

# 압전 밴드 갭 구조물의 면내·외 방향 체적 탄성파 전파 특성 해석을 위한 유한요소 모델링<sup>§</sup>

김재은<sup>\*†</sup>, 김윤영<sup>\*\*</sup>

\* 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부, \*\* 서울대학교 기계항공공학부

## Finite Element Modeling for the Analysis of In- and Out-of-plane Bulk Elastic Wave Propagation in Piezoelectric Band Gap Structures

Jae Eun Kim<sup>\*†</sup> and Yoon Young Kim<sup>\*\*</sup>

\* Faculty of Mechanical and Automotive Engineering, Catholic Univ. of Daegu,

\*\* School of Mechanical and Aerospace Engineering, Seoul Nat'l Univ.

(Received May 11, 2011 ; Revised June 1, 2011 ; Accepted June 8, 2011)

**Key Words** : Band Gap(밴드 갭), Bulk Elastic Wave(체적 탄성파), Piezoelectric(압전), Phononic Crystal(포논 결정), Finite Element Method(유한요소법)

**초록**: 본 연구에서는 압전 밴드 갭 구조물(포논 결정)에 대한 체적 탄성파의 전파 특성을 주파수 및 모드 별로 파악하기 위한 유한 요소법의 적용 방안을 제안하였다. 이를 위해 체적 탄성 진행파의 면내 모드 뿐만 아니라 면외 모드를 포함하도록 3 차원 주기 경계 조건을 고려하였다. 특히, 체적 탄성파 모드 간의 비연성 특성을 전기 분극 방향에 따라 유도한 다음, 그 결과를 유한 요소 모델링에 반영하였다. 제안된 방법은 실제 시뮬레이션을 통해 다양한 형태의 압전 밴드 갭 구조물의 파동 특성 분석에 적용될 수 있는 일반적이고 효율적인 방법임을 확인하였다.

**Abstract**: This investigation presents a finite element method to obtain the transmission properties of bulk elastic waves in piezoelectric band gap structures(phonon crystals) for varying frequencies and modes. To this end, periodic boundary conditions are imposed on a three-dimensional model while both in-plane and out-of-plane modes are included. In particular, the mode decoupling characteristics between in-plane and out-of-plane modes are identified for each electric poling direction and the results are incorporated in the finite element modeling. Through numerical simulations, the proposed modeling method was found to be a useful, effective one for analyzing the wave characteristics of various types of piezoelectric phononic band gap structures.

### - 기호설명 -

$\tilde{T}_{ij}$  : 복소수 응력 텐서(N/m<sup>2</sup>)  
 $\tilde{U}_i$  : 복소수 변위(m)  
 $\tilde{D}_i$  : 복소수 전속 밀도(C/m<sup>2</sup>)  
 $\rho$  : 질량 밀도(kg/m<sup>3</sup>)  
 $\omega$  : 각 주파수(rad/s)  
 $\tilde{\phi}$  : 복소수 전압(V)  
 $\tilde{S}_{kl}$  : 복소수 변형률

$c_{ijkl}$  : 탄성 텐서(N/m<sup>2</sup>)  
 $\epsilon_{ik}^S$  : 커패시턴스 텐서(변형률 고정)(F/m)  
 $e_{ikl}$  : 압전 응력 텐서(C/m<sup>2</sup>)  
**K** : 강성 행렬  
**M** : 질량 행렬  
 $k_x(k_y, k_z)$ : 파동 벡터의 x 축(y 축, z 축) 성분

## 1. 서론

서로 다른 강성을 가진 물질들이 주기적으로 배열되어 있는 음향 밴드 갭 물질(acoustic band gap material) 또는 포논 결정(phononic crystal)<sup>(1-5)</sup>에서는 경계면에서의 산란으로 인해 입사파가 물질을 통과

§ 이 논문은 대한기계학회 2010년도 추계학술대회(2010.

11. 3.-5., ICC 제주) 발표논문임

† Corresponding Author, jekim@cu.ac.kr

© 2011 The Korean Society of Mechanical Engineers

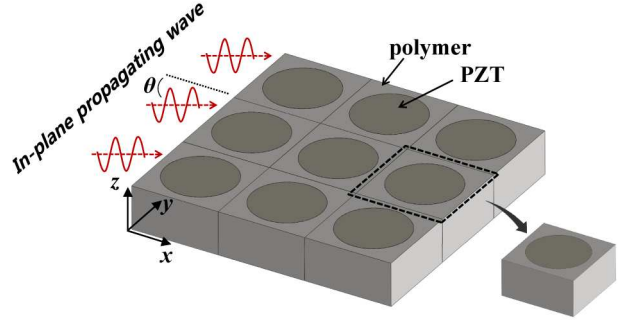
하지 못하는 주파수 대역(band gap frequency)이 존재한다. 또한, 주기성 및 구성 물질들에 대한 설계 인자를 조절하면 국부 공진 및 음의 파동 군속도가 존재하는 주파수 대역을 얻을 수 있으며, 파동의 진행 방향 역시 조절할 수 있다. 이러한 특성에 대한 연구는 전자기 재료, 음향 및 순수 탄성 물질을 대상으로 시작하여<sup>(5,6)</sup> 최근에는 압전<sup>(7,8)</sup> 및 자기 변형<sup>(9)</sup> 물질 등의 지능 재료에까지 이른다. 특히, 지능 재료를 이용한 밴드 갭 구조물은 전기/자기 조건에 따라 주파수 밴드 갭을 포함한 다양한 파동 전파 특성이 조절될 수 있기 때문에 많은 관심을 받고 있다. 이러한 밴드 갭 구조물 내의 음파 또는 탄성파의 파동 특이 현상을 규명하기 위해 평면파 전개법(PWE: Plane Wave Expansion),<sup>(10,11)</sup> 다중 산란법(MST: Multiple-Scattering Theory),<sup>(12)</sup> 유한 차분 시간 영역법(FDTD: Finite Difference Time Domain),<sup>(13)</sup> 고유 모드 정합법(EMMT: Eigen-Mode Matching Theory)<sup>(14)</sup>과 같은 해석 기법이 사용되어 왔다. 또한, 유한 요소법을 적용한 해석법이 사용되고 있으나,<sup>(15,16)</sup> 2 차원 구조물의 경우에 대한 평면 변형률 가정의 2 차원 거동 또는 얇은 평판 내 유도 탄성파에 대한 해석 결과만 보고되었다.

본 연구에서는 기존의 유한 요소법을 사용한 연구결과<sup>(15,16)</sup>를 확장하여 압전 밴드 갭 구조물에 대한 체적 탄성파의 주파수 대역 특성을 구하되 면내(in-plane) 방향 뿐만 아니라 면외(out-of-plane) 방향의 모드를 모두 포함하도록 하였다. 특히, 체적 탄성파의 주파수 통과 대역 특성을 면내 및 면외 방향 모드 별로 구하기 위해 압전 밴드 갭 구조물의 체적 탄성파를 기술하는 지배 방정식이 압전 물질의 전기 분극에 따라 변위의 면내 성분과 면외 성분으로 분리될 수 있음을 보이고, 유한 요소 해석시 모드 별로 구별하는 방안을 제시하였다. 수치 예제에서는 제안한 모델링 방법을 상용 유한 요소 해석 소프트웨어에 적용하여 압전 물질의 전기 분극 방향이 입사파와 평행 또는 수직인 경우에 대해 각각의 주파수 밴드 갭 특성을 면내·외 모드 별로 살펴 보았다.

## 2. 주기적 반복 구조를 갖는 압전 밴드 갭 구조물의 유한 요소 해석

### 2.1 유한 요소 방정식

본 연구에서 해석하고자 하는 압전 밴드 갭 구조물은 Fig. 1에 나타난 바와 같이 원형 압전 함유물(inclusion)과 폴리머(polymer) 모체(matrix)로 구성된 단위 셀(unit cell)이 주기적으로 반복되어



**Fig. 1** Piezoelectric structure for which the wave number ( $k_z$ ) in the  $z$  direction is assumed to be zero. However, the displacement in the  $z$  direction is not necessarily zero

있는 구조로서 입사파의 진행 방향은  $xy$  평면과 평행하다고 가정한다. 이와 같은 주기적 반복 구조에서의 파동 전파 특성을 기술하기 위해서 다음의 파동 방정식을 사용한다(여기서 조화 운동을 가정하되, 각 주파수를  $\omega$ 로 정의한다).

(압전 물질: P)

$$\tilde{T}_{ij,j}^{(P)} + \rho^{(P)}\omega^2\tilde{U}_i^{(P)} = 0 \quad (1a)$$

$$\tilde{D}_{i,i}^{(P)} = 0 \quad (1b)$$

(비 압전 물질: N)

$$\tilde{T}_{ij,j}^{(N)} + \rho^{(N)}\omega^2\tilde{U}_i^{(N)} = 0 \quad (2)$$

식 (1) 및 (2)에 나타난 물리량 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.<sup>(17)</sup>

(압전 물질: P)

$$\tilde{T}_{ij}^{(P)} = c_{ijkl}^{(P)}\tilde{S}_{kl}^{(P)} + e_{kij}\tilde{\phi}_{,k} \quad (3a)$$

$$\tilde{D}_i^{(P)} = e_{ikl}\tilde{S}_{kl}^{(P)} - \epsilon_{ik}^s\tilde{\phi}_{,k} \quad (3b)$$

(비 압전 물질: N)

$$\tilde{T}_{ij}^{(N)} = c_{ijkl}^{(N)}\tilde{S}_{kl}^{(N)} \quad (4)$$

위에서 제시된 식들을 이용하여 유한요소 형식화<sup>(18,19)</sup>하고, 복소 응답 물리량(절점 변위를  $\mathbf{U}$ , 절점 전압을  $\Phi$ 로 정의)을 각각 실수부와 허수부로 나누면 다음과 같이 2 개의 동일한 부분을 갖는 유한 요소 방정식을 얻게 된다.

$$\left( \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^{\text{Re}} \\ \Phi^{\text{Re}} \\ \mathbf{U}^{\text{Im}} \\ \Phi^{\text{Im}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5)$$

식 (5)에서 상첨자 Re 및 Im 은 각각 실수부 및 허수부를 나타내며, 강성 행렬  $\bar{\mathbf{K}}$  와 질량 행렬  $\bar{\mathbf{M}}$  은 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{UU}^{(P)} + \mathbf{K}_{UU}^{(N)} & \mathbf{K}_{U\Phi} \\ \mathbf{K}_{U\Phi}^t & -\mathbf{K}_{\Phi\Phi} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(P)} + \mathbf{M}^{(N)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

여기서  $\mathbf{K}_{UU}$  와  $\mathbf{K}_{\Phi\Phi}$  는 각각 탄성장과 전기장에 의한 강성이며,  $\mathbf{K}_{U\Phi}$  는 연성에 의한 강성이다(이에 대한 자세한 유도는 참고문헌 [18,19]를 참조하기 바람).

### 2.2 단위 셀에 대한 3 차원 주기 경계 조건

식 (5)에서 얻어진 식에 1 차 Brillouine 영역<sup>(1)</sup>을 구성하는 단위 셀에 대한 주기 경계 조건(periodic boundary condition)을 적용해야만 원하는 파동 특성을 해석할 수 있다. Fig. 2 에는 단위 셀의 크기 ( $a_x \times a_y \times a_z$ )와 원통형 압전 함유물의 반경  $r$  이 표시되어 있다. 또한,  $x$  축 방향으로의 주기 경계 조건을 위해  $y$ - $z$  평면과 평행한 면에 존재하는 꼭지점, 모서리, 면 등이 표시되어 있으며, 이들에 대한 3 차원 주기 경계 조건은 각각 다음과 같다.

(꼭지점: ①, ②, ③, ④)

$$\tilde{\mathbf{U}}_{①^+} = \tilde{\mathbf{U}}_{①^-} e^{jk_x a_x}; \quad \tilde{\Phi}_{①^+} = \tilde{\Phi}_{①^-} e^{jk_x a_x} \quad (6a)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{②^+} = \tilde{\mathbf{U}}_{②^-} e^{jk_x a_x}; \quad \tilde{\Phi}_{②^+} = \tilde{\Phi}_{②^-} e^{jk_x a_x} \quad (6b)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{③^+} = \tilde{\mathbf{U}}_{③^-} e^{jk_x a_x}; \quad \tilde{\Phi}_{③^+} = \tilde{\Phi}_{③^-} e^{jk_x a_x} \quad (6c)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{④^+} = \tilde{\mathbf{U}}_{④^-} e^{j(k_x a_x + k_y a_y + k_z a_z)}; \quad \tilde{\Phi}_{④^+} = \tilde{\Phi}_{④^-} e^{j(k_x a_x + k_y a_y + k_z a_z)} \quad (6d)$$

(모서리: (1), (2), (3), (4))

$$\tilde{\mathbf{U}}_{(1)^+} = \tilde{\mathbf{U}}_{(1)^-} e^{jk_x a_x}; \quad \tilde{\Phi}_{(1)^+} = \tilde{\Phi}_{(1)^-} e^{jk_x a_x} \quad (7a)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{(2)^+} = \tilde{\mathbf{U}}_{(2)^-} e^{jk_x a_x}; \quad \tilde{\Phi}_{(2)^+} = \tilde{\Phi}_{(2)^-} e^{jk_x a_x} \quad (7b)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{(3)^+} = \tilde{\mathbf{U}}_{(3)^-} e^{j(k_x a_x + k_y a_y)}; \quad \tilde{\Phi}_{(3)^+} = \tilde{\Phi}_{(3)^-} e^{j(k_x a_x + k_y a_y)} \quad (7c)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{(4)^+} = \tilde{\mathbf{U}}_{(4)^-} e^{j(k_x a_x + k_z a_z)}; \quad \tilde{\Phi}_{(4)^+} = \tilde{\Phi}_{(4)^-} e^{j(k_x a_x + k_z a_z)} \quad (7d)$$

(면: 1)

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1^+} = \tilde{\mathbf{U}}_{1^-} e^{jk_x a_x}; \quad \tilde{\Phi}_{1^+} = \tilde{\Phi}_{1^-} e^{jk_x a_x} \quad (8)$$

식 (6)-(8)은  $x$  축 방향으로의 주기성을 표현한 식인데, 단위 셀이  $y$  축과  $z$  축 방향으로도 주기성이 있기 때문에 이들 방향으로도 동일한 방법으로 주기 경계 조건을 적용한다.

식 (6)-(8)의 주기 경계 조건식에 포함된 물리량

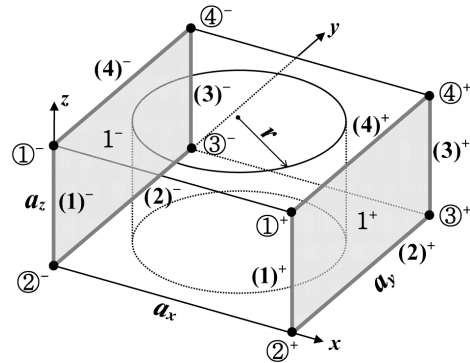


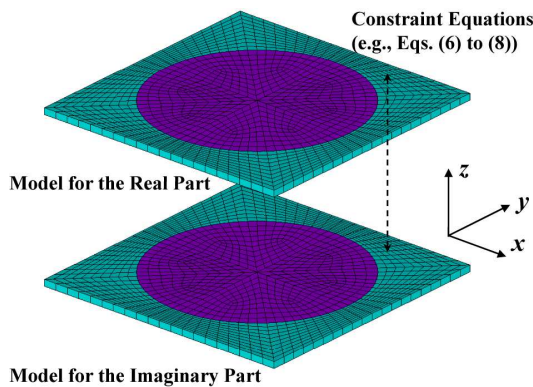
Fig. 2 Unit cell illustrated to demonstrate the imposition of periodic boundary conditions on planes parallel to the  $y$ - $z$  plane

들은 복소수로서 이를 실수부 및 허수부로 전개하여 표현하면 각 응답 변수의 실수부 및 허수부 사이의 관계를 파악할 수 있다. 따라서, 이 관계를 이용하여 파동 전파 특성을 살펴보기 위해서는 Fig. 3 과 같이 하나의 해석 모델에 실수부 및 허수부에 해당하는 동일한 2 개의 유한 요소 모델이 동시에 필요함을 알 수 있다.

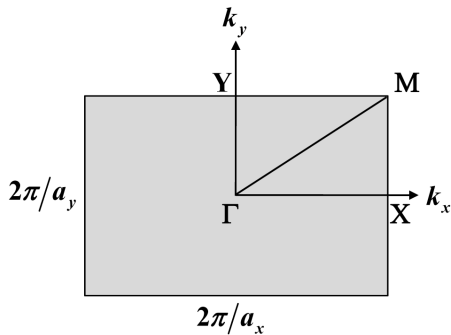
이제, 각 유한 요소 모델의 외부 절점의 변위 및 전압 자유도 사이에 식 (6)-(8)의 관계를 제한 조건(constraint)으로 부가한 후 식 (5)의 분산 특성 해석을 수행할 수 있다. 이를 위해서 파동 벡터(wave vector)의 값이 필요한데, 본 연구에서는  $x$ - $y$  평면과 평행하게 진행하는 체적 탄성파를 고려하였기 때문에, 주기 경계 조건에서  $k_z = 0$  을 대입한다. 따라서, 유한 요소 모델의  $z$  방향 두께는 임의의 값으로 선택할 수 있으나, 두께 방향의 요소망 밀도 및 그로 인한 수치 해석 시간을 고려하여 적절한 값을 선택한다. 주어진  $(k_x, k_y)$  조합에 해당하는 고유 진동수  $\omega$  를 식 (5)로부터 구하기 위해서는 Fig. 4 에 표시된 모든  $k_x \in [-\pi/a_x, \pi/a_x]$  와  $k_y \in [-\pi/a_y, \pi/a_y]$  에 대해서 분산 특성 해석을 수행해야 한다. 그러나, 이와 같은 주기 구조에서는 Fig. 4 의 특정 위치에 있는  $(k_x, k_y)$  의 조합만으로도 분산 특성(예를 들어 밴드 갭 특성)을 파악할 수 있음이 알려져 있다.<sup>(1)</sup> 따라서,  $a_x \neq a_y$  인 단위 셀의 경우 Fig. 4 에 제시된  $\Gamma$ -X-M- $\Gamma$ -Y-M 방향의 파동 벡터 값만을 고려하면 된다<sup>(8)</sup>. 참고로 Fig. 4 에 있는 파동 공간에서의 영역을 1 차 Brillouine 영역이라고 부른다. 실제 계산을 수행해야 하는  $(k_x, k_y)$  의 조합을 Table 1 에 정리하였다. 만약,  $a_x = a_y$  인 경우에는  $\Gamma$ -X-M 과  $\Gamma$ -Y-M 의 방향이 서로 같은 주파수 밴드 갭 특

**Table 1** Values of wave vectors corresponding to the directions shown in Fig. 4

	$k_x$	$k_y$
$\Gamma \rightarrow X$	$[0, \pi/a_x]$	0
$X \rightarrow M$	$\pi/a_x$	$[0, \pi/a_y]$
$M \rightarrow \Gamma$	$[0, \pi/a_x]$	$[0, \pi/a_y]$
$\Gamma \rightarrow Y$	0	$[0, \pi/a_y]$
$Y \rightarrow M$	$[0, \pi/a_x]$	$\pi/a_y$



**Fig. 3** Two identical finite element models corresponding to the real and imaginary parts, respectively

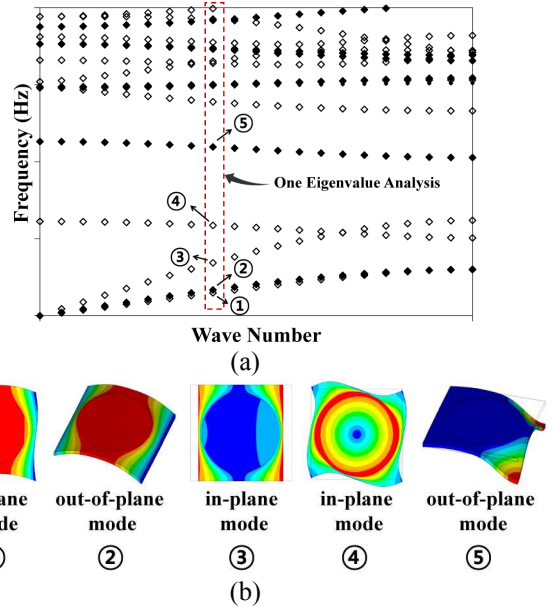


**Fig. 4** First irreducible Brillouine zone for  $a_x \neq a_y$

성을 가지므로  $\Gamma-X-M-\Gamma$  방향만을 고려한다.

### 3. 체적 탄성파의 모드 별 전파 특성 해석

2 절에서 제시한 유한 요소 모델링 기법을 이용하여 고유 모드 해석을 수행하면 압전 밴드 갭 물질 내 체적 탄성파의 3 차원 진행 모드에 대한 주파수 대역 특성을 얻을 수 있다. 그러나, 입사파의 모드 특성에 따라 가진 가능한 모드만을 선택하여 구하고자 하는 경우 면내 및 면외 방향의 거동을 구별할 수 있는 방법이 필요하다. 그런데, Fig. 5 에 보인 바와 같이 같은 면내 및 면외 모드라 할지라



**Fig. 5** (a) A typical dispersion curve for a given unit cell and (b) illustration of mode shapes at a certain wave number (e.g.,  $k_x = 0.4\pi/a_x$  and  $k_y = 0$ )

도 그 모드 형상이 주파수에 따라 크게 달라지기 때문에 모드 추적(mode tracking)을 위해 기존의 MAC(Modal Assurance Criterion)<sup>(20)</sup>을 사용할 수가 없다. 대안으로서, 면내 및 면외 방향의 변위 또는 변형 에너지<sup>(21)</sup> 등을 이용하는 것이 가능하나 전체 모드에 대한 해석을 수행 후 관련 모드를 추출해야 하기 때문에 계산량이 많고, 추출된 모드를 별도로 그룹화하는 작업이 역시 필요하기 때문에 매우 비효율적이다. 따라서, 아래에서는 식 (1)-(2)의 지배 방정식의 모드 간 비연성 특성을 유도하여 면내 및 면외 모드 별로 주파수 대역 특성을 구하기 위한 방법을 제안하고자 한다.

앞서 기술한 바와 같이  $x$ - $y$  평면상에서 진행되는 체적 탄성파만을 고려하는 경우  $z$  축 방향으로의 주기 경계 조건 외에도  $k_z = 0$  이 성립하므로,  $\partial(\bullet)/\partial z = 0$ 의 관계가 성립한다. 따라서, 이 관계를 이용하면, 식 (1)의 지배 방정식에서 압전 물질의 전기 분극 방향에 따라 모드 별 비연성 관계를 유도할 수 있다. 먼저,  $x$  축 방향으로 전기 분극(electric poling)된 압전 물질의 경우,  $y$ - $z$  평면상에서의 탄성 등방성을 고려하면 다음과 같다.

#### 1) $x$ 방향 분극

$$\begin{aligned} & \left( c_{111}^{(P)} \tilde{U}_{1,1}^{(P)} + c_{1122}^{(P)} \tilde{U}_{2,2}^{(P)} + e_{111} \tilde{\Phi}_{,1} \right)_{,1} \\ & + \left( c_{1212}^{(P)} (\tilde{U}_{1,2}^{(P)} + \tilde{U}_{2,1}^{(P)}) + e_{212} \tilde{\Phi}_{,2} \right)_{,2} = -\omega^2 \rho^{(P)} \tilde{U}_1 \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} & \left( c_{1212}^{(P)} (\tilde{U}_{1,2}^{(P)} + \tilde{U}_{2,1}^{(P)}) + e_{212} \tilde{\Phi}_{,2} \right)_{,1} \\ & + \left( c_{1122}^{(P)} \tilde{U}_{1,1}^{(P)} + c_{2222}^{(P)} \tilde{U}_{2,2}^{(P)} + e_{122} \tilde{\Phi}_{,1} \right)_{,2} = -\omega^2 \rho^{(P)} \tilde{U}_2 \end{aligned} \quad (9b)$$

$$c_{1313}^{(P)} \tilde{U}_{3,1}^{(P)} + c_{2323}^{(P)} \tilde{U}_{3,2}^{(P)} = -\omega^2 \rho^{(P)} \tilde{U}_3 \quad (10)$$

위의 식 (9) 및 (10)에서 알 수 있듯이 입사파가  $x$ - $y$  평면상에서 진행되는 경우 압전 운동 지배 방정식은 면내 및 면외 방향으로 비 연성된다. 모체로 사용되는 비 압전 물질은 위의 식에서 전기-역학 연성 계수를 제외한 식이 된다. 위의 식을 살펴 보면 면내 방향의 모드에서는 압전 효과가 나타나지만, 면외 방향의 모드에서는 압전 효과 없이 일반 탄성 물질 내에서의 거동과 같은 지배 방정식이 됨을 알 수 있다. 따라서, 식 (9)는 압전 효과를 고려한 평면 변형률 가정에 의한 2 차원 지배 방정식과 동일하다. 그리고, 식 (10)은 식 (1)에  $\partial(\cdot)/\partial z = 0$  및  $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 = 0$  의 조건을 고려한 경우와 같다. 따라서, 유한 요소법을 이용하여  $x$  축 방향으로 전기 분극된 압전 밴드 갭 구조물에 대한 체적 탄성과의 모드 별 전파 특성을 구하기 위해 다음과 같은 간단한 방법을 사용할 수 있다.

**면내 방향 모드(in-plane modes):**

- 2 차원 평면 변형률 압전 요소의 사용

**면외 방향 모드(out-of-plane modes):**

- 3 차원 구조 유한 요소 및  $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 = 0$

같은 방법으로  $z$  방향으로 전기 분극된 압전 물질의 경우에는 다음과 같은 비 연성된 지배 방정식을 얻을 수 있다.

**2) z 방향 분극**

$$\begin{aligned} & \left( c_{1111}^{(P)} \tilde{U}_{1,1}^{(P)} + c_{1122}^{(P)} \tilde{U}_{2,2}^{(P)} \right)_{,1} + c_{1212}^{(P)} (\tilde{U}_{1,2}^{(P)} + \tilde{U}_{2,1}^{(P)})_{,2} \\ & = -\rho^{(P)} \omega^2 \tilde{U}_1 \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} & c_{1212}^{(P)} (\tilde{U}_{1,2}^{(P)} + \tilde{U}_{2,1}^{(P)})_{,1} + \left( c_{1122}^{(P)} \tilde{U}_{1,1}^{(P)} + c_{1111}^{(P)} \tilde{U}_{2,2}^{(P)} \right)_{,2} \\ & = -\omega^2 \rho^{(P)} \tilde{U}_2 \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} & \left( c_{1313}^{(P)} \tilde{U}_{3,1}^{(P)} + e_{131} \tilde{\Phi}_{,1} \right)_{,1} + \left( c_{1313}^{(P)} \tilde{U}_{3,2}^{(P)} + e_{131} \tilde{\Phi}_{,2} \right)_{,2} \\ & = -\omega^2 \rho^{(P)} \tilde{U}_3 \end{aligned} \quad (12)$$

이 경우 식 (11)은 평면 변형률 가정에 의한 2 차원 지배 방정식과 동일하며, 압전 효과가 포함되어 있지 않다. 반면에 식 (12)는 식 (1)에  $\partial(\cdot)/\partial z = 0$  및  $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 = 0$  의 조건을 고려한 경우

와 같으며 식 (11)과 달리 압전 효과가 포함되어 있다. 따라서,  $z$  축 방향으로 전기 분극된 압전 밴드 갭 구조물에 대한 체적 탄성과의 모드 별 전파 특성은 다음과 같이 구한다.

**면내 방향 모드(in-plane modes):**

- 2 차원 평면 변형률 구조 요소의 사용

**면외 방향 모드(out-of-plane modes):**

- 3 차원 압전 유한 요소 및  $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 = 0$

위에서 제안한 방법을 사용하여 면내 방향의 모드에 대한 주파수 특성을 해석하는 경우 2 차원 요소 및 2 차원 주기 경계 조건만이 필요하므로 계산량이 상당히 줄어든다. 또한, 면외 방향 모드에 대해서도 비록 3 차원 유한 요소를 사용하지만 2 개의 자유도 ( $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$ )가 계산에서 제외되므로 계산량이 감소한다. 그러나, 계산량 이외에 모드 추출 및 그룹화 작업이 추가로 필요하지 않고 해석의 처음부터 면내 및 면외 방향의 모드에 대한 주파수 특성을 개별적으로 구할 수 있다는 것이 더욱 큰 장점이다.

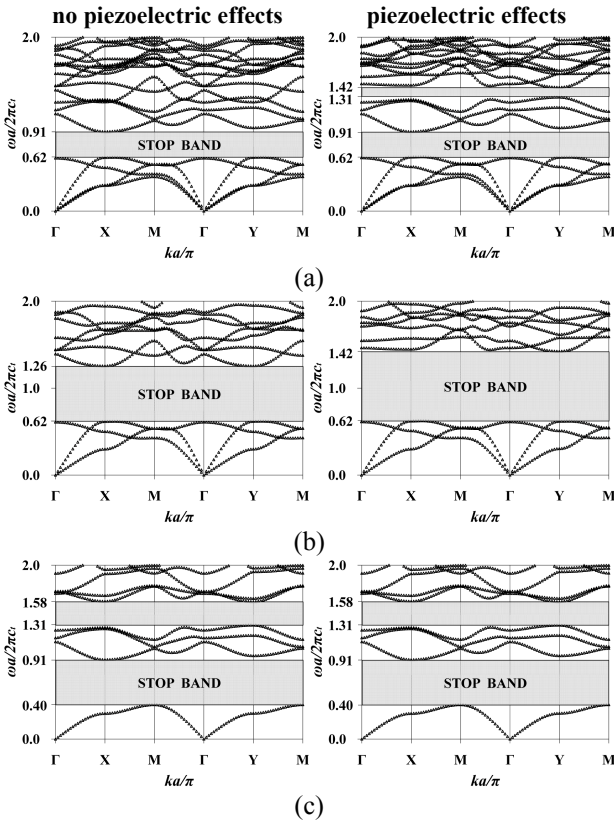
**4. 수치 예제**

앞서 제안한 방법을 적용하여 Fig. 1 에 나타난 압전 함유물을 갖는 주기적인 구조물에 대한 체적 탄성과의 주파수 대역 특성을 살펴 보았다. 해석은 상용 유한 요소 해석 소프트웨어인 ANSYS 를 사용하였으며(PLANE13 및 SOLID5 요소 사용), 3 차원 단위 셀에 관련된 치수는 각각  $a_x = 8$  mm,  $a_y = 8$  mm,  $a_z = 8$  mm 및  $r = 3.2$  mm 이다. 압전 밴드 갭 구조물을 구성하는 모체와 압전 물질의 물성치는 Table 2 에 나타난 바와 같다.<sup>(7)</sup>

수치 예제로서 압전 물질의 전기 분극이 입사파

**Table 2** Material properties of  $z$ -polarized piezoelectric inclusion(P) and non-piezoelectric matrix(N)

	(P)	(N)		(P)	(N)
$\rho$	7200	1150	$c_{1111}$	$13.2 \times 10^{10}$	$0.78 \times 10^{10}$
$e_{311}$	-6.5	0.0	$c_{3333}$	$12.2 \times 10^{10}$	$0.78 \times 10^{10}$
$e_{333}$	23.3	0.0	$c_{1313}$	$2.3 \times 10^{10}$	$0.157 \times 10^{10}$
$e_{131}$	17.0	0.0	$c_{1122}$	$7.65 \times 10^{10}$	$0.466 \times 10^{10}$
$\epsilon_{11}^S / \epsilon_0$	1700	4.5	$c_{1133}$	$7.81 \times 10^{10}$	$0.466 \times 10^{10}$
$\epsilon_{33}^S / \epsilon_0$	2130	4.5	$c_{1212}$	$2.78 \times 10^{10}$	$0.157 \times 10^{10}$

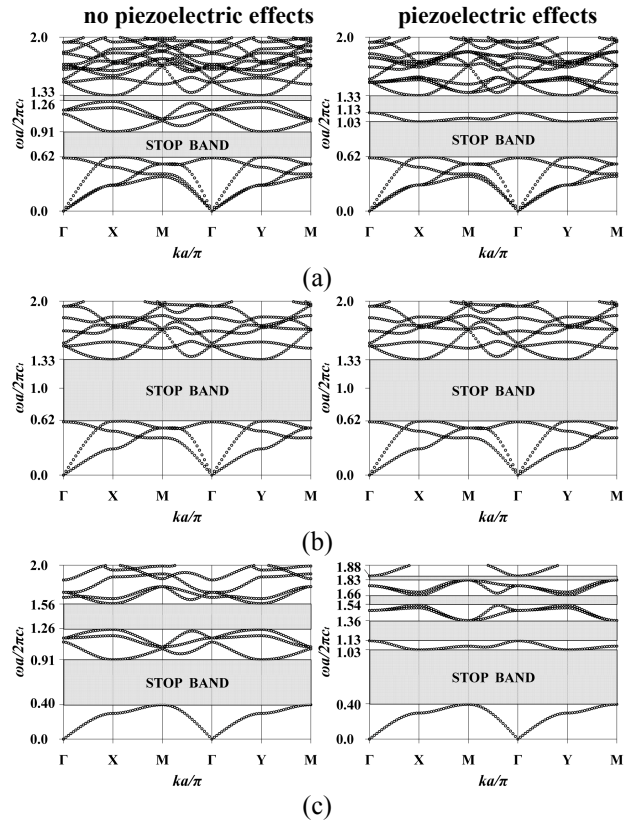


**Fig. 6** Frequency band gap characteristics for the phononic crystal with and without  $x$ -polarized piezoelectric effects: (a) in-plane and out-of-plane modes in combination, (b) in-plane modes, and (c) out-of-plane modes

의 파동 벡터 방향인  $x$ - $y$  평면과 평행 및 수직인 각각의 경우에 대해 주파수 밴드 갭 특성을 살펴 보았으며, 압전 물질의 전기 분극에 의한 강성 증가가 밴드 갭 특성에 미치는 영향을 비교하기 위해 압전 효과를 고려하지 않은 경우의 주파수 대역 특성을 함께 나타내었다. 수치 예제의 모든 결과는 앞서 기술된 모드 별 해석 방법을 이용하여 면내 및 면외 방향의 모드로 구분하여 나타내었다. 또한, 체적 탄성파의 각 모드에 대한 주파수를 무차원화하기 위해 모체로 사용된 물질의 횡파 속도인  $c_i$  ( $=\sqrt{c_{1313}^{(N)}/\rho^{(N)}}$ )를 사용하였다.<sup>(7,8)</sup>

4.1 전기 분극이  $x$ - $y$  평면과 평행인 경우

예제에서 사용된 압전 밴드 갭 구조물의 단위 셀 크기는  $a_x = a_y$  이지만, 압전 물질의 전기 분극이  $x$ - $y$  평면과 평행한 경우에는  $x$ - $y$  평면상에서 이방성을 가지므로  $a_x \neq a_y$  의 효과를 갖는다. 따라서, 주파수 대역 특성은 2.2 절에 기술한 바와 같이  $\Gamma$ - $X$ - $M$ - $\Gamma$ - $Y$ - $M$  에 대한 파동 벡터 방향을 모두 고려해야 한다. 이 경우에 대한 결과를 Fig. 6



**Fig. 7** Frequency band gap characteristics for the phononic crystal with and without  $z$ -polarized piezoelectric effects: (a) in-plane and out-of-plane modes in combination, (b) in-plane modes, and (c) out-of-plane modes

에 나타냈다. 이 그림에서 ‘STOP BAND’는 파동이 전파할 수 없는 주파수 대역으로 밴드 갭이 존재하는 영역을 나타낸다. 압전 효과가 없는 경우와 비교하면 압전 물질의 전기 분극이  $x$ - $y$  평면과 평행한 경우에는 면내 모드에 대한 특성 차이가 발생함을 알 수 있다. 즉,  $x$ - $y$  평면과 평행한 방향으로의 전기 분극으로 인한 압전 효과는 Fig. 6(b)에 보인 바와 같이 면내 방향 모드의 주파수 밴드 갭 대역을 25% 확장시켰다. 그러나, 면외 방향의 모드에 대해서는 압전 효과가 전혀 발생하지 않기 때문에 Fig. 6(c)에 나타낸 그래프는 동일하다. 이는 식 (10)에서 살펴본 바와 같다. 결과적으로 Fig. 6(a)에 보인 전체 모드에 대한 특성에서 압전 효과로 인해 밴드 갭 주파수 대역이 무차원화된 주파수  $\omega a/2\pi c_i = 1.31\sim 1.42$  에서 추가로 발생하였음을 알 수 있다. 또한, 압전 효과가 있는 밴드 갭 구조물에 대한  $\Gamma \rightarrow X$  방향의 면내 진행파 모드의 경우 밴드 갭 상단 경계 지역 주파수인  $\omega a/2\pi c_i = 1.42$  근처에서 파수에 따른 주파수 변화가 거의 없는 국부 공진 현상도 관찰된다.

4.2 전기 분극이  $x$ - $y$  평면과 수직인 경우

압전 물질의 전기 분극이  $x$ - $y$  평면과 수직인 경우 체적 탄성과의 면내 및 면외 모드에 대한 주파수 특성을 Fig. 7에 나타내었다. 이 경우 2.2 절에서 기술한 바와 같이  $\Gamma$ - $Y$ - $M$  방향에 대한 주파수 대역 특성이  $\Gamma$ - $X$ - $M$ 의 결과와 동일함을 알 수 있지만, 전기 분극이  $x$ - $y$  평면과 평행인 경우인 앞의 예제 결과와 비교하기 위해 추가하였다. 면내 모드에 대한 주파수 밴드 갭 특성은 Fig. 7(b)에 보인 바와 같이 압전 효과가 없는 경우와 같다. 이는 식 (11)의 결과와 일치한다. 그러나, Fig. 7(c)에 보인 바와 같이  $z$  축 방향의 전기 분극으로 인한 압전 효과는 해당 방향으로의 강성 증가를 가져오고 이는 고주파수 대역에서 주파수 밴드 갭 특성에 영향을 주었다. 특히,  $\omega a/2\pi c_i = 1$  부근에서의 특성이 매우 단순해졌으며, 압전 효과가 없는 경우  $\omega a/2\pi c_i = 0.40\sim 0.91$ 에서 생성된 주파수 밴드 갭이 약 24% 증가하고 추가로 밴드 갭 지역이 생성했음을 알 수 있다. 또한, 전체 모드에 대한 Fig. 7(a)의 결과에서도 주파수 밴드 갭은 각각 41%, 186% 증가하여 결과적으로 면외 방향의 모드에서만 아니라 전체 모드의 주파수 대역 특성에서도 밴드 갭 주파수 대역이 확장되었음을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 압전 물질이 함유된 주기 구조물에 대한 체적 탄성과의 분산 특성을 면내·외 모드 별로 효과적으로 해석하기 위한 유한 요소 모델링 기법을 제안하였다. 제안한 방법은 수치 예제에서 살펴 본 바와 같이 상용 유한 요소 소프트웨어에서도 구현이 가능하기 때문에 다양한 형태의 단위 셀을 갖는 주기 구조에도 적용될 수 있다. 제안한 모델링 기법을 이용하면 전통적인 유한 요소 모델로도 일반적인 주기 경계 조건을 갖는 음향/탄성과 주파수 조절 필터 및 메타 물질(meta-material)에 대한 연구를 효과적으로 수행할 수 있을 것이다.

후 기

본 연구는 2010 학년도 대구가톨릭대학교 연구비 지원에 의한 것임.

참고문헌

(1) Brillouin, L., 1946, *Wave Propagation in Periodic Structures*, McGraw-Hill Book Company, New York.

(2) Kushwaha, M. S., Halevi, P., Dobrzynski, L. and Djafari-Rouhani, B., 1993, "Acoustic Band Structure of Periodic Elastic Composites," *Phys. Rev. Lett. B*, Vol. 71, No. 13, pp. 2022~2025.

(3) Sigmund, O., Jensen, J. S., 2003, "Systematic Design of Phononic Band-Gap Materials and Structures by Topology Optimization," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, Vol. 361, pp. 1001~1009.

(4) Pennec, Y., Djafari-Rouhani, B., Larabi, H., Vasseur, J. and Hladky-Hennion, A.-C., 2009, "Phononic Crystals and Manipulation of Sound," *Phys. Status Solidi C*, Vol. 6, No. 9, 2080~2085.

(5) Armenise, M. N., Campanella, C. E., Ciminelli, C., Dell'Olio, F. and Passaro, V. M. N., 2010, "Phononic and Photonic Band Gap Structures: Modeling and Applications," *Physics Procedia*, Vol. 3, No. 1, pp. 357~364.

(6) Solymar, L. and Shamonina, E., 2009, *Waves in Metamaterials*, Oxford University Press, New York.

(7) Hou, Z., Wu, F. and Liu, Y., 2004, "Phononic Crystals Containing Piezoelectric Material," *Solid State Commun.* Vol. 130, pp. 745~749.

(8) Wang, Y., Li, F., Wang, Y., Kishimoto, K. and Huang, W., 2009, "Tuning of Band Gaps for a Two-Dimensional Piezoelectric Phononic Crystal with a Rectangular Lattice," *Acta. Mech. Sin.*, Vol. 25, pp. 65~71.

(9) Robillard, J.-F., Matar, O. B., Vasseur, J. O., Deymier, P. A., Stippinger, M., Hladky-Hennion, A.-C., Pennec, Y. and Djafari-Rouhani, B., 2009, "Tunable Magnetoelastic Phononic Crystals," *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 95, 124104.

(10) Vasseur, J. O., Deymier, P. A., Djafari-Rouhani, B., Pennec, Y. and Hladky-Hennion, A.-C., "Absolute Forbidden Bands and Waveguiding in Two-Dimensional Phononic Crystal Plates," *Phys. Rev. B*, Vol. 77, 085415.

(11) Wilm, M., Ballandras, S., Laude, V. and Pastureau, T., 2002, "A Full 3D Plane-Wave-Expansion Model for 1-3 Piezoelectric Composite Structures," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 112, No. 3, pp. 943~952.

(12) Kafesaki, M., 1999, "Multiple-Scattering Theory for Three-Dimensional Periodic Acoustic Composites," *Phys. Rev. B*, Vol. 60, pp. 993~1001.

(13) García-Pablos, D., Sigalas, M., Montero de Espinosa, F. R., Torres, M., Kafesaki, M. and García, N., 2000, "Theory and Experiments on Elastic Band Gaps," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 84, No. 19, pp. 4349~4352.

(14) Hou, Z. and Fu, X., 2004, "Calculation Method to Study the Transmission Properties of Phononic Crystals," *Phys. Rev. B*, Vol. 70, 014304.

(15) Langlet, P., Hladky-Hennion, A.-C. and Decarpigny, J.-N., 1995, "Analysis of the Propagation of Plane

- Acoustic Waves in Passive Periodic Materials Using the Finite Element Method," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 98, No. 5, pp. 2792~2800.
- (16) Aberg, M. and Gudmundson, P., 1997, "The Usage of Standard Finite Element Codes for Computation of Dispersion Relations in Materials with Periodic Microstructure," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 102, No. 4, pp. 2007~2013.
- (17) IEEE Standards Board, 1987, *IEEE Standard on Piezoelectricity*, IEEE, New York.
- (18) Lerch, R., 1990, "Simulation of Piezoelectric Devices by Two- and Three-Dimensional Finite Elements," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, Vol. 37, pp. 233~247.
- (19) Kim, J. E., Kim, D. S., Ma, P. S. and Kim, Y. Y., 2010, "Multi-Physics Interpolation for the Topology Optimization of Piezoelectric Systems," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 199, pp. 3153~3168.
- (20) Ewins, D. J., 2000, *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, Research Studies Press Ltd., England.
- (21) Ha, Y. and Cho, S., 2006, "Design Sensitivity Analysis and Topology Optimization of Eigenvalue Problems for Piezoelectric Resonators," *Smart Mater. Struct.*, Vol. 15, 1513~1524.