

변형률 구배 소성 저차 유한요소에 의한 크기 의존 구조 문제의 모델링 및 해석

박문식*† · 서영성* · 송 승*

* 한남대학교 기계공학과

Modeling and Analysis of Size-Dependent Structural Problems by Using Low-Order Finite Elements with Strain Gradient Plasticity

Moon Shik Park*†, Yeong Sung Suh* and Seung Song*

* Dept. of Mechanical Engineering, Hannam Univ.

(Received May 3, 2011 ; Revised July 18, 2011 ; Accepted July 18, 2011)

Key Words : Strain Gradient Plasticity(변형률 구배 소성), Taylor Dislocation Model(테일러 전위 모델), Strain Gradient Invariant(변형률 구배 불변량), Length Parameter(길이 파라미터), Strain Gradient Hardening(변형률 구배 경화), Non-local Constitutive Theory(비국부적 구성 이론), Averaged at Nodal Plastic Strain(절점 평균 소성 변형률)

초록: 미크론 단위의 크기를 갖는 구조물의 소성변형에서 나타나는 길이 효과를 고려하여 유한요소 해석을 하기 위하여 변형률 구배 소성이론을 이용하는 탄소성 유한요소 모델링 및 해석법을 제안하였다. 기존의 연구에서 주로 고차, 고자유도 및 혼합요소, 초 요소 등을 필요로 하였던 것에 비하여 본 논문에서는 이들을 배제하는 변위법 저차 평면 요소 및 삼차원 요소를 도입하였다. 이는 비선형 증분 해석의 프레임워크에서 계산된 소성 변형률의 절점 평균값으로 보간하여 적분점에서의 변형률 구배를 구하고 테일러 전위 모델에 의한 변형률 경화 구성방정식을 적용하므로써 가능하였다. 제안된 방법론은 선형 삼각 및 사각요소, 선형 사면체, 육면체 요소에 대해 적용되었으며 마이크로 굽힘, 마이크로 비틀림, 마이크로 기공과 같은 대표적인 길이 스케일 문제를 통하여 수치적으로 검증하였다. 본 논문에서 제안한 방법은 계산이 매우 쉬우면서도 실험 값들과 비교해 볼 때, 변형률 구배 소성이론 즉, 길이 효과를 잘 나타내어 주었다.

Abstract: An elasto-plastic finite element method using the theory of strain gradient plasticity is proposed to evaluate the size dependency of structural plasticity that occurs when the configuration size decreases to micron scale. For this method, we suggest a low-order plane and three-dimensional displacement-based elements, eliminating the need for a high order, many degrees of freedom, a mixed element, or super elements, which have been considered necessary in previous researches. The proposed method can be performed in the framework of nonlinear incremental analysis in which plastic strains are calculated and averaged at nodes. These strains are then interpolated and differentiated for gradient calculation. We adopted a strain-gradient-hardening constitutive equation from the Taylor dislocation model, which requires the plastic strain gradient. The developed finite elements are tested numerically on the basis of typical size-effect problems such as micro-bending, micro-torsion, and micro-voids. With respect to the strain gradient plasticity, i.e., the size effects, the results obtained by using the proposed method, which are simple in their calculation, are in good agreement with the experimental results cited in previously published papers.

1. 서 론

금속재료의 강도는 결정구조, 기공, 전위, 결정립계, 크랙 등의 존재 형태 및 분포도와 같은 재료의 미세구조에 따라 달라지게 된다. 전통적 소

성이론에서 응력은 재료의 한 절점에서 변형률과 그 이력의 함수로 나타내어진다. 그러나 변형률장의 파장이 미세구조 크기 정도의 수준이 되면 이와 같은 전통적 소성역학의 가정을 벗어나게 된다. 즉, 응력은 절점의 변형률만의 함수가 아니고 주변의 변형률의 분포에 따라 증가된다. 이를 비국부적(non-local) 또는 변형률 구배(strain gradient) 소성이론이라 부른다. 미세구조 즉, 미크론 정도 크

† Corresponding Author, ms.park@hnu.kr
© 2011 The Korean Society of Mechanical Engineers

기의 범위에서 불균일 변형률 장이 형성되는 원인에는 하중의 형태 외에도 미세조직에서 전위밀도와 결정립계의 형태, 복합재에서의 함유 입자 또는 분리 층과 같은 기하학적 요인이 있다. 이러한 변형률 구배의 영향은 여러 가지 마이크로-나노 실험에 의해서 밝혀지고 있다. 그러나 아직까지 변형률 구배를 고려한 범용 유한요소법과 같은 효율적인 수치해법은 드문 실정이다.

변형률 구배 연속체 이론 기반의 유한요소 해석을 위해서는 새로운 지배방정식과 경계조건, 구성방정식을 포함하는 변분 원리 즉, 프레임워크의 선택이 중요하다. 선택된 프레임워크에 따라 요소의 개발과 변위법 또는 혼합법 등의 사용이 달라진다. 변형률 구배 이론은 쌍응력(couple stress)과 곡률텐서(curvature tensor)를 일 켈레(work conjugate)로 포함하는 Cosserat⁽¹⁾ 선형 탄성 연속체 이론으로부터 시작되었다. 여기서 쌍응력은 단위면적 당 모멘트이며 Cauchy 응력은 비대칭이 되고 고차 자연경계조건이 수반된다. 곡률텐서는 회전의 구배에 해당된다. 후에 Toupin,⁽²⁾ Mindlin,⁽³⁾ Koiter⁽⁴⁾ 등은 회전의 구배뿐만 아니라 신장 변형률의 구배를 포함하는 일반적인 변형률 구배 이론을 개발하였다. 여기서는 고차 응력과 고차 변형률 즉, 변형률 구배를 일 켈레로 포함하며 고차 응력을 포함하는 평형방정식과 자연 경계조건이 도출된다. 이 때 구성방정식은 변형률 구배를 포함하는 새로운 변형 에너지 밀도를 정의함으로써 얻어질 수 있다. 변형률 구배 탄성론 해석은 Gao 등⁽⁵⁾과 Wang 등⁽⁶⁾에서 확인할 수 있다.

많은 다양한 마이크로 실험을 통하여 금속재료의 소성에서 뚜렷한 크기 효과(size effect)가 나타남이 밝혀졌으며 이를 소성에서의 변형률 구배의 영향으로 다루었다. 대표적인 실험으로는 마이크로 비틀림,⁽⁷⁾ 마이크로 압입,⁽⁸⁾ 마이크로 굽힘,⁽⁹⁾ 금속기지 복합재⁽¹⁰⁾ 등이 있다. 한편 소성 변형률 구배는 역학적으로 기하학적 필수전위(geometrically necessary dislocation)의 밀도와 비례한다.

금속에서의 변형률 구배 소성이론은 변형률 구배 경화(strain gradient hardening)의 계산과 변형률 구배 항을 갖는 J_2 소성이론에의 접목으로 전개되고 있다. Aifantis⁽¹¹⁾는 하나의 변형률 구배 불변량(invariant)으로 경화를 고려하였다. 따라서 한 개의 길이 스케일(length scale)을 갖는다. 길이 스케일은 변형률 구배와 곱해 줌으로서 변형률에 더해 줄 수 있도록 단위차원을 맞추어 주는 값이다. 즉, 변형률에 길이 스케일과 변형률구배를 곱하여 더해

주면 일반화 유효 소성변형률(generalized effective plastic strain)을 얻는다.

후에 Fleck 과 Hutchinson⁽¹²⁾은 일반 소성 변형률 구배 이론을 정립하고 세 개의 길이 스케일을 갖는 모델을 제안하였다. 이들은 수학적 과정으로 변형률 구배를 세 개의 성분으로 직교분해하고 그 분해 성분들의 불변량을 유도했으므로, 따라서 세 개의 길이 스케일을 도입하여 유효 소성변형률을 계산한 것이다. 길이 스케일 중 두 개는 회전 성분의 구배이며, 나머지 하나는 신장 성분의 구배에 해당한다. 그러나 길이 스케일 값은 실험에 의해서 구해져야 한다. Gao 등⁽¹³⁾은 세 개의 또 다른 변형률 구배 불변량을 도입하되 몇 가지 하중조건과 이론적 전위모델을 이용하여 하나의 불변량만으로 표현이 가능한 경화모델을 제시하였다. 그들은 Taylor 경화 모델을 적용하여 변형률 구배 경화 구성방정식 즉, 항복응력-변형률-변형률 구배의 관계식을 얻었다.

이러한 변형률 구배 소성이론들은 주로 해석적 방법으로 계산되고 실험에 의한 결과들과 비교되었다.⁽¹⁴⁾ 반면에 변형률 구배 소성이론의 유한요소법의 적용은 제한적이라 할 수 있는데 이는 주로 유한요소법에 적용할 변분 항에 고차 응력 및 고차 변형률이 포함되므로 이를 위한 유한요소와 변위법의 적용이 어려운 점에 기인한다. 즉, 변위뿐만 아니라 회전 및 변위의 미분 값을 연속하게 할 수 있는 C^1 연속인 요소가 거의 없고 고차 경계조건 문제를 효과적으로 풀기 어려운 점 때문이었다.

Shu 등⁽¹⁵⁾은 Fleck 과 Hutchinson⁽¹²⁾ 변형률 구배 이론을 프레임워크로 쓰는 선형탄성 유한요소를 개발하였다. 여기서는 변위와 변위의 미분을 절점 자유도로 갖고, 응축 고차응력 항을 요소 자유도로 갖는 혼합요소를 채택하였다. 요소는 탄성문제의 2 차원 삼각형 또는 사각형으로 제한되며 요소당 자유도는 28~70 개이다. 혼합요소의 특성으로 소성영역으로의 확장은 불가능하다. Soh 와 Wanji⁽¹⁶⁾는 하나의 길이 스케일을 포함하는 쌍응력 이론(couple stress theory)을 프레임워크로 하는 변위법 기반의 선형 탄성 삼각형 유한요소를 개발하면서 상수 변형률(constant strain) 뿐만 아니라 상수 곡률(constant curvature)을 표현하는 조각시험(patch test)을 고안하였다. 변위와 회전을 절점자유도로 갖는 6 절점 18 자유도의 여러 형상함수의 조합의 시도에도 불구하고 오직 하나 만이 초과 영 에너지 모드(spurious zero energy mode)가 없고 조각시험

을 통과하였다.

한편 변형률 구배의 계산에 있어서 Gao 와 Huang⁽¹⁷⁾은 변형률의 직접 미분을 쓰지 않고 대신, 작은 주변 영역을 설정한 후 변형률 장을 전개하여 적분하고 그 값을 적분 영역의 체적으로 나누어 주는 일종의 가중 평균의 방법을 이용하였다. 따라서 고차 응력을 사용하지 않고 전통적인 연속체 이론의 프레임워크로 처리가 가능했다. 단, 여기서는 고차 자연 경계조건은 고려되지 못한다. 같은 맥락으로 Abu Al-Rub 과 Voyiadjis⁽¹⁸⁾은 유한요소에서 그 주변의 여러 요소들을 포함하는 일종의 초 요소(super element)를 정의하고 초 요소에서 형상함수를 적용하고 초 요소에서 적분하여 변형률 구배를 계산함으로써 전통적인 소성이론 프레임워크의 유한요소를 개발하였다. Byon 과 Lee⁽¹⁹⁾는 한 요소의 주변으로 요소 집단을 설정하고 요소 집단에 대한 변형률 장을 최소 자승법에 의해 곡면으로 회귀분석하여 구한 후, 그 곡면을 미분하는 방법으로 변형률 구배를 계산하고 적용하였다.⁽²⁹⁾ 그러나 이러한 방법들은 정규 격자망(regular mesh)을 가진 평면요소에 제한되며 삼차원 확장에는 실용적이지 못하였다.

본 논문에서는 전통적 소성이론에서 가장 많이 사용되는 선형 유한 요소 즉, 3 절점 삼각형, 4 절점 사각형, 4 절점 사면체 및 8 절점 육면체요소와 같은 저차 유한요소에 변형률 구배 소성효과를 고려할 수 있는 방법을 제안하고자 한다. 그리고 격자망 형상에 무관하며 초 요소의 도입을 배제하고 최대한 전통적 소성이론 프레임워크에 접목하고자 한다. 그런데 상수 변형률 요소라고도 알려진 3 절점 삼각형 요소에서는 그 내부에서 변형률은 상수 값이 되고 따라서 변형률 구배는 항상 영이 되므로 불가능하였다. 그러나 변형률의 후처리에서 평활화에 사용되는 절점평균 값을 이용한다면 변형률 구배는 계산이 될 수 있다. 즉, 평활화에 의해 얻어진 절점에서의 변형률 값과 요소 내에서 형상함수의 구배행렬을 이용하여 적분점에서의 모든 변형률 구배 및 그 불변량을 계산할 수 있게 된다. 이 간단한 방법은 Gao 와 Huang⁽¹⁷⁾의 가중 평균법의 다른 형태 또는 Han 등⁽³⁰⁾의 패치 투영법의 최소형태라고 볼 수 있으며, 가장 쉽고도 효율적으로 3 차원으로 확장 적용이 가능하다.

2. 변형률 구배 소성 유한요소 계산

2.1 변형률 구배의 계산

변형률 구배 소성이론에서 계산이 필요한 변형

률 구배는 사용될 변분 프레임워크에 따라 각각 다른 변형률 구배 불변량 값이다. Aifantis⁽¹¹⁾ 및 일부 연구자들은⁽²⁰⁾ 하나의 길이 스케일을 갖는 다음의 불변량을 사용한다.

$$\bar{\eta}_A = \sqrt{\bar{\epsilon}_{p,k} \bar{\epsilon}_{p,k}} = \sqrt{\nabla^2 \bar{\epsilon}_p} \quad (1)$$

여기서 $\bar{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon_{ij}^p \epsilon_{ij}^p}$ 는 등가 소성변형률이다. 한편 Fleck 과 Hutchinson⁽²¹⁾은 세 개의 길이 스케일을 갖는 세 개의 불변량을 사용하였다.

$$\bar{E}_p = (\bar{\epsilon}_p^\mu + \ell_1^\mu \bar{\eta}_1^\mu + \ell_2^\mu \bar{\eta}_2^\mu + \ell_3^\mu \bar{\eta}_3^\mu)^{1/\mu} \quad (2)$$

여기서 \bar{E}_p 는 변형률 구배의 효과를 고려한 일반화 유효 소성변형률 (generalized effective plastic strain), μ 는 2, 불변량들은 $\bar{\eta}_l = \sqrt{\eta_{ijk}^{(l)} \eta_{ijk}^{(l)}}$ 이며⁽²¹⁾ 변형률 구배의 성분은 $\rho_{ijk} = \epsilon_{ijk}^p$ 라고 하면 다음과 같다.

$$\eta_{ijk} = \rho_{kij} + \rho_{kji} - \rho_{ijk} \quad (3)$$

식 (2)와 같은 일반화 유효 소성변형률을 반영하는 변형률 구배 소성이론에서의 가상일은 다음과 같다 Fleck 과 Willis 외⁽²⁶⁾ 후속 연구들에⁽²⁷⁾ 따르면 다음과 같다.

$$\delta w^p = q_{ij} \delta \epsilon_{ij}^p + \tau_{ijk} \delta \epsilon_{ijk}^p \quad (4)$$

여기서 q_{ij} 와 τ_{ijk} 는 각각 소성변형률과 소성변형률 미분에 대한 일 켈레 응력 및 고차응력이며 $q_{ij} = \sigma'_{ij} + \tau_{ijk}$ 인 관계에 있다. σ'_{ij} 는 편차 Cauchy 응력이다. 여기서 항복조건은 일반화 유효 소성변형률 $\bar{E}_p = \bar{E}_p(\bar{\epsilon}_p, \bar{\eta}_l)$ 와 일반화 유효 응력 (generalized effective stress) $\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}(q_{ij}, \tau_{ijk})$ 로서 $f(\bar{\Sigma}, \bar{E}_p) = 0$ 와 같이 표현된다. 문헌⁽²¹⁾에 의하면 $\bar{\eta}_1$ 는 신장변형 성분 위주의 구배를 나타내며 $\bar{\eta}_2$ 와 $\bar{\eta}_3$ 는 곡률텐서 $\chi_{ij} = e_{ikl} \rho_{jlk} = \frac{1}{2} e_{ikl} \eta_{jkl}$ 로 계산되는 순수 회전변형 성분의 구배이다. 여기서 e_{ikl} 은 교차텐서(permutation tensor)이다. 초기의 쌍응력 이론에서는 다음의 등가곡률을 변형률 구배 불변량으로 이용하기도 하였다.⁽⁷⁾

$$\bar{\chi} = \sqrt{\frac{2}{3} \chi_{ij} \chi_{ij}} \quad (5)$$

그러나 Gao 등⁽¹³⁾은 하나의 길이 스케일을 갖는 다음과 같은 불변량을 사용한다.

$$\bar{\eta}_G = \frac{1}{2} \sqrt{\eta_{ijk} \eta_{ijk}} \quad (6)$$

일반적인 변형률 구배에 대한 식 (2)와 (6) 같은 불변량의 계산에서는 편차(deviatoric) 변형률 구배를 사용하지만 소성 변형의 비압축성($\epsilon_{kk}^p = 0$)으로부터 변형률 구배는 $\eta_{ikk} = \rho_{kki} = 0$ 이므로 $\eta'_{ijk} = \eta_{ijk}$ 이 되고 이를 이용한 것이다. 식 (6)를 이용하는 변형률구배 소성이론에서는 가상일은 Guo 등⁽²⁸⁾에 의하면 다음과 같다.

$$\delta w^p = \sigma'_{ij} \delta \epsilon_{ij}^p = \bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon}_p \quad (7)$$

여기서 $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}$ 는 유효 응력(effective stress)이다. 즉, 전통적 소성이론과 동일한 변분 프레임워크를 사용하되 항복조건식, $f(\sigma'_{ij}, \bar{\epsilon}_p, \bar{\eta}) = 0$ 에서 소성변형률 구배를 고려해 준다.

따라서 어떤 불변량과 변분 프레임워크를 사용하든지 상관없이 기본적으로 $\rho_{ijk} = \epsilon_{ij,k}^p$ 의 계산이 필요하게 된다. 여기서는 ρ_{ijk} 의 계산방법을 제안한다.

탄소성 유한요소해석에서는 요소의 적분점에서 소성 이론에 의해 소성변형률이 계산된다. 그리고 광역 평활화의 관점에서 절점에서의 소성변형률을 구할 수 있는데 가장 보편적인 평활화 방법은 절점 평균이다. 절점 평균 소성변형률을 이용한 ρ_{ijk} 의 계산은 다음과 같이 요소의 형상함수의 구배를 이용하여 구한다.

$$\rho_{ijk} = \frac{\partial \epsilon_{ij}^p}{\partial x_k} \cong \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{a=1}^{Nen} N_a \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_a \right) = \sum_{a=1}^{Nen} N_{a,k} \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_a \quad (8)$$

여기서 $\langle \epsilon_{ij}^p \rangle_a$ 는 절점 a 에서의 절점 평균값이며 N_a 는 절점 a 의 형상함수, Nen 은 요소의 절점개수이다. 등 매개변수 유한요소에서 사용하는 형상함수 구배 행렬 [B], 자코비 행렬 [J] 를 이용하면 식 (8)은 다음과 행렬로 얻어진다.

$$[\rho] = [J]^{-1} [B] [\epsilon^p] \quad (9a)$$

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho_{111} & \rho_{221} & \rho_{331} & \rho_{121} & \rho_{231} & \rho_{131} \\ \rho_{112} & \rho_{222} & \rho_{332} & \rho_{122} & \rho_{232} & \rho_{132} \\ \rho_{113} & \rho_{223} & \rho_{333} & \rho_{123} & \rho_{233} & \rho_{133} \end{bmatrix}_{Nsd \times Nst} \quad (9b)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \cdots & N_{Nen,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \cdots & N_{Nen,\eta} \\ N_{1,\zeta} & N_{2,\zeta} & \cdots & N_{Nen,\zeta} \end{bmatrix}_{Nsd \times Nen} \quad (9c)$$

여기서 ξ, η, ζ 는 요소 좌표계이고 Nsd 는 평면 요소의 경우는 2, 삼차원요소의 경우는 3 이고 Nst 는 각 요소 마다 사용되는 변형률 성분의 개수를 의미한다. 식 (9)에 의해 구해진 변형률구배의 성분들로부터 식 (3)과 (5), (6), (2)에 대입하여 직접 불변량을 구할 수 있게 된다. 이 때, 요소마다 적분점 적용을 달리 할 수도 있다. 즉, 감차적분을 사용한다면 식 (9)를 감차적분점에서 구해 주면 된다. 소성해석에서 일반적으로 감차적분을 사용하는 것이 효과적이므로 변형률 구배 소성해석에서도 감차적분을 사용하는 것이 효과적이다.

2.2 변형률구배 소성 이론

여기서는 유한요소법의 변위법과 변형률 구배 경화 구성방정식을 적용하는 소성이론을 설명한다. 길이 스케일과 변형률 구배 불변량을 적용하는 방법은 전 절에 기술한 바와 같이 여러 가지가 있다. 그 중에서도 식 (6)의 $\bar{\eta} = \bar{\eta}_G$ 는 실험치가 필요 없고 하나의 길이 스케일을 가지고도 구성방정식을 적용할 수 있으므로, 본 연구에서는 이를 기준으로 기술한다. Taylor 전위 모델에 근거한 구성방정식은 다음과 같다.⁽¹³⁾

$$\sigma = \alpha m G b \sqrt{\rho_{ssd} + \rho_{gnd}} \quad (10)$$

여기서 ρ_{ssd} , ρ_{gnd} 는 통계적 축적(statistically stored) 전위밀도와 기하학적 필수(geometrically necessary) 전위밀도이며 m, G, b 는 각각 Taylor 계수(fcc 금속의 경우 3.06), 전단탄성계수, Burgers 벡터의 크기이며 α 는 1 크기 정도의 경험수치이다. 한편 단축인장시험과 같이 $\rho_{gnd} = 0$ 인 경우의 응력-변형률 선도를 $\sigma = \sigma_u = \sigma_f(\epsilon_p)$ 라고 하면 $\rho_{ssd} = (\sigma_u / \alpha m G b)^2$ 이고, 기하학적 필수전위는 $\rho_{gnd} = \bar{\Gamma} \bar{\eta} / b$ 이므로 ($\bar{\Gamma}$ 는 Nye 계수로서 fcc 금속은 1.85~1.90⁽²³⁾) 식 (10)은 다음의 식이 된다.

$$\sigma = \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_r^2 \ell \bar{\eta}} = \sqrt{\sigma_u^2 + \Omega \bar{\eta}} \quad (11)$$

여기서 $\ell = (\alpha m G / \sigma_r)^2 \bar{r} b$ 는 길이 스케일에 해당한다. 식 (11)에서 $\Omega = (\alpha m G)^2 \bar{r} b$ 이다.

전통적인 J_2 소성이론을 접목하고 탄소성 유한요소해석에 적용하기 위해서는 소성 유동이론을 이용한다. 유동이론에서 변형률 증분은 탄성(e)과 소성(p)으로 분해된다.

$$d\epsilon'_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (12)$$

여기서 $d\epsilon'_{ij} = d\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} d\epsilon_{kk} \delta_{ij}$ 인 편차(deviatoric) 변형률 증분이며, 소성변형률은 비압축성 조건 $d\epsilon_{kk}^p = 0$ 이 만족된다. 연합(associative) 유동법칙에 따라 소성변형률 증분은 다음과 같다.

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \sigma'_{ij} \quad (13)$$

여기서 $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ 는 편차응력이다. von-Mises 항복조건은 식 (11)을 이용하면 다음과 같다.

$$f(\sigma'_{ij}, \bar{\epsilon}_p, \bar{\eta}) = \bar{\sigma} - \sigma(\bar{\epsilon}_p, \bar{\eta}) = 0 \quad (14)$$

여기서 $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}$, $\bar{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon_{ij}^p \epsilon_{ij}^p}$ 로서 각각 유효 응력, 유효 소성변형률이다. 식 (13)과 (14)로부터 다음과 같이 비례 계수 $d\lambda$ 를 구할 수 있다.

$$d\lambda = \frac{\sqrt{\frac{d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p}}{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}}{\frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}_p}{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{d\sigma}{(d\sigma/d\bar{\epsilon}_p) \sigma} \quad (15)$$

이제 식 (15)과 (13), $d\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} d\sigma'_{ij}$ 을 (12)에 대입하고 정리하면 다음의 탄소성 구성 관계식을 얻는다.

$$d\sigma'_{ij} = 2G(d\epsilon'_{ij} - \frac{3}{2} \frac{d\sigma}{(d\sigma/d\bar{\epsilon}_p) \sigma} \sigma'_{ij}) \quad (16)$$

식 (16)은 $d\sigma/d\bar{\epsilon}_p$ 에 대한 계산을 제공하면 표준 J_2 소성이론과 동일하므로 Abaqus 와⁽²⁴⁾ 같은 상용프로그램을 그대로 활용할 수 있다. Abaqus 에서는 임의의 사용자 경화식을 모델링 할 수 있도록 UHARD 라는 사용자 서브루틴을 제공하므로 식 (11)을 만들어 접목시킨다.

이제 식 (11)을 경화모델로 적용하고 식 (16)의 적용을 위해서는 $d\sigma/d\bar{\epsilon}_p$ 을 계산하여 UHARD 에 포함하여야 한다. 식 (11)로부터 다음을 얻는다.

$$2\sigma d\sigma = 2(\sigma_u \sigma'_u + \frac{1}{2} \Omega \bar{\eta}') d\bar{\epsilon}_p \quad (17)$$

식 (17)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d\sigma}{d\bar{\epsilon}_p} = \frac{\sigma_u}{\sigma} \sigma'_u + \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\sigma} \bar{\eta}' \quad (18)$$

여기서 $\sigma'_u = d\sigma_u/d\bar{\epsilon}_p$, $\bar{\eta}' = d\bar{\eta}/d\bar{\epsilon}_p$ 이다. 예를 들어 재료모델로서 Hollomon 식 $\sigma_u = K \epsilon^n$ 을 사용하면, 그 미분은 다음과 같다.

$$\sigma'_u = \frac{nE}{(1-n + \bar{\epsilon}_p E / \sigma_u)} \quad (19)$$

한편 $\bar{\eta}'$ 는 엄밀한 계산이 어려우므로 여기서는 증분에 의한 비선형 해석의 프레임워크에서 현 단계와 이전 단계의 값을 이용하여 $\bar{\eta}' \cong \Delta \bar{\eta} / \Delta \bar{\epsilon}_p$ 와 같이 근사법으로서 수치 미분을 사용한다. $\bar{\eta}'$ 를 더 정확히 계산하려는 시도는 문헌⁽¹³⁾을 참고하면 된다. 본 제안에서는 여러 예제를 통하여 증분 비선형 해석을 제공하는 Abaqus 에 근사법을 적용하였을 때, 수렴 속도에는 다소 영향을 미치나 식 (11)을 엄밀히 적용하므로 정밀도에는 차이가 없음을 보였다.

3. 수치 시험

3.1 마이크로 굽힘

마이크로 굽힘 문제는 Stölken 과 Evans⁽⁹⁾가 실험을 통하여 Fleck 과 Hutchinson⁽¹²⁾의 변형률 구배 소성모델의 길이 스케일을 구하면서 많은 연구자들에 의해 인용되고 있는 크기효과를 보여주는 대표적인 문제이다. 그들은 회전 성분 구배가 지배적인 순 니켈 포일의 굽힘에서 복합 길이 스케일을 약 $5.3 \mu\text{m}$ 로 구하였다. 후에 Shrotriya 등⁽²²⁾은 별도의 실험에서 이 값을 $5.6 \mu\text{m}$ 로 구하고 회전 구배 성분 식 (5)에 해당하는 길이 스케일은 순 구리의 경우와 비슷한 약 $5 \mu\text{m}$ 이라고 하였다.

본 논문에서는 전 절에서 설명한 변형률 구배 소성에 의한 유한요소 해석을 마이크로 굽힘에 적용하고 문헌의 실험 값과 비교하고자 한다. 재료

는 Stölken 과 Evans⁽⁹⁾의 니켈 호일을 사용하며 두께는 12.5, 25, 50 μm 의 세 가지이다. 탄성계수는 $E = 210\text{GPa}$, 프와송 비는 $\nu = 0.25$, 진응력-진변형률 소성거동은 $\sigma_u = \sigma_0 + \sigma_r \varepsilon_p^{1.0}$, 식 (11)의 길이 스케일은 $\ell = 5.683\mu\text{m}$ 이다. 이 때, $\alpha = 0.5$, $m = 3.08$, $\bar{r} = 1.85$, $b = 0.25\text{nm}$ 를 사용하였다. 여기서 σ_0 와 σ_r 은 문헌과⁽⁹⁾ 똑 같은 값을 사용하였다. 경계조건은 다음 식의 평면변형률 굽힘장의 경계에서의 값이다.

$$u_1 = -\kappa x_1 x_2; u_2 = \kappa \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}; u_3 = 0 \quad (20)$$

여기서 κ 는 보의 중립축의 곡률이다. 강소성의 경우에는 소성 변형률 구배의 불변량은 $\bar{\eta} = \kappa$ 및 $\bar{\chi} = \sqrt{2/3} \kappa$ 이다. 유한요소 모델링은 Fig. 1(a)에서와 같이 길이(L)는 두께 정도로 적절히 임의로 하였고 메쉬는 4 절점 QUAD 요소로서 길이방향으로 10, 두께로는 20 등분 하였다. 기하학적 비선형성을 고려하였고 회전변위 제어를 통한 100 개의 고정 증분을 이용한 유한요소 해석의 결과는 Fig. 1(b)의 실선과 같다. 여기에 Stölken 과 Evans⁽⁹⁾의 실험치를 함께 표시하였는데 유한요소 해석이 문헌의 실험치의 신뢰도 범위 이내로 잘 맞아 든다. 그림에서 $\varepsilon_b = \kappa h/2$ 는 두께 표면의 인장 변형률이며 $m^* = 4M/(h^2 \sigma_0)$ 는 굽힘 모멘트를 무차원화시킨 값이다. 즉 무차원 모멘트는 유한요소 해석으로부터 얻은 모멘트 M 으로 부터 구하며 다음과 같이 초기 항복응력에 의한 항과(m_0^*) 가공경화 및 변형률 구배 경화에 의한 식 (11)을 적용한 항(m_1^*)으로 구분된다.

$$m^* = \frac{16}{\sqrt{3}\sigma_0} \int_0^{1/2} \sigma \xi d\xi = m_0^* + m_1^* \quad (21)$$

여기서 $m_0^* = 2/\sqrt{3}$ 이며 소성 변형률 구배를 고려하지 않은 전통적 소성이론에 의한 m_1^* 값은 모든 두께에 대해 동일하며 다음과 같이 구해진다.

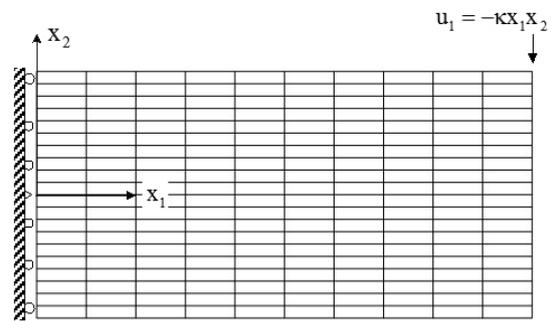
$$m_1^* = \varepsilon_b^n \frac{\sigma_r}{\sigma_0} \frac{2^{n+2}}{(2+n)3^{(n+1)/2}} \quad (22)$$

식 (22)를 Fig. 1(b)의 점선으로 나타내었으며 유한요소해석을 통해서도 동일한 결과를 얻었다. 따라서 마이크로 굽힘의 경우 본 논문의 방법론에

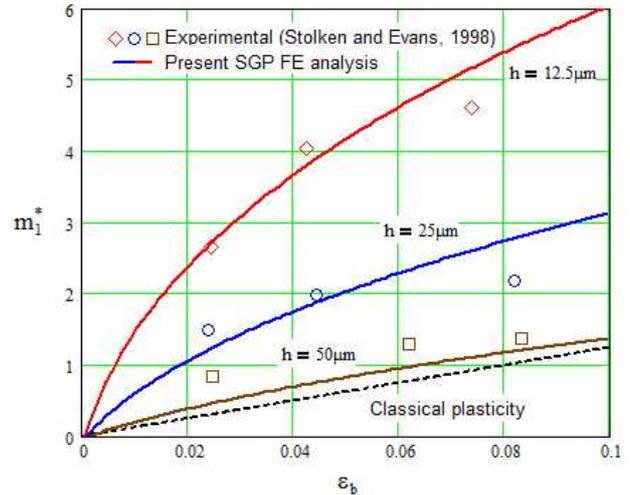
의하여 소성 변형률 구배를 고려한 결과를 얻었으며 두께가 얇아짐에 따라 길이효과를 보여주는 실험치와 잘 일치한다.

3.2 마이크로 비틀림

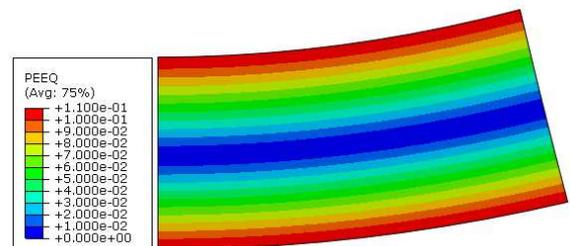
여기서는 개발된 솔리드 요소인 8 절점 HEXA 요소를 이용하여 소성 변형률 구배 비틀림 해석에 적용하여 검증하고자 한다. 마이크로 비틀림 문제는 Fleck 등⁽⁷⁾이 다결정 순 구리에 대하여 실험을



(a) Mesh and prescribed boundary conditions



(b) Non-dimensional bending moment-strain curves



(c) Equivalent plastic strain plot by the SGP FE analysis

Fig. 1 Strain gradient plasticity FE analysis for the micro-bending

수행하고 Cosserat 의 쌍응력 이론을 바탕으로 하여 등가곡률 식 (5)를 변형률 구배 불변량으로 이용하여 길이 스케일을 약 $3.7\mu\text{m}$ 으로 구한 이후 여러 연구들에서 인용되었다. 그러나 그들은 후에 식 (2)의 l_1, l_2, l_3 로 된 세 개의 길이 스케일을 갖는 모델을 제시함으로써 다시 길이 스케일에 관한 실험적 규명이 어려워 지게 되었다.^(21,14) 대신 많은 연구들에서는 길이 스케일을 파라미터로 놓고 변화해 가면서 피팅에 의해 결과를 분석하고 있는 실정이다.

한편 Fleck 등⁽⁷⁾의 마이크로 비틀림 시험에서는 지름이 12, 15, 20, 30, $170\mu\text{m}$ 인 시편을 표면 전단 변형률이 1.0 이상이 되도록 대변형 시험을 하였지만, 그들의 인장시험 데이터에서는 인장 변형률을 0.1 까지만 구하였다.

따라서 마이크로 비틀림 해석에 필요한 대변형까지의 응력-변형률 선도는 알 수가 없으므로 본 논문의 결과와 실험치의 직접비교는 불가능하고 대신, 길이 효과가 나타나는 것만을 보기로 한다.

사용된 경계조건과 메쉬는 Fig. 2(a)에 나타내었다. 바닥 면은 고정시키고 윗 면은 그림에 표시한 경계조건식을 부여하되, 실제로는 회전각과의 관계식 $\theta = \kappa x_3 = \kappa L$ 을 이용하여 회전 자유도로 제어하였고 대변형이 수반되므로 기하학적 비선형성을 고려하였다. 여기서 κ 는 단위 길이당 회전각이며 길이 L 은 지름 크기 정도로 적절히 하였다. 강소성의 경우에는 소성 변형률 구배의 불변량은 $\bar{\eta} = \bar{\chi} = \kappa$ 이다. 적용 변위 장은 다음과 같다.

$$u_1 = -\kappa x_2 x_3; u_2 = \kappa x_1 x_3; u_3 = 0 \quad (23)$$

지름이 12, 30, $170\mu\text{m}$ 인 경우 소성 변형률 구배를 고려한 유한요소 해석의 결과를 Fig. 2(b)에 표시하였다. 여기서 $\gamma_s = \kappa a$ 로서 표면에서의 전단 변형률을, $T^* = T/a^3$ 는 정규화 토오크이다. 사용된 물성치로서 전단 탄성계수는 $G = 44\text{GPa}$, 프와송 비는 $\nu = 0.34$, 진응력-진변형률 소성거동은 $\sigma_u = 226\epsilon_p^{0.2}\text{MPa}$, $\alpha = 0.5$, $m = 3.08$, $\bar{r} = 1.93$, $b = 0.255\text{nm}$ 를 사용하였다.⁽²⁰⁾ 식 (11)을 적용한 정규화 토오크는 다음과 같다.

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int_0^1 \sigma \xi^2 d\xi = T_0^* + T_1^* \quad (24)$$

여기서 $T_0^* = 2\pi\sigma_0/(3\sqrt{3})$ 이며($\sigma_0 = 0$ 이면,

$T_0^* = 0$) 소성 변형률 구배를 고려하지 않은 전통적 소성이론에 의한 T_1^* 값은 모든 반지름에 대해 동일하며 다음과 같이 구해진다.

$$T_1^* = \gamma_s^n \sigma_r \frac{2\pi}{(3+n)3^{(n+1)/2}} \quad (25)$$

식 (25)를 Fig. 2(b)의 점선으로 그렸다. 이러한 결과를 통하여 본 논문의 방법론에 의한 마이크로 비틀림의 해석에서도 실험에서 볼 수 있는 정도의 크기 효과를 볼 수 있었다. 즉, 형상의 치수가 미크론 단위로 줄어들어 따라 강도의 강화가 일어났다. 그러나 앞에서도 언급한 바와 같이 인장 시험 데이터의 부족으로 말미암아 문헌의 실험 값을 직접 비교할 수는 없었고 단지 참고만 할 수 있다. 지름이 $12\mu\text{m}$ 인 경우 다소 차이가 나는 것은 하나의 길이 스케일을 쓰는 한계점 때문으로 보인다.

3.3 마이크로 기공

금속재료 속의 기공(void)은 재료의 강도를 떨어트리는데 이는 전통적 소성이론으로도 다루어지고 있다. 그러나 기공의 크기가 미크론 또는 서브 미크론 단위로 작아짐에 따라 기공 주변에 형성되는 변형률 구배가 커지고 따라서, 길이 스케일이 나타난다.⁽¹²⁾ 즉, 동일한 기공 체적비라면 기공의 크기가 작아짐에 따라 강도저하는 줄어든다.

변형률 구배 소성이론에 의한 무한체 강소성 재료에 대한 마이크로 기공의 해석적 과정은 Gao 와 Huang⁽¹⁷⁾을 참고할 수 있다. 특히 탄소성 문제에서는 저장된 탄성에너지로 인하여 기공의 불안정 성장도 보이는 것으로 알려져 있다.

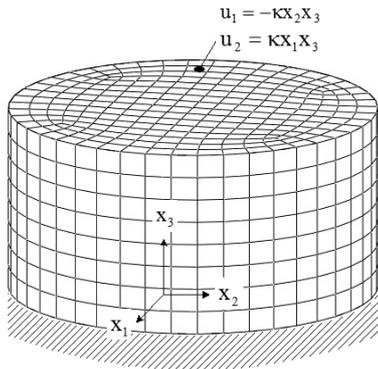
본 논문에서는 개발된 축대칭 요소를 이용하여 변형률 구배 탄소성 해석을 시행해 길이 효과를 평가해 보고자 한다. 지름이 $2a$ 이고 그 체적비가 $f = (a/A)^3$ 인 기공을 갖는 바깥 지름이 $2A$ 인 알루미늄 구를 Fig. 3(a)의 왼쪽 그림과 같이 축대칭 문제로 모델링하였다. 여기서 경계조건은 $r=0$ 에서 $u_r = 0$ 이며 $z=0$ 에서 $u_z = 0$ 이고 $r=A$ 에서 반지름 방향 인장응력 $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{\infty}$ 을 부여한다. 재료는 Al 365-T6 이며⁽¹⁰⁾ 탄성계수는 $E = 76\text{GPa}$, 프와송 비는 $\nu = 0.33$, 소성거동은 $\sigma_u = 464\epsilon^{0.136}\text{MPa}$, $\sigma_0 = 208\text{MPa}$, $\alpha = 0.5$, $m = 3.08$, $\bar{r} = 1.85$, $b = 0.286\text{nm}$ 를 사용하였다.

한편 구대칭 문제에서 구 좌표계 (r, θ, ϕ) 를 생각하면 비압축성을 만족하는 변위장은 다음과 같

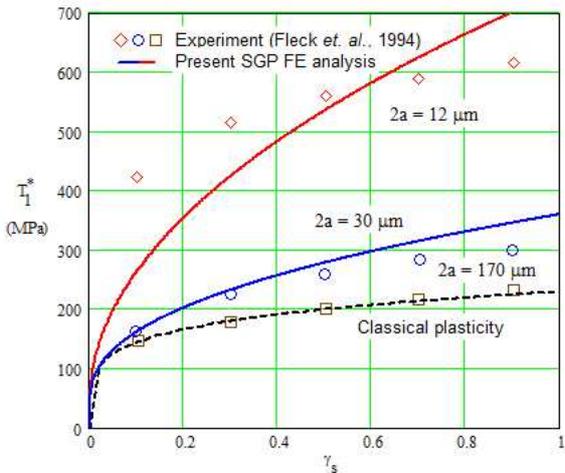
다.⁽¹⁷⁾

$$u_r = \frac{r_0^2}{r^2} u_0; u_\theta = u_\phi = 0 \quad (26)$$

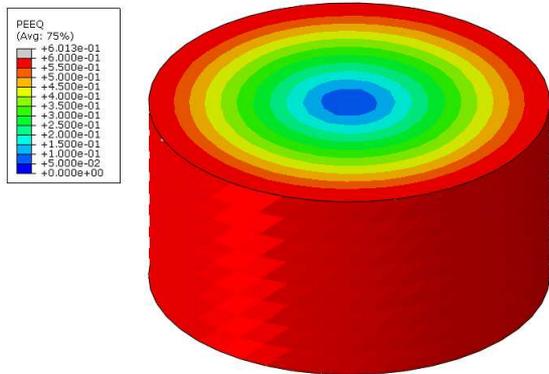
여기서 $u_0 = u_r(r_0)$ 는 기공 표면의 반지름 변위



(a) Prescribed boundary conditions and 3D mesh



(b) Normalized torque-strain curves



(c) Equivalent plastic strain plot by the SGP FE analysis

Fig. 2 Strain gradient plasticity FEA for the micro-torsion

이며 식 (26)으로부터 변형률은 다음과 같다.

$$\epsilon_{rr} = \frac{d}{dr} u_r; \epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\phi\phi} = -\frac{1}{2} \epsilon_{rr} \quad (27)$$

반지름 방향 변형률 구배를 $\epsilon_{rr}^* = d\epsilon_{rr}/dr$ 로 표기하여 모든 성분을 표기하면 다음이 된다.

$$[\eta] = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr}^* & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \epsilon_{rr}^* & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \epsilon_{rr}^* & 0 & -\frac{1}{2} \epsilon_{rr}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \epsilon_{rr}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \epsilon_{rr}^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

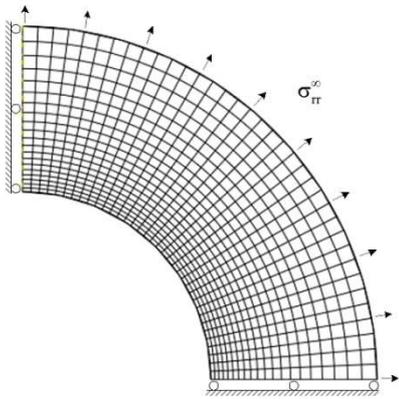
따라서 유효 변형률은 $\bar{\epsilon} = |\epsilon_{rr}^*|$ 이며 식 (6)에 의한 변형률 구배 불변량은 다음과 같다.

$$\bar{\eta} = \frac{\sqrt{10}}{4} |\eta_{rr}| = \frac{\sqrt{10}}{4} \left| \frac{d}{dr} \epsilon_{rr} \right| \quad (29)$$

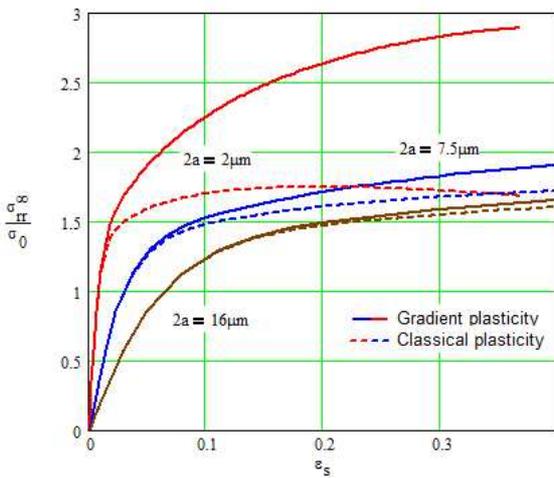
그러므로 변형률 구배 불변량은 식 (26)을 이용하면 $\bar{\eta} = 3\sqrt{5}/2 (r_0^2/r^4) u_0$ 로서 반지름에 반비례한다. 여기서는 체적비를 $f = 15\%$ 로 고정하고 기공의 지름을 2, 7.5, 16 μm 인 경우에 대해 해석하였다. Fig. 3(c)에 16 μm 인 경우 $\epsilon_s = 0.4$ 에서 소성 변형률 구배 불변량을 구의 1/8 로 표시하였다. 여기서 ϵ_s 는 기공 표면에서의 유효 변형률로서 유한요소 해석의 결과로부터 다음과 같이 계산되었다.

$$\epsilon_s = 2 \ln \left(1 + \frac{u_0}{r_0} \right) \quad (30)$$

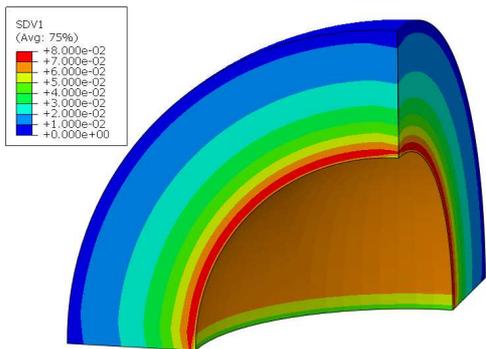
Fig. 3(b)에 기공 크기에 따른 무차원 응력-변형률 선도를 표시하였다. 여기서 실선은 변형률 구배 소성을 고려한 것이고 파선은 전통적 소성이론에 의한 것이다. 결과에서 보듯이 확연한 길이 효과가 나타남을 알 수 있고 기공의 크기가 커질수록 변형률 구배 소성에 의한 길이 효과는 감소함을 알 수 있다. 즉, 변형률 구배 소성이론의 해는 전통적 소성이론의 해와 같아진다. 이러한 경향은 점소성 미소변형해석에 의한 Shu 의⁽²⁵⁾ 결과와 일치한다. 또한 기공의 지름이 2 μm 의 경우를 보면, 전통적 소성이론에 의하면 기공 성장의 불안정성을 보였지만 길이 효과에 의하여 그 불안정성이 뒤로 지연됨을 알 수 있다.



(a) Axisymmetric model and prescribed boundary conditions



(b) Non-dimensional stress-strain curves



(c) Plastic strain gradient plot by the SGP FE analysis

Fig. 3 Strain gradient plasticity FEA for the micro-void

4. 결론

길이효과를 보이는 소성해석을 하기 위하여 변형률 구배 소성이론을 이용한 증분해석 유한요소 해석 프레임워크의 변위법 저차 유한요소들을 개

발하고 검증하였다. 저차 요소는 삼각형 또는 사각형 평면요소와 사면체 또는 육면체 솔리드 요소로서 계산역학에서 가장 광범위하게 사용되고 있지만 요소 내에서의 변형률은 구배를 표현하기 어려운 일정 변형률 요소에 해당하므로 고차 응력과 고차 변형률을 다루는 변형률 구배 소성이론에는 이용될 수 없었다. 그러나 본 논문에서는 절점평균 소성 변형률을 이용하여 등매개변수 형상함수를 이용하는 보간 방법으로 매우 쉽게 소성 변형률 구배를 계산할 수 있었다. 또한 단일 길이 스케일을 이용하는 소성 변형률 구배 불변량과 소성 변형률 구배 경화를 고려한 구성방정식을 이용하는 방법으로 기존의 변위법 변분 프레임워크를 사용하는 쉬운 증분 해석법을 제안하였다.

따라서 기존의 제안들과는 차별되게 고차응력이나 고차 연속조건, 초 요소 등의 기법이 없이도 변형률 구배 소성 문제들을 해석할 수 있었다.

본 논문에서 제안된 방법론에 의하여 대표적인 변형률 구배 소성 문제들을 해석하였다. 마이크로 굽힘, 마이크로 비틀림, 마이크로 기공 문제 모두 적당한 메쉬 밀도와 증분 단계로 효과적으로 길이 효과를 표현할 수 있었으며 실험 값과 일치하는 변형률 구배 경화를 볼 수 있었다. 본 논문의 방법론은 한 개뿐만이 아니라 여러 개의 길이 스케일을 갖는 문제에도 확장이 가능하다. 다만, 현재 변형률 구배 소성이론의 난제라고 할 수 있는 길이 스케일에 대한 실험적 규명은 여전히 문제라고 할 수 있으며 향후 연구가 필요한 실정이다.

후 기

이 논문은 첫 번째 저자에게 수여된 2011년도 한남대학교 교비연구비와 두 번째 저자에게 수여된 한국연구재단 기초연구사업(2011-0017042)의 지원에 의해 집필되었습니다. 이에 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Cosserat, E., Cosserat, F., Brocato, M. and Chatzis, K., 1909, *Theorie des corps deformables*, A. Hermann Paris.
- (2) Toupin, R., 1962, "Elastic Materials with Couple-Stresses," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 385~414.
- (3) Mindlin, R., 1964, "Micro-Structure in Linear Elasticity," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, No. 1, pp. 51~78.
- (4) Koiter, W., 1964, Couple Stresses in the Theory of Elasticity, I and II., *Proc. K. Ned. Akad. Wet.(B)*, Vol. 67, No. 1, pp. 17-44.

- (5) Gao, X. L., Park, S. K. and Ma, H. M., 2009, "Analytical Solution for a Pressurized Thick-Walled Spherical Shell Based on a Simplified Strain Gradient Elasticity Theory," *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 14, No. 8, pp. 747~758.
- (6) Wang, B., Zhao, J. and Zhou, S., 2010, "A Micro Scale Timoshenko Beam Model Based on Strain Gradient Elasticity Theory," *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol. 29, No. 4, pp. 591~599.
- (7) Fleck, N. A., Muller, G. M., Ashby, M. F. and Hutchinson, J. W., 1994, "Strain Gradient Plasticity: Theory and Experiment," *Acta Metallurgica Et Materialia*, Vol. 42, No. 2, pp. 475~487.
- (8) McElhaney, K. W., Vlassak, J. J. and Nix, W. D., 1998, "Determination of Indenter Tip Geometry and Indentation Contact Area for Depth-Sensing Indentation Experiments," *Journal of Materials Research*, Vol. 13, No. 5, pp. 1300~1306.
- (9) Stölken, J. S. and Evans, A. G., 1998, "A Microbend Test Method for Measuring the Plasticity Length Scale," *Acta Materialia*, Vol. 46, No. 14, pp. 5109~5115.
- (10) Lloyd, D. J., 1994, "Particle Reinforced Aluminum and Magnesium Matrix Composites," *International Materials Reviews*, Vol. 39, No. 1, pp. 1~23.
- (11) Aifantis, E. C., 1999, "Strain Gradient Interpretation of Size Effects," *International Journal of Fracture*, Vol. 95, pp. 299~314.
- (12) Fleck, N. and Hutchinson, J., 1997, "Strain Gradient Plasticity," *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 33, pp. 295~361.
- (13) Gao, H., Huang, Y., Nix, W. D. and Hutchinson, J. W., 1999, "Mechanism-Based Strain Gradient Plasticity - I. Theory," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 47, No. 6, pp. 1239~1263.
- (14) Evans, A. G. and Hutchinson, J. W., 2009, "A Critical Assessment of Theories of Strain Gradient Plasticity," *Acta Materialia*, Vol. 57, No. 5, pp. 1675~1688.
- (15) Shu, J. Y., King, W. E. and Fleck, N. A., 1999, "Finite Elements for Materials with Strain Gradient Effects," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 44, No. 3, pp. 373~391.
- (16) Soh, A. and Wanji, C., 2004, "Finite Element Formulations of Strain Gradient Theory for Microstructures and the C0-1 Patch Test," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 61, No. 3, pp. 433~454.
- (17) Gao, H. and Huang, Y., 2001, "Taylor-Based Nonlocal Theory of Plasticity," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 15, pp. 2615~2637.
- (18) Abu Al-Rub, R. K. and Voyiadjis, G. Z., 2005, "A Direct Finite Element Implementation of the Gradient-Dependent Theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 63, No. 4, pp. 603~629.
- (19) Byon, S. M. and Lee, Y., 2006, "Deformation Analysis of Micro-Sized Material Using Strain Gradient Plasticity," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 20, No. 5, pp. 621~633.
- (20) Abu Al-Rub, R. K. and Voyiadjis, G. Z., 2006, "A Physically Based Gradient Plasticity Theory," *International Journal of Plasticity*, Vol. 22, No. 4, pp. 654~684.
- (21) Fleck, N. A. and Hutchinson, J. W., 2001, "A Reformulation of Strain Gradient Plasticity," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 49, No. 10, pp. 2245~2271.
- (22) Shrotriya, P., Allameh, S. M., Lou, J., Buchheit, T. and Soboyejo, W. O., 2003, "On the Measurement of the Plasticity Length Scale Parameter in LIGA Nickel Foils," *Mechanics of Materials*, Vol. 35, No. 3-6, pp. 233~243.
- (23) Arsenlis, A. and Parks, D. M., 1999, "Crystallographic Aspects of Geometrically-Necessary and Statistically-Stored Dislocation Density," *Acta Materialia*, Vol. 47, No. 5, pp. 1597~1611.
- (24) Dassault Systèmes Simulia, Inc., 2010, Abaqus v. 6.9, Providence, U.S.A.
- (25) Shu, J. Y., 1998, "Scale-Dependent Deformation of Porous Single Crystals," *International Journal of Plasticity*, Vol. 14, No. 10-11, pp. 1085~1107.
- (26) Fleck, N. A. and Willis, J. R., 2009, "A Mathematical Basis for Strain-Gradient Plasticity Theory. Part II: Tensorial Plastic Multiplier," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 57, No. 7, pp. 1045~1057.
- (27) Idiart, M. I., Deshpande, V. S., Fleck, N. A. and Willis, J. R., 2009, "Size Effects in the Bending of Thin Foils," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, No. 11-12, pp. 1251~1264.
- (28) Guo, Y., Huang, Y., Gao, H., Zhuang, Z. and Hwang, K. C., 2001, "Taylor-Based Nonlocal Theory of Plasticity: Numerical Studies of the Micro-Indentation Experiments and Crack Tip Fields," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 42-43, pp. 7447~7460.
- (29) Byon, S. M., Moon, C. H. and Lee, Y., 2010, "Strain Gradient Plasticity Based Finite Element Analysis of Ultra-Fine Wire Drawing Process," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 23, No. 12, pp. 3374~3384.
- (30) Han, C.-S., Ma, A., Roters, F. and Raabe, D., 2007, "A Finite Element Approach with Patch Projection for Strain Gradient Plasticity Formulations," *International Journal of Plasticity*, Vol. 23, No. 4, pp. 690~710.