 갖는 조건에서는 가장 널리 사용되고 있는 몬테칼로 시뮬레이션 방법을 이용한다. 알고리즘의 효율성을 지향하는 방안을 추구하고 실제 보험산업에 활용될 수 있다는 점에서도 시뮬레이션의 결과는 두터운 꼬리 분포족의 특성을 잘 대변한다고 본다. 2장에서 살펴본 기존 이론연구의 결과를 모의실험을 통하여 파산확률의 근사적 추이와 3장에서 유도된 정확히 계산된 파산확률과 비교하고, 파산확률의 추이가 파산확률과 관련된 몇 가지 계수들의 추이와 연관성이 있다는 점을 살펴본다. 정규변동성 분포족에 속하는 사례 중 가장 간단한 분포로서 크레임의 분포가 지수분포와 역정규분포의 경우를 고려한다. 사실상 현실적인 면에서 보험회사의 관점에서는 크레임의 분포를 보수적 관점에서 바라본다는 점을 두 분포의 사례가 반영하고 있다.

3.1. 시뮬레이션을 통한 실증연구

레비확률과정의 드리프트(drift)가 $-\infty$ 으로의 경우에서 크레임의 분포가 정규변동성 분포족에 속할 때에 파산확률(finite-time ruin probability)의 추이를 실증분석하는 방법을 고려한다. 크레임의 분포가 지수분포와 역정규분포일 경우, 다음의 두 결과에 대한 파산확률의 근사적 추이를 제안한 방법에 의하여 비교한다. 정리 3.1은 식 (2.2)로 부터 유도 되었고, 정리 3.2는 레비확률과정의 라플라스 변환이 유한할 경우, 레비확률과정의 라플라스 변환에 총확률 법칙을 적용하여 정확히 계산된 파산확률을 초기자산과 시간 t 가 무한히 갈 경우에서 파산확률을 살펴본 것이다.

정리 3.1 모든 $\alpha > 0$ 와 크레임 확률변수의 적률생성함수 $m_Y(r) < \infty$ 을 만족하는 임의의 r 에 대하여 다음의 결과를 얻는다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{u \rightarrow \infty} P^{(u)}(\tau(u) \leq t) = \lambda |EX_1| \left(\frac{r}{m_Y(r)} \right)^2 \int_{y \in [u, \infty)} F_Y(y) dy, \quad (3.1)$$

정리 3.2 만일 함수 $h(r) = \lambda(m_Y(r) - 1) - r(1 + \theta)\lambda\mu_1 = 0$ 에 대하여 양의 값을 갖는 해(SOLUTION) $R > 0$ 이 존재한다면 보험위험 레비확률과정에서 고려한 정확한 파산확률의 계산 결과는 다음과 같다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^{(u)}(\tau(u) \leq t) = \frac{1}{E[e^{RX_{\tau(u)}} | \tau(u) < \infty]}, \quad (3.2)$$

여기서 m_Y 는 크레임의 크기 Y 의 MGF이다.

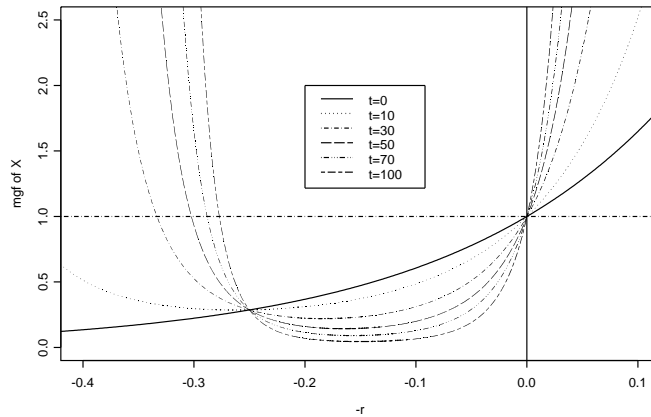


그림 3.1. 평균이 1인 크레임 지수분포일 경우 시간 $t = 0, 10, 30, 50, 70, 100$ 에서의 $h(r)$ 함수; $\lambda = 1, \theta = 1/3$

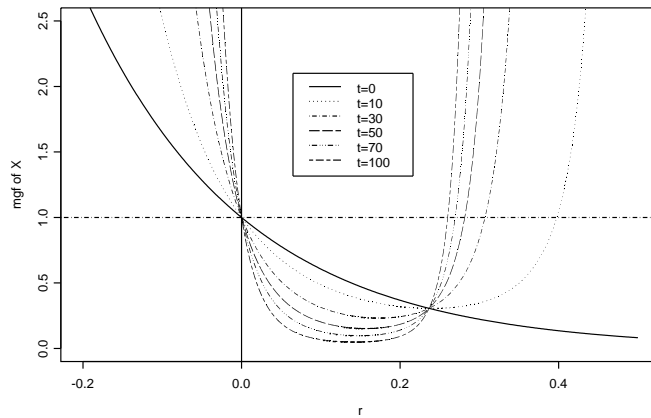


그림 3.2. 평균 1, 정도 1을 갖는 역정규 크레임분포일 경우 시간 $t = 0, 10, 30, 50, 70, 100$ 에서의 $h(r)$ 함수; $\lambda = 1, \theta = 1/3$

두 정리를 통하여 과산확률의 근사적 추이가 Y 의 적률생성함수와 관계된 계수 r 에 의존되어 있다는 것을 알 수 있다. 식 (3.2)를 계산하기 위하여 결정계수 R 을 계산해야 하는 문제가 있다. 식 (3.2)로부터 유도되는 것은 간단한 문제가 아니기 때문에 R 의 값을 어떻게 찾아야 하는지에 대한 방법이 필요하다. 본 연구에서 해결하고자 하는 아이디어는 결정계수 R 이 레비확률과정의 라플라스 변환 Ee^{RX_t} 상에 모든 t 에 따라 동일한 R 값으로 존재하게 되므로, 이를 이용하고자 하는 것이다. 다음의 레비확률과정의 라플라스 변환에서 살펴본다면, 직관적으로 알 수 있다.

$$E \left[e^{RX_t} \right] = e^{-R(1+\theta)\lambda\mu_1 t} \cdot E \left[e^{RS_t} \right] = e^{th(R)}, \tag{3.3}$$

여기서 $h(R) = \lambda(m_Y(R) - 1) - R(1+\theta)\lambda\mu_1$ 이다. 식 (3.3)에서의 결정계수 R 을 찾기 위한 하나의 방법으로, R 에 대한 레비확률과정의 라플라스 변환이 모든 시간대에서 같은 점을 지나게 되는 바로 그 점이 분명 R 값이 될 것이므로 그림 3.1과 3.2을 통하여 간단한 방법을 제시해 본다. 그림 3.1은 크레임의 인텐시티가 1, 크레임의 크기는 $\exp(1)$ 을 따르고, 안전지수(safety premium)는 $1/3$ 일 경우에서 임의의 r 에 대한 레비확률과정의 라플라스 변환 값을 시간 $t = 0, 10, 30, 50, 70, 100$ 에서 함수 $h(r)$ 의 해를 찾는 그림이다. 이 경우에서의 결정계수 값은 $R = 0.25$ 가 된다. 비선형방정식의 해를 찾기 위해 사용된 반

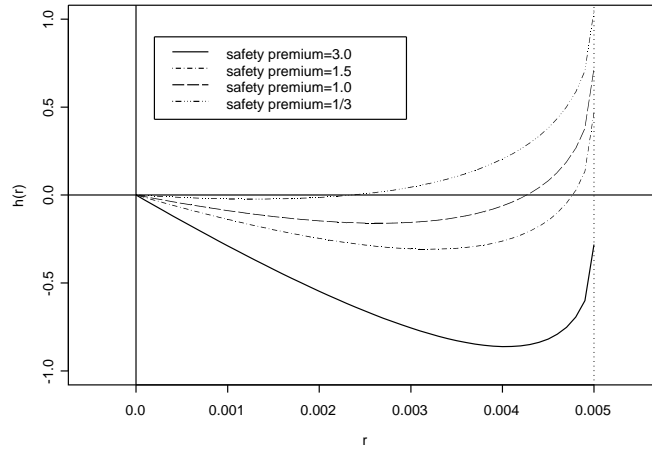


그림 3.3. 평균 100, 정도 100을 갖는 역정규 크레임분포일 경우 $\theta = 1/3, 1.0, 1.5, 3.0$ 에 따른 $h(r)$ 함수; $\lambda = 1$; 안전지수에 따라 얻어진 결정계수 $R_{1/3} = 0.00231, R_{1.0} = 0.00418, R_{1.5} = 0.004769, R_{3.0} = N/A$

복된 컴퓨터 계산 결과를 시각적으로 잘 보이게 하기 위하여 x 축은 $-r$, 그리고 y 축은 $E[e^{rX_t}]$ 을 표현한 것이다. 그림 3.2는 그림 3.1에서와 같은 동일한 조건하에서 크레임의 분포가 $\mu = 1$ 이고 precision = 1을 가질 경우의 역정규 분포일 경우에서 함수 $h(r)$ 의 해가 $R = 0.2435$ 임을 살펴본 것이다. 역정규분포의 파라미터가 변하면 결정계수 R 도 달라짐을 그림 3.3을 통하여 확인할 수 있다.

그림 3.3은 $\mu = 100$ 이고 precision = 100일 경우 안전지수 θ 에 의존되어 함수 $h(r) = 0$ 이 되는 해를 직접 컴퓨터 계산을 통하여 얻은 그림이다. 역정규분포의 적률생성함수 $m_Y(r)$ 은 $r \leq 1/2s\mu^{-2}$ 의 범위내에서는 항상 존재하므로, R 이 갖는 상한값 $1/2s\mu^{-2} = 0.005$ 를 정하고, 프리미엄 안전지수 $\theta = 1/3, 1.0, 1.5, 3.0$ 에 대하여 함수 $h(r)$ 을 구하기 위하여 반복적인(iterative)수치계산에 의하여 $R_{1/3} = 0.00231, R_{1.0} = 0.00418, R_{1.5} = 0.004769, R_{3.0} = N/A$ 을 얻었다. 여기서 s 는 역정규분포의 precision이고, $\theta = 1.5$ 일 경우의 결정계수 값은 $R_{1.5} = 0.004769$ 으로 표기하였다. 함수 $h(r)$ 의 해가 존재하는 영역은 크레임의 적률생성함수가 유한일 조건을 고려하면 찾을 수 있다. 그래서 함수 $h(r)$ 의 해 R 은 항상 다음의 조건에서는 존재하게 된다.

$$\frac{(s/\mu)}{2(e^{s/\mu} - 1)} < \frac{1}{1 + \theta}$$

그림 3.3에서는 $\theta < 2(e - 1) - 1 = 2.4366$ 일 경우에 함수의 해 R 이 존재하기 때문에 $\theta = 3.0$ 일 경우 R 의 값은 존재하지 않게 된 것이다. 게다가 안전지수가 1보다 큰 경우는 보험산업에서 현실적이지 않기 때문에 본 연구에서는 안전지수가 0.5보다 작을 경우에서만 고려한다.

3.2. 파산확률의 추이

결정된 R 의 값을 이용하여 얻어진 식 (3.2)의 정확한 파산확률값과 식 (3.1)의 근사적 확률값을 비교하기 위하여 몬테칼로 시뮬레이션 방법을 이용한다. 가장 기본적인 모의실험 방법은 레비확률과정의 샘플패스를 이산적인 값으로 난수발생하여 샘플패스의 값이 초기 자본 u 값을 넘게 되는 확률을 계산하여, 이를 파산확률의 추정값으로 제안하는 것이다. 몬테칼로 시뮬레이션을 10,000번 정도 시행하여 그 파산확률의 평균값을 계산한 추정량을 파산확률로 사용한다. 이 때 점프가 발생하는 시간도 랜덤하게 정해지고

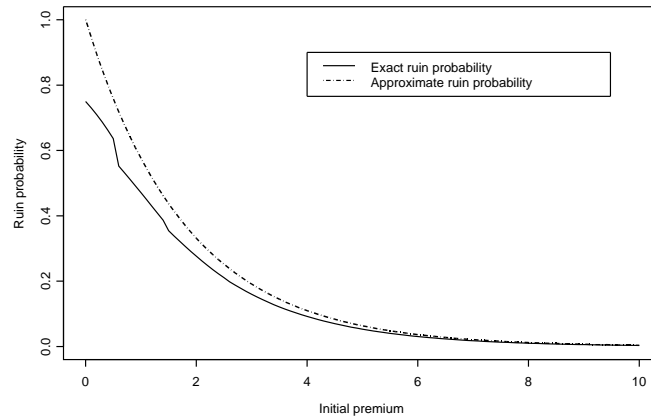


그림 3.4. 크레임 지수분포의 경우 정확한 파산확률 (3.2) 대 근사적 파산확률 (3.1); $R = 0.5523$, $\theta = 1/3$

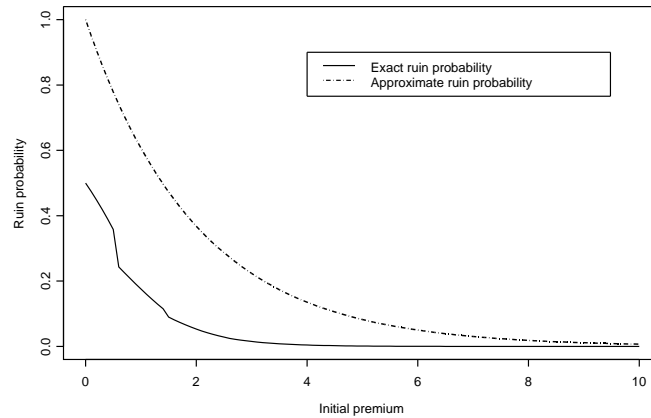


그림 3.5. 역정규 크레임 분포의 경우 정확한 파산확률 (3.2) 대 근사적 파산확률 (3.1); $R = 0.00231$, $\theta = 1/3$

점포의 발생 건수도 랜덤하게 난수 발생을 한다 (Park, 2010, 표 1). 파산확률의 추이를 크레임이 평균 1인 지수분포일 경우는 그림 3.4에서 역정규분포일 경우는 그림 3.5에서 초기자본금이 무한대로 갈수록 파산확률의 근사적 추이를 비교하였다. 실선은 R 값이 주어져서 정확히 계산된 식 (3.1)이고, 점선은 식 (3.2)에 대하여 시뮬레이션에 의해 얻어진 근사적인 파산확률값이다. 그림 3.5에서 평균과 precision이 모두 각각 100인 역정규 분포일 경우의 결정계수는 지수분포 경우에서의 안전지수와 같은 $\theta = 1/3$ 값이 주어질 경우 얻어진 결정계수 $R = 0.00231$ 이다.

두 그림의 파산확률의 추이를 살펴보면, 초기자본금이 증가할수록 정확한 파산확률과 근사적인 파산확률의 차이가 줄어드는 것으로 보인다. 초기자본금이 작을 때에 근사정도가 좋지 않은 이유는 식 (3.1)과 식 (3.2)의 비교에 의해 직관적으로 알 수 있다. 즉, 식 (3.1)은 초기자본금이 무한히 증가할 경우의 수렴되는 값으로써 그림에서 보여지듯이 초기자본금이 커질수록 정확한 파산확률값에 근사되는 점을 확인할 수 있다. 그림 3.5에서 크레임의 분포가 역정규분포일 경우에서 근사정도가 지수분포인 경우보다 근사정도가 좋지 않은 원인은, 크레임의 분포의 평균의 차이에서 기인되는 것으로 보인다. 크레임의 분포의 평균이 크다는 것은 그 크기만큼의 크레임 사이즈가 빈번히 나타난다는 점으로 간주되며 그 원인으로 인하여 초기자본금이 작을 경우에는 더 큰 근사의 차이로 나타나는 것이라 생각된다. 게다가 크레임의

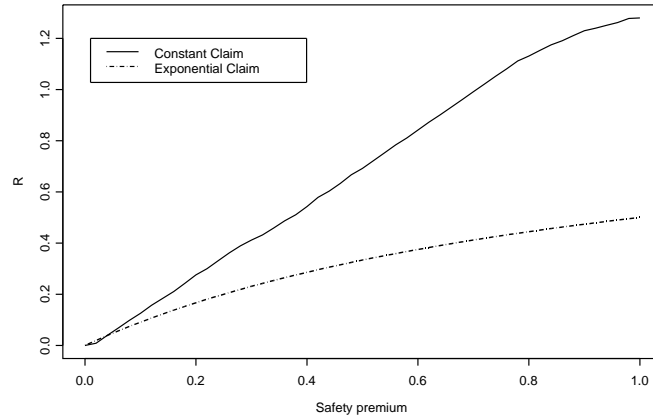


그림 4.1. 지수분포에서 크레임의 평균이 1일 경우 안전지수 θ 와 결정계수 R 의 연관성

분포 모양에 따라 결정계수의 값에 차이가 있기 때문에 실제 정확히 계산되는 파산확률에도 차이가 보이는 것이다. 이러한 점을 시각적으로 확인하기 위하여 역정규분포의 평균과 precision을 1이 아닌 100으로 고려하여 실증적으로 보였으며, 이는 분포의 모양에 따라 변화되는 부분이라 보여진다. 이러한 근거는 앞서 설명하였던 그림 3.1과 3.2에서 지수분포와 역정규분포의 평균이 모두 1인 경우에는 결정계수 R 의 값이 각각 0.25와 0.2435로 비슷하게 얻어지는 것을 보더라도 직관할 수 있다.

3.3. 파산확률과 연관된 지수들의 관계

파산확률의 근사적 추이를 초기 자본금이 증가함에 따라 어떻게 변화되는지를 살펴보았다. 크레임의 꼬리 분포 모양에 따라 파산확률의 추이를 결정하는 계수의 값이 달라진다는 점을 알 수 있고, 결정계수가 파산확률의 추이에 영향을 미친다는 점도 직관할 수 있게 된다. 그렇다면 파산확률의 근사적 추이를 미리 진단할 수 있도록 정보를 주는 변수들이 무엇인지를 결론적으로 살펴보자. 먼저 안전지수와 계수 R 과의 연관성이 파산확률에 어떤 영향을 미치는가를 살펴볼 필요가 있다. 다음으로는 크레임의 양이 많을수록 결정계수 R 이 어떻게 움직이는지의 추이도 파산확률에 영향을 미치기 때문에 그들의 연관성에 대한 분석도 필요하다. 크레임이 갖는 분포가 파라미터 1인 지수분포일 경우에서와 크레임의 발생 크기가 특정분포를 갖는 것이 아닌 일정한 평균적으로 1의 만큼으로 설명되는 경우에서 안전지수와 결정계수 R 의 연관된 추이는 그림 4.1에서 살펴볼 수 있다. 그림 4.2는 크레임의 양이 변함에 따라 결정계수 R 이 변화되는 추이를 그림 4.1의 경우에서 같은 지수적 크레임과 평균상수값을 크레임 크기로 주어진 두 가지 경우에서 살펴본 것이다. 이때의 안전지수는 그림 3.4와 3.5의 파산확률의 추이와 비교하기 위하여 $\theta = 1/3$ 의 값을 갖는다.

4. 결론

보험회사가 갖는 파산의 가능성(risk of portfolio)을 본 연구에서는 파산확률로써 표현하였는데, 그림 3.4와 3.5를 통하여 살펴본다면, 조금 더 보수적으로 안정적인 크레임의 분포의 경우가 초기자본금이 작더라도 실제 파산확률에 더 잘 근사된다는 점을 살펴볼 수 있다. 이러한 사실은 만약 크레임의 분포가 두터운 꼬리 분포쪽에 속하거나, 매우 극단적인 값을 갖게 되는 경우 정확한 파산확률을 계산할 수 없게되므로 근사적인 파산확률로 파산 가능성을 예측하고자 할 때에 도움이 되는 정보이다. 그림 4.1과 4.2에서는 결정계수 R 이 감소하면 할수록 파산확률은 증가하는 추이로 나타난다는 점을 알 수 있다. 안

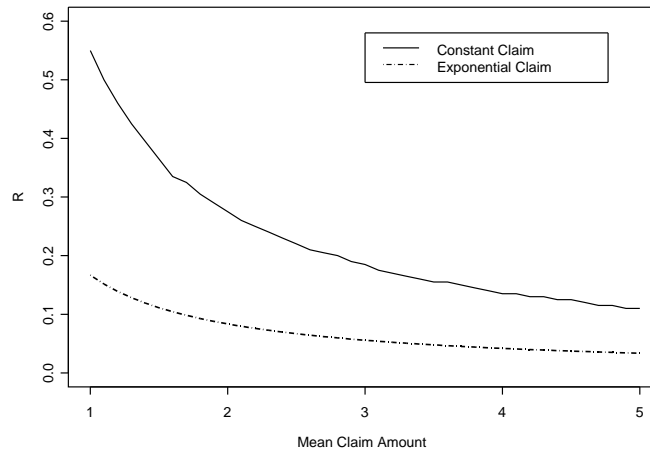


그림 4.2. 안전지수가 $\theta = 1/3$ 일 경우 지수분포를 따르는 크레임의 평균량과 결정계수 R 의 연관성

전지수는 보험회사의 서플러스를 안전하게 유지시켜주는 기준이 되는데 안전지수가 증가하면 할수록 결정계수 R 도 증가하는 것을 그림 4.1을 통하여 알 수 있고, 이는 파산확률이 감소하면서 회사가 갖는 리스크를 줄여주는 작용을 한다는 결론을 얻는다. 크레임의 평균 양이 증가하면 결정계수 R 은 감소하게 되고 리스크는 증가하는 결과를 갖게 된다. 그림 4.1과 4.2에서 나타나듯 크레임의 평균양을 일정한 상수값으로 갖는다고 고려할 경우 보다 크레임의 양이 지수분포를 따른다고 고려할 경우의 리스크가 더 큰 것으로 결론지을 수 있으며, 이것은 더 “volatile”하다라는 의미로 해석할 수 있다. 안전지수와 크레임의 총량과 결정계수의 연관성을 미리 살펴본다면 파산확률의 추이가 어떻게 진행될지 진단 가능함을 확인하였다.

참고문헌

- Bertoin, J. and Doney, R. A. (1994). Cramér's estimate for Levy processes, *Statistics and Probability Letters*, **21**, 363–365.
- Bingham, N. H., Goldie, C. M. and Teugels, J. L. (1987). *Regular Variation*, Cambridge University Press.
- Dickson, D. C. M. and Hipp, C. (2001). On the time to ruin for Erlang(2) risk processes, *Insurance: Mathematics & Economics*, **29**, 333–344.
- Doney, R. A. and Kyprianou, A. (2006). Overshoots and undershoots of Levy processes, *Annals of Applied Probability*, **16**, 91–106.
- Embrechts, P., Goldie, C. M. and Veraverbeke, N. (1979). Subexponentaility and infinite divisibility, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **49**, 335–347.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag, Berlin.
- Goldie, C. M. (1978). Subexponential distributions and dominated-variation tails, *Journal of Applied Probability*, **15**, 440–442.
- Klüppelberg, C., Kyprianou, A. E. and Maller, R. A. (2004). Ruin probabilities and overshoots for general Levy insurance risk processes, *Annals of Applied Probability*, **14**, 1766–1801.
- Park, H. S. (2010). Computing the ruin probability of Levy insurance risk processes in non-Cramér models, *Communications of the Korean Statistical Society*, **17**, 483–491.
- Park, H. S. (2011). A note on limiting distribution for jumps of Lévy insurance risk model, *Journal of the Korean Statistical Society*, **40**, 93–98.

- Park, H. S. and Maller, R. A. (2008). Moment and MGF convergence of overshoots and undershoots for Levy insurance risk processes, *Advances in Applied Probability*, **40**, 716–733.
- Tang, Q. and Tsitsiashvili, G. (2003). Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to ruin theory, *Extremes*, **6**, 171–188.
- Teugels, J. L. (1975). The class of subexponential distributions, *Annals of Probability*, **3**, 1000–1011.

Ruin Probability on Insurance Risk Models

Hyun Suk Park¹ · Jeongkyu Choi²

¹Department of Finance and Information Statistics, Hallym University

²Department of Finance and Information Statistics, Hallym University

(Received April 2011; accepted June 2011)

Abstract

In this paper, we study an asymptotic behavior of the finite-time ruin probability of the compound Poisson model in the case that the initial surplus is large. To compare an exact ruin probability with an approximate one, we place the focus on the exact calculation for the ruin probability when the claim size distribution is regularly varying tailed (*i.e.* exponential claims and inverse Gaussian claims). We estimate an adjustment coefficient in these examples and show the relationship between the adjustment coefficient and the safety premium. The illustration study shows that as the safety premium increases so does the adjustment coefficient. Larger safety premium means lower “long-term risk”, which only stands to reason since higher safety premium means a faster rate of safety premium income to offset claims.

Keywords: Insurance risk model, ruin probability, regular variation, Lévy processes.

This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (NRF 2010-0007290).

¹Corresponding author: Associate Professor, Department of Finance and Information Statistics, Hallym University, Chuncheon 200-702, Korea. E-mail: hspark@hallym.ac.kr