

# 명시적 호장법을 이용한 공간프레임의 반강접 탄소성 후좌굴 해석

## Semi-rigid Elasto-Plastic Post Buckling Analysis of Space Frame by Using the Explicit Arc-Length Method

이 경 수<sup>1)</sup> · 한 상 을<sup>2)</sup>

Lee, Kyoung Soo

Han, Sang Eul

요약 : 본 연구에서는 다양한 명시적 호장법을 사용하여 공간프레임의 반강접 탄소성 후좌굴 해석을 수행하였다. 이를 위해 이전 연구를 발전시켜 다양한 명시적 알고리즘의 호장법과 명시적, 묵시적 해석법에 동시에 적용 가능한 반강접 탄소성 공간프레임요소를 제안하였다. 다양한 명시적 호장법은 예측단계와 수렴단계에 명시적 해석법인 동적이완법을 적용한 것을 의미한다. 따라서 명시적 호장법에는 명시적(예측단계)-명시적(예측단계) 호장법, 명시적(예측단계)-묵시적(수렴단계) 호장법, 묵시적(예측단계)-명시적(수렴단계) 호장법으로 구분된다. 또한 명시적 호장법에 적용 가능하도록 수정된 반강접 탄소성 공간프레임요소는 오일러리안 유한변형이론에 의해 강체회전변형을 고려하였기 때문에 대변위가 발생하는 기하학적 비선형 문제에 적용될 수 있고, 완전 탄소성 소성인장 알고리즘에 의한 재료적 비선형성을 고려하였으며, 부재내부에 정적 응축된 회전 및 축방향 성분의 선형 스프링에 의해 접합부 반강접 특성을 반영하였다. 제안된 해석법을 이용하여 검증예제를 수행함으로써 본 연구에서 제안된 다양한 명시적 호장법 및 공간프레임요소의 정확성을 검증한다.

ABSTRACT : In this paper, semi-rigid elasto-plastic post-buckling analysis of a space frame was performed using various explicit arc-length methods. Various explicit arc-length methods and a large-deformation and small-strain elasto-plastic 3D space frame element with semi-rigid connections and plastic hinges were developed. This element can be applied to both explicit and implicit numerical algorithms. In this study, the Dynamic Relaxation method was adopted in the predictor and corrector processes to formulate an explicit arc-length algorithm. The developed "explicit-predictor" or "explicit-corrector" were used in the elasto-plastic post-buckling analysis. The Eulerian equations for a beam-column with finite rotation, which considers the bowing effects, were adopted for the elastic system and extended to the inelastic system with a plastic hinge concept. The derived tangent stiffness matrix was asymmetrical due to the finite rotation. The joint connection elements were introduced for semi-rigidity using a static condensation technique. Semi-rigid elasto-plastic post-buckling analyses were carried out to demonstrate the potential of the developed explicit arc-length method and advanced space frame element in terms of accuracy and efficiency.

핵심용어 : 호장법, 동적이완법, 보-기둥요소, 탄소성 후좌굴 해석, 반강접

KEYWORDS : arc-length method, dynamic relaxation method, beam-column element, elasto-plastic post buckling analysis, semi-rigid

## 1. 서론

호장법(Riks, 1979; Crisfield, 1981, 1997; Ramm, 1981)은 강성구조물의 좌굴해석법으로 가장 효율적으로 사용되는 비선형 해석법이다. 평형경로상의 극한점이나 분기점의 계산 및 좌굴이후의 경로를 탐색하는데 있어서 호장법은 매우 우수한 수치 해석적 효율성을 발휘하는데, 미리 정의된 호장매개변수를

적용한 호장제약식을 통해 기본경로상의 변위와 하중매개변수를 동시에 계산할 수 있다. 특히 호장법은 극한점, 분기점과 같이, 평형경로 상에 발생하는 복잡한 변곡점 이후의 거동을 매우 정확하게 계산할 수 있는 장점이 있다. 예측(predictor)단계에서 사용되는 호장제약식의 매개변수에 따라 Riks(1979)의 구형호장법과 Crisfield(1981)와 Ramm(1981)의 원통형 호장법으로 구별된다. 이중 Riks의 구형 호장법은 복잡한 평형경로에 대

1) 연구교수, 공학박사(lks1838@inha.ac.kr)

2) 교신저자, 인하대학교 건축학부 교수, 공학박사

(Tel: 032-860-7592, Fax: 032-873-5724, E-mail: hsang@inha.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2012년 4월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

한 매우 정확한 추적이 가능하여 분기좌굴해석에 장점을 가진다. 그러나 접선강성행렬에 호장제약식이 포함되어 있기 때문에 전체강성행렬이 비대칭이 되는 수치적 비효율성을 가진다. 이에 반해 Batoz와 Dhatt(1979)의 변위증분해석법에 수정된 호장제약식을 적용한 Crisfield(1981)와 Ramm(1981)의 원통형 호장법은 2차방정식의 해를 구하는 비교적 간단한 방법으로 하중계수를 계산할 수 있다. 이때 접선강성행렬은 밴드-대칭행렬을 유지하기 때문에 수치 해석적으로 매우 효율적인 비선형 해석을 수행 할 수 있게 된다.

현재까지 뉴턴랩슨법과 같은 묵시적 해석법이 호장법의 수치해석법으로 주류를 이루었는데, 그 이유는 접선강성행렬을 통해서만 얻을 수 있는 고유주기, 고유모드의 정보가 분기좌굴해석에서는 필수적이기 때문이다. 그러나 극한좌굴형 Snap through, Snap back 좌굴해석에서는 분기좌굴과 달리 고유주기나 고유모드가 반드시 필요한 것은 아니다. 최근 연구에서 Lee 등(2011)은 명시적 해석법인 동적이완법과 Crisfield의 원통형호장법을 조합하여 새로운 명시적 호장법을 제안하였는데, 다양한 검증예제의 수행을 통하여 제안된 해석법의 적용성을 검증하였다. 명시적 호장법은 강성행렬을 사용하지 않기 때문에 수렴성이 떨어지는 단점이 있지만, 수치해석과정이 단순화 되는 장점이 있다.

철골구조물의 설계를 위해서 접합부 특성을 고려한 반강접 탄소성 공간프레임요소의 사용은 필수적이다. 일반적으로 철골프레임의 접합부를 강접합이나 편접합으로 이상화하여 구조해석 및 설계를 수행하고 있지만, 접합부가 반강접의 특성을 나타낸다는 것은 실험 등을 통해 이미 밝혀진 내용이다. 따라서 반강접 접합부를 실제의 설계 및 구조해석 시에 고려하고자 하는 연구는 현재까지 활발히 진행되고 있다.

본 연구에서는 이전 연구를 발전시켜 다양한 명시적 알고리즘의 호장법과 명시적, 묵시적 해석법에 동시에 적용 가능한 반강접 탄소성 공간프레임요소를 제안한다.

다양한 명시적 호장법은 예측단계(predictor)와 수렴단계(corrector)에 명시적 해석법인 동적이완법을 적용한 것을 의미한다. 따라서 명시적 호장법에는 명시적(예측단계)-명시적(예측단계) 호장법, 명시적(예측단계)-묵시적(수렴단계) 호장법, 묵시적(예측단계)-명시적(수렴단계) 호장법으로 구분된다.

또한 명시적 호장법에 적용 가능하도록 확장된 본 연구의 반강접 탄소성 공간프레임요소는 오일러리안 유한변형이론에 의해 강체회전변형을 고려하였기 때문에 대변위가 발생하는 기하학적 비선형 문제에 적용될 수 있고, 완전 탄소성 소성인 지 알고리즘에 의한 재료적 비선형성을 고려하였으며, 부재내부에 정적 응축된 회전 및 축방향 성분의 선형 스프링에 의해 접합부 반강접 특성을 반영하였다.

검증예제를 수행함으로써 본 연구에서 제안된 다양한 명시적 호장법 및 공간프레임요소의 정확성을 검증한다.

## 2. 오일러리안 유한회전

대변위에 의한 공간프레임의 기하학적 비선형해석을 수행하기 위해서는 부재의 강체회전변형 효과를 고려해야한다. 본 연구에서는 이를 위해 오일러리안 유한회전에 의한 절점회전행렬 개념(Spiller(1990), Levy 등(2003))을 도입하여, 강체회전변형을 제거한 3차원 보-기둥요소의 상대회전변형을 계산하였다.

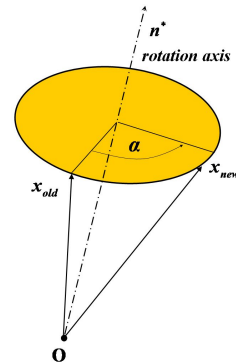


그림 1. 오일러 유한 회전 정식화를 위한 방향벡터

절점변형이 유한할 경우에는 오일러의 유한회전이론으로 절점 방향을 결정해야 한다. 오일러 이론(Euler, 1775: Goldstein, 1980: Cheng 등, 1989)에 의하면 강체의 변형은 그림 1과 같이 임의의 축  $\mathbf{n}^* = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ 에 대한 회전  $\alpha$ 로 나타낼 수 있으며, 아래식과 같이 표현된다.

$$\mathbf{x}_{\neq w} = \mathbf{x}_{old} - (1 - \cos \alpha) \{ \mathbf{x}_{old} - (\mathbf{x}_{old} \cdot \mathbf{n}^*) \mathbf{n}^* \} + \sin \alpha (\mathbf{n}^* \times \mathbf{x}_{old}) \quad (1)$$

유한회전에 관한 위식을 행렬형식으로 다시 나타내면 아래식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}_{new} = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{x}_{old} \quad (2)$$

$$\mathbf{x}_{old} = \mathbf{R} \mathbf{x}_{new} \quad (\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}) \quad (3)$$

위식에서  $\mathbf{R}$  절점회전행렬이고  $\alpha$ 와  $\mathbf{n}^*$ 에 의해 아래와 같이 유도된다.

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha + \mu n_1^2 & -n_3 \sin \alpha + \mu n_1 n_2 & n_2 \sin \alpha + \mu n_1 n_3 \\ n_3 \sin \alpha + \mu n_1 n_2 & \cos \alpha + \mu n_2^2 & -n_1 \sin \alpha + \mu n_2 n_3 \\ -n_2 \sin \alpha + \mu n_1 n_3 & n_1 \sin \alpha + \mu n_2 n_3 & \cos \alpha + \mu n_3^2 \end{bmatrix}$$

with  $\mu = 1 - \cos \alpha$  (4)

오일러의 유한회전이론의 위의 절점회전행렬은 보-기둥 양단의 절점회전과 부재의 강체회전을 표현하는데 사용된다.

부재의 전체회전변형에서 대변형의 강체변형을 제거한 작은 순수 상대회전변형을 계산하기 위해서 그림 2와 같은 오일러리안(국부좌표계) 좌표계가 사용된다. 대변위를 나타내는 기하학적 비선형 해석에서 전체회전변형에서 강체회전변형이 대부분을 차지하고, 수순한 상대회전변형은 작기 때문에 오일러리안 유한회전은 대변위와 작은 변형(large displacement and small deformation)한다고 가정된다.

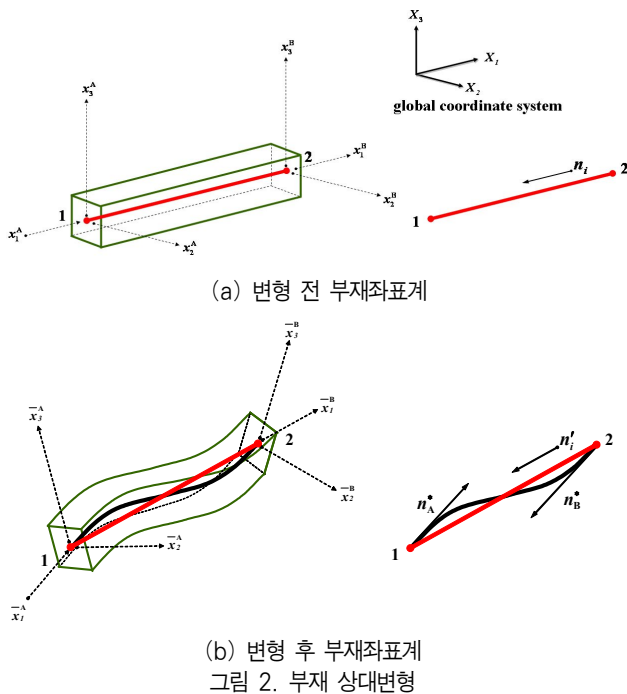


그림2에서 3차원 공간프레임에 대한 초기상태와 변형 후의 부재방향벡터를 각각  $\mathbf{n}_i$ ,  $\mathbf{n}_i'$ 라 하고, 부재 양단 절점 1, 2의 변형 후 부재축 방향벡터를 각각  $\mathbf{n}_1^*$ ,  $\mathbf{n}_2^*$ 라 하면,  $\mathbf{n}_2^*$ 는 부재 단부 2절점의 오일러 절점회전행렬  $\tilde{\mathbf{R}}_2$ 과 변형 전 부재 방향벡터  $\mathbf{n}_i$ 에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다. 3차원 회전은 식 (3), (4)로 벡터형식으로 표현되지만 이 벡터는 가환성이 성립하지 않는다. 그러나 벡터형식으로 표현되는 오일러의 유한회전을 테일러 시리즈 전개하면 선형해석의 미소 증분회전벡터를 얻을 수 있다(Spiller(1990)).

$$\mathbf{n}_1^* = \tilde{\mathbf{R}}_1 \mathbf{n}_i \quad (5)$$

$$\mathbf{n}_2^* = \tilde{\mathbf{R}}_2 \mathbf{n}_i \quad (6)$$

위식에서  $\tilde{\mathbf{R}}_i$ 는 단부 절점*i*에서의 절점회전행렬이다. 따라서 절점2의 부재회전벡터  $\boldsymbol{\theta}_2$ 는 다음의 관계식으로 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\theta}_2 \simeq \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_2^* \quad (7)$$

$$|\boldsymbol{\theta}|_2 = \cos^{-1}(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_2^*) \quad (8)$$

또한 단부 절점1의 부재회전벡터  $\boldsymbol{\theta}_1$ 는  $\boldsymbol{\theta}_2$ 와  $\boldsymbol{\theta}_{12}$ 의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_{12} \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{12} = \mathbf{R}_1 \tilde{\mathbf{R}}_2 \quad (10)$$

위식에서  $\boldsymbol{\theta}_{12}$ 는 절점2에 대한 절점1의 상대회전벡터이다. 따라서 식 (9)에 의해 강체회전성분이 제거된 대변위가 발생하는 3차원 공간프레임의 상대회전 변형을 계산할 수 있으며, 위의 오일러리안 유한회전 정식화는 공간프레임의 기하학적 비선형 문제에서 가장 핵심적인 요소이다.

### 3. 탄소성 보-기둥 요소

강접합 3차원 공간프레임의 부재력은 보-기둥이론에 의해 아래식과 같이 나타낼 수 있다(Kassimali 등, 1991).

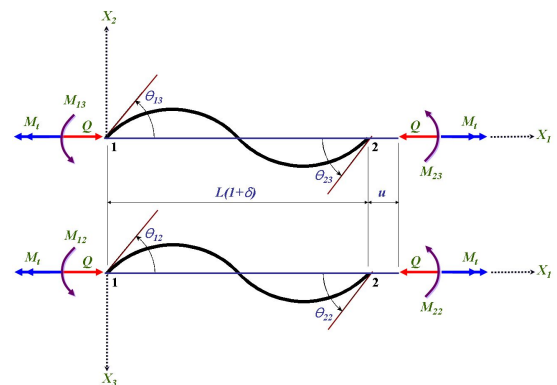
$$M_{1j} = \frac{EI_j}{l} (c_{ij}\theta_{1j} + c_{2j}\theta_{2j}) \quad (j = 2, 3) \quad (11)$$

$$M_{2j} = \frac{EI_j}{l} (c_{2j}\theta_{1j} + c_{1j}\theta_{2j}) \quad (j = 2, 3) \quad (12)$$

$$M_t = \frac{c_t}{l} \psi_t \quad (13)$$

$$Q = EA \left( \frac{u}{L} - \sum_{j=2}^3 c_{bj} \right) \quad (14)$$

$$c_{bj} = b_{1j}(\theta_{1j} + \theta_{2j})^2 + b_{2j}(\theta_{1j} - \theta_{2j})^2 \quad (15)$$



위 식에서  $A$ 는 단면적,  $E$ 는 탄성계수,  $I_j$ 는  $X_j$ 축에 대한 단면2차모멘트이고,  $c_{1j}$ ,  $c_{2j}$ ,  $c_t$ 는 각각 부재축력에 의한

$X_j$  축 휨모멘트의 안정함수, 비틀림 안정함수이다. 또한  $c_{bj}$  는  $X_j$  축 굽힘 효과에 의한 축 변형 계수이다. 위 식에서 안정함수  $c_{1j}$ ,  $c_{2j}$  와 축 변형 계수,  $c_{bj}$  는 부재축력의 무차원화 계수,  $q$  에 관한 함수로서,  $q$  는 부재축력  $Q$  에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$q_j = \frac{Q}{Q_{Euler}} = Q \frac{L^2}{\pi^2 EI_j} \quad (16)$$

식 (9) ~ 식 (12)의 부재력, 부재변형의 관계를 식으로 표현하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{s}^T = \{M_{13}, M_{23}, M_{12}, M_{22}, M_t, QL\} \quad (17)$$

$$\mathbf{u}^T = \left\{ \theta_{13}, \theta_{23}, \theta_{12}, \theta_{22}, \psi_t, \frac{u}{L} \right\} \quad (18)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}^T \mathbf{d} \quad (19)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{s} \quad (20)$$

식 (19)에서  $\mathbf{B}$  는 부재좌표계(오일러좌표계)에서 절점력에 대한 부재력의 변환행렬이다. 식 (20)의 부재력에 의한 절점력의 식은 구조물의 평형관계식으로 볼 수 있으며, 미소증분변위에 대한 미분형태로 아래와 같이 접선강성행렬을 유도할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{R}\bar{\mathbf{B}}(\Delta \mathbf{s}) + \mathbf{R}(\Delta \bar{\mathbf{B}})\mathbf{s} + (\Delta \mathbf{R})\bar{\mathbf{B}}\mathbf{s} \quad (21)$$

$$= (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G)\delta \mathbf{d}$$

식 (21)의 오른쪽 첫 번째항은 탄성강성행렬이고, 두 번째, 세 번째항은 기하강성행렬이 된다. 미소변형 이론을 적용할 경우, 식 (21)의 오른쪽 세 번째항은 상수가 되어 소거된다. 본 연구에서는 대변형에 의한 유한변형을 고려하였기 때문에 식 (21)의 오른쪽 세 번째항은 소거되지 않으며, 접선강성행렬은 비대칭으로 유도된다. 유한회전에 의한 기하강성행렬의 자세한 유도과정은 참고문헌(Spiller, 1990; Levy 등, 2003)에 기술되었다. 식 (21)의 접선강성행렬은 명시적 해석법에서만 적용되며, 명시적 해석법에서는 고려되지 않는다.

부재의 비탄성 효과를 고려하기 위해 부재 양단부에 항복이 집중된다고 가정하는 소성힌지 모델(Abbasnia 등, 1995)을 적용하였으며, 항복조건식(Abbasnia 등, 1995)은 아래식과 같다.

$$g_n = \left[ \left( \frac{\bar{M}_t}{\bar{M}_{p1}} \right)^2 + \sum_{j=2}^3 \left( \frac{\bar{M}_{ij}}{\bar{M}_{pj}} \right)^2 \right]^{0.5} + \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{Q}_y} \right)^2 = 1 \quad (i=1,2) \quad (22)$$

위 식에서  $\bar{M}_t$ ,  $\bar{Q}$  는 각각 소성힌지가 발생할 때의 비틀림 모멘트와 축력이고,  $\bar{M}_{ij}$  는 소성힌지가 발생할 때의  $i$  단부에서  $X_j$  축 방향에 대한 모멘트이다. 그리고  $\bar{Q}_y$ ,  $\bar{M}_{p1}$ , 는 각각 소성축력, 순수 소성 비틀림 모멘트이며,  $\bar{M}_{pj}$  는  $X_j$  축 방향에 대한 소성 휨모멘트이다.

뉴튼랩슨법, 호장법과 같은 비선형 해석법을 이용하여 보-기둥요소에 대한 비선형 수렴과정을 수행하기 위해서는 각 부재별로 소성힌지에 의한 단부 릴리스 거동특성이 반영되어야 한다. 이는 부재축력이 굽힘효과에 의해 결정되고, 또 굽힘효과는 축력에 의해 결정되기 때문에, 결과적으로 축력과 휨모멘트와의 관계는 비선형 관계식이 된다. 따라서 반복계산과정을 통해 변형된 상태에서의 정확한 부재축력을 계산해야 한다. 이를 위해 식 (14)를 무차원 축력계수  $q$ 에 의해 아래와 같이 다시 표현한다(Kassimali 등, 1991; Abbasnia 등 : 1995).

$$\mathbf{K}(q) = \frac{\pi^2}{\lambda^2} q + \sum_{j=2}^3 c_{bj} - \frac{u}{L} = 0 \quad (23)$$

위식을  $q$ 에 대해 미분하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K}'(q) = \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \sum_{j=2}^3 c_{bj}' \quad (24)$$

무차원 증분 축력계수  $\Delta q$ 는 위 식으로부터 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta q = - \frac{\mathbf{K}(q_i)}{\mathbf{K}'(q_i)} \quad (25)$$

따라서  $i+1$  반복단계에서의  $q_{i+1} = q_i + \Delta q_i$  이고,  $|\Delta q_i|$  가 수렴할 때까지 반복계산을 수행한다. 유한변형에 의한 보-기둥요소의 소성힌지 적용에 대한 자세한 내용은 Abbasnia 등(1995)의 연구논문에 소개되어 있다.

#### 4. 반강접 연결요소의 적용

본 연구에서는 보-기둥요소의 접합부 반강접 특성을 고려하기 위해서 Kato 등(1998, 2003)의 탄성스프링모델을 적용하였다. 그림4의 반강접 보-기둥요소는 정적응축과정에 의해 부재 강성행렬을 계산하며, 다음의 세부요소들로 구성된다 : (1)강체요소(1-a); (2)탄성 접합부 스프링요소  $K_{s1}$  (a-b);

(3)소성힌지( $P_{H1}$ ,  $P_{H2}$ )를 포함한 탄소성 보-기둥요소  $K_b$  (b-c); (4)탄성 접합부 스프링요소  $K_{s2}$  (c-d); (5) 강체요소(d-2).

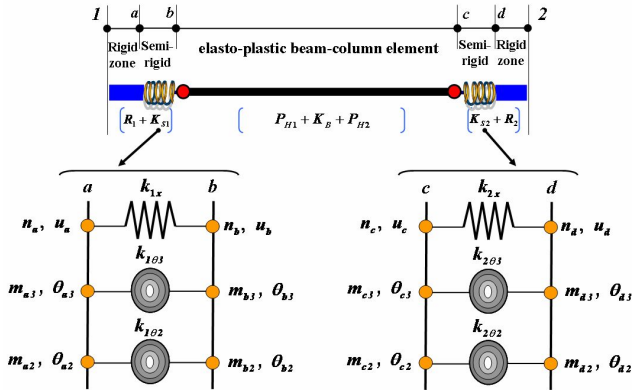


그림 4. 접합부 특성이 고려된 보-기둥요소

a-b, c-d 사이의 탄성 스프링요소의 평형방정식은 외부, 내부절점의 평형관계에 의해 결정된다. 예를 들어 a-b사이의 탄성 스프링요소  $K_{s1}$ 의 힘-변형관식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} n_b &= -n_a = k_{1x}(u_b - u_a) \\ m_{b3} &= -m_{a3} = k_{1\theta3}(\theta_{b3} - \theta_{a3}) \\ m_{b2} &= -m_{a2} = k_{1\theta2}(\theta_{b2} - \theta_{a2}) \end{aligned} \quad (26)$$

위식에서  $u_a$ ,  $\theta_{a3}$ ,  $\theta_{a2}$ 과  $u_b$ ,  $\theta_{b3}$ ,  $\theta_{b2}$ 은 각각 a, b에서의 축방향 변위와  $X_j$ 축에 대한 회전변위이며,  $k_{1x}$ ,  $k_{1\theta3}$ ,  $k_{1\theta2}$ 는 각각의 성분에 대한  $K_{s1}$ 의 강성이다. 위 식 (26)을 행렬로 나타내면 다음식과 같다.

$$\begin{Bmatrix} n \\ m_3 \\ m_2 \end{Bmatrix} = K_{s1} \begin{Bmatrix} u \\ \theta_3 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & k_{1\theta3} & 0 \\ 0 & 0 & k_{1\theta2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b - u_a \\ \theta_{b3} - \theta_{a3} \\ \theta_{b2} - \theta_{a2} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

일반적으로 스프링 상수  $k_{1x}$ ,  $k_{1\theta3}$ ,  $k_{1\theta2}$ 는 실험 등에 의해 결정되지만(Chen 등, 1996), 본 연구에서는 임의의 수치로 가정하여 해석을 수행하였다.

부재의 양단 절점1, 2에서 강체요소와 반강접 스프링요소의 합성강성은 각각 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_1 = b_1^T K_{s1} b_1, \quad K_2 = b_2^T K_{s2} b_2 \quad (28)$$

위식에서  $b_1$ ,  $b_2$ 은 각각의 절점에 대한 강체-반강접 스프

링 변위관계행렬로 참고문헌(加藤史郎, 1997)에 설명되어 있다. 따라서 반강접 보-기둥요소의 증분 평형방정식은 각각의 접합부 스프링과 보-기둥요소의 평형식에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_1 & & \\ & K_b & \\ & & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta d_1 \\ \delta d_b \\ \delta d_c \\ \delta d_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_b + F_{b,beam} \\ F_{c,beam} + g_c \\ g_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \\ 0 \\ P_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (29)$$

위식에서  $K_b$ ,  $F_{b,beam}$ ,  $F_{c,beam}$ 는 각각 탄소성 보-기둥요소의 접선강성행렬과 b, c절점에서의 내력벡터이고,  $P_1$ ,  $P_2$ 는 1, 2 절점에서의 하중벡터이다. 그리고  $g_1$ ,  $g_b$ ,  $g_c$ ,  $g_2$ 는 반강접 스프링의 내력벡터로 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_b \end{Bmatrix} = b_1^T \begin{Bmatrix} F_{1,s1} \\ F_{b,s1} \end{Bmatrix} = b_1^T \begin{Bmatrix} F_{a,s1} \\ F_{b,s1} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{Bmatrix} g_c \\ g_2 \end{Bmatrix} = b_2^T \begin{Bmatrix} F_{c,s2} \\ F_{d,s2} \end{Bmatrix} = b_2^T \begin{Bmatrix} F_{c,s2} \\ F_{d,s2} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

식 (29)를 외부절점(1,2)과 내부절점(b, c)에 대해 다시 정리하면 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta d_{12} \\ \delta d_{bc} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G_{12} \\ G_{bc} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{12} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$\delta d_{12}^T = \{\delta d_1^T, \delta d_2^T\}, \quad \delta d_{bc}^T = \{\delta d_b^T, \delta d_c^T\} \quad (33)$$

$$G_{12}^T = \{g_1^T, g_2^T\} \quad (34)$$

$$G_{bc}^T = \{g_b^T + F_{b,beam}^T, F_{c,beam}^T + g_c^T\} \quad (35)$$

$$P_{12}^T = \{P_1^T, P_2^T\} \quad (36)$$

정적응축과정에 의해 식 (32)를 외부절점(1, 2)에 대한 평형관계식으로 다시 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K \delta d_{12} = P_{12} - F \quad (37)$$

$$K = A - B C^{-1} B^T \quad (38)$$

$$F = G_{12} - B C^{-1} G_{bc} \quad (39)$$

따라서 식 (37)은 반강접 보-기둥요소 합성부재의 평형관계식임을 알 수 있으며,  $K$ 와  $F$ 는 각각 합성부재의 접선강성행렬과 부재력 벡터이다.

## 5. 동적이완법

본 연구에서는 비선형 명시적 해석법으로 동적이완법(한상을 등, 1999:Han 등, 2003:Lee 등, 2011)을 하였다. 이 해석법은 벡터연산을 통해서 구조물의 변위를 계산하며, 동적 평형방정식에서부터 아래식과 같은 유사정적(quasi-static) 평형방정식이 유도 된다.

$$\mathbf{g}^t = \mathbf{M}\mathbf{a}^t + \mathbf{C}\mathbf{v}^t \quad (40)$$

위 식에서  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  는 각각 구조물의 가상질량(fictitious mass)과 점성감쇠(fictitious viscous damping)이고,  $\mathbf{g}^t$ ,  $\mathbf{a}^t$ ,  $\mathbf{v}^t$  는 각각  $t$ -시간스텝에서 구조물의 불평형력, 가속도와 속도이다.

시간증분  $\Delta t$  에 대한 절점속도의 유한차분 특성을 도입하고, 구조물의 점성감쇠를 소거하면,  $t + \Delta t/2$  에서 구조물의 속도는 아래식과 같이 유도된다.

$$\mathbf{v}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \mathbf{v}^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t \mathbf{g}^t}{\mathbf{M}} \quad (41)$$

또한 동적이완법이 유사정적 혹은 정적해석법이기 때문에 구조물의 질량은 임의의 가상질량성분으로 치환 가능하며, 최적의 수렴성을 위해서는 구조물의 질량은 아래식과 같이 강성에 비례해야한다(Lee 등, 2011).

$$\mathbf{M} = \alpha \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{K}_d \quad (42)$$

위식에서  $\mathbf{K}_d$  는 대각 질량행렬을 계산하기 위한 점선강성행렬의 대각성분이며,  $\alpha$  는 질량비례계수이다. 따라서 식 (41), 식 (42)에 의해 구조물의 거동은 질량비례계수  $\alpha$  에 종속됨을 알 수 있으며,  $\alpha$  값을 조절해감에 따라 구조물의 수렴성을 조절할 수 있다. 8장의 예제의 수행을 통해 동적이완법의 특성을 검토하도록 한다.

## 6. 묵시적 호장법

Crisfield의 원통형 호장법에서는 예측단계와 수렴단계를 나누어 식 (43)의 호장제약식에 의해 변위와 하중계수를 동시에 계산할 수 있는 해석법이다. 예측단계에서는 점선강성행렬의 행렬식 부호에 따라 기울기방향을 결정하고, 수렴단계에서 불평형력을 수렴시키는 과정을 통해 뒀좌굴, 스냅백좌굴

현상을 효과적으로 해석할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{d} = \Delta l^2 \quad (43)$$

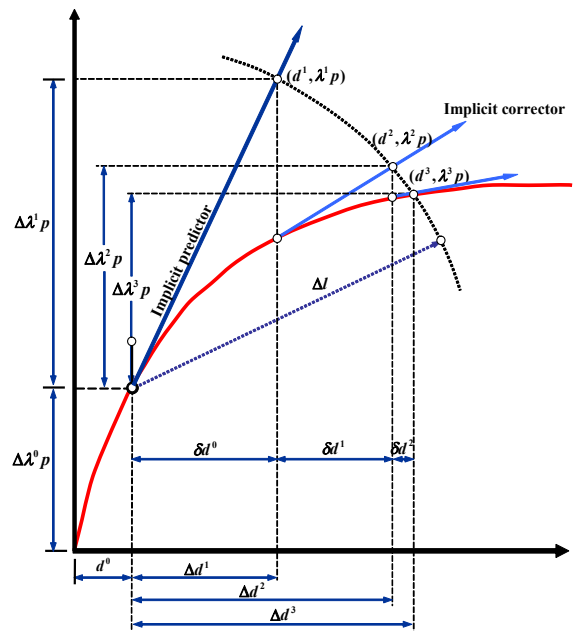
위 식에서  $\Delta \mathbf{d}$  는 각 하중스텝에서의 증분변위이며,  $\Delta l$  은 호의 반경이다. 증분변위  $\Delta \mathbf{d}$  는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{d}^0 + \delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{d}^0 + \delta \mathbf{d}_c + \delta \lambda \delta \mathbf{d}_p \quad (44)$$

묵시적 호장법의 예측단계 및 수렴단계에서는 변위는 아래식과 같이 계산하며, 그림 5에 묵시적 호장법의 개념을 설명하였다.

$$\delta \mathbf{d}_p = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} \quad (45)$$

$$\delta \mathbf{d}_c = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g} = \mathbf{K}^{-1} \{ \lambda^0 \mathbf{p} - \mathbf{F}(\Delta \mathbf{d}^0) \} \quad (46)$$



Predictor : implicit / Corrector : NR

그림 5. P(Impt.)+C(NR)

## 7. 명시적 호장법

Crisfield가 제안한 호장 제약식 식 (43)을 명시적 해석법인 동적이완법에 적용하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \mathbf{d}^{t+\Delta t} \cdot \Delta \mathbf{d}^{t+\Delta t} = (\Delta l^n)^2 \quad (47)$$

위식에서  $\Delta l^n$  는  $n^{th}$  하중스텝에서의 호의 반경이다.



동적이완법에 의한 증분변위는  $\delta \mathbf{d}^{t+\Delta t}$  는 다음식과 같이 유도된다(Han 등, 2003; Lee 등, 2011).

$$\delta \mathbf{d}^{t+\Delta t} = \Delta t \mathbf{v}^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t^2 \{ (\lambda^{t+\Delta t} \mathbf{p}) - \mathbf{F}^t \}}{\mathbf{M}} \quad (48)$$

식 (48)의  $\Delta \mathbf{d}^{t+\Delta t}$  를  $t$  시간스텝의 증분변위  $\Delta \mathbf{d}^t$  와  $t+\Delta t$  시간스텝의 변위  $\delta \mathbf{d}^{t+\Delta t}$  로 구분하여 다시 나타내면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \mathbf{d}^{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{d}^t + \delta \mathbf{d}^{t+\Delta t} \quad (49)$$

식 (48)을 식 (49)에 대입하고 다시 정리하면 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \mathbf{d}^{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{d}^t + a_1 \lambda^{t+\Delta t} + a_2 \quad (50)$$

$$a_1 = \left( \frac{\Delta t^2}{\mathbf{M}} \mathbf{p} \right) \quad (51)$$

$$a_2 = \Delta t \mathbf{v}^{t-\frac{\Delta t}{2}} - \left( \frac{\Delta t^2}{\mathbf{M}} \mathbf{F}^t \right)$$

식 (51)을 식 (48)에 대입하고 정리하면,  $\lambda^{t+\Delta t}$  에 대한 아래의 2차방정식을 얻을 수 있으며, 이 식의 근을 계산함으로써 증분변위에 대한 하중계수를 얻을 수 있다(Lee 등, 2011).

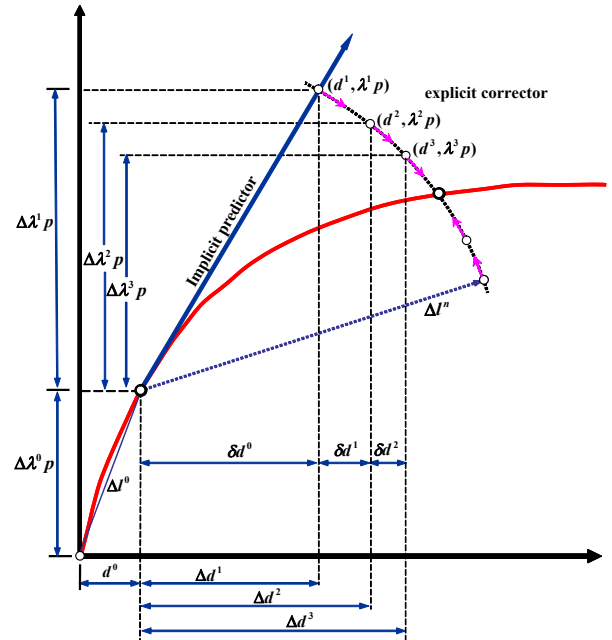
$$b_1 (\lambda^{t+\Delta t})^2 + b_2 (\lambda^{t+\Delta t}) + b_3 = 0 \quad (52)$$

예측단계와 수렴단계 모두 명시적 해석법을 사용한 그림 6의 명시적-명시적 호장법은 해석 중 강성행렬을 사용하지 않아 해석과정이 단순화되는 장점이 있지만, 상대적으로 많은 횟수의 반복계산이 필요로 하는 단점이 있다.

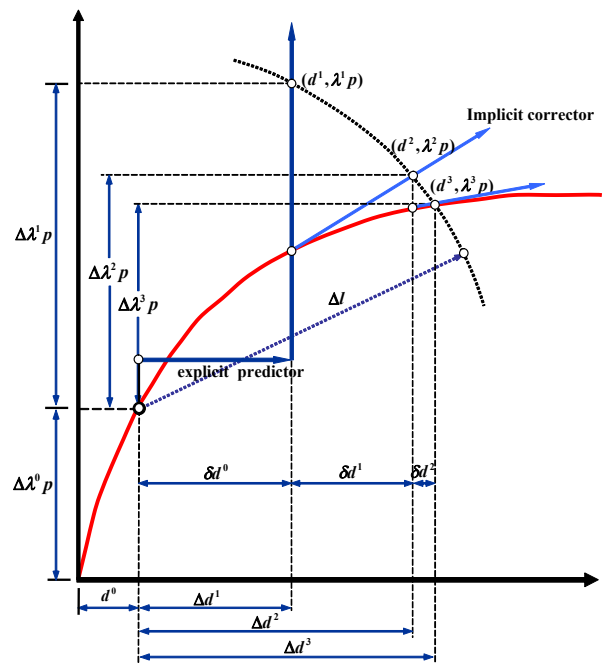
그림7과 그림8은 묵시적-명시적 호장법과 명시적-묵시적 호장법을 설명하고 있다. 이러한 하이브리드형 명시적 호장법에서는 예측단계 및 수렴단계에 적용된 해석법에 따라 각각의 변위를 계산하고, 호장증분식인 식 (48)에 의한 미지의 증분하중을 계산한다.

명시적 해석법과 묵시적 해석법을 동시에 사용하는 본 연구의 하이브리드형 명시적 호장법은 각각의 해석법의 장점을 동시에 적용할 수 있다. 명시적 호장법의 장점은 강성행렬을 사용하지 않는 것이고, 묵시적 호장법의 장점은 적은 반복횟수에 빠른 수렴성을 갖는 것이다. 따라서 하이브리드형 명시적 호장법은 묵시적 호장법에 비해서 강성행렬의 특이성이

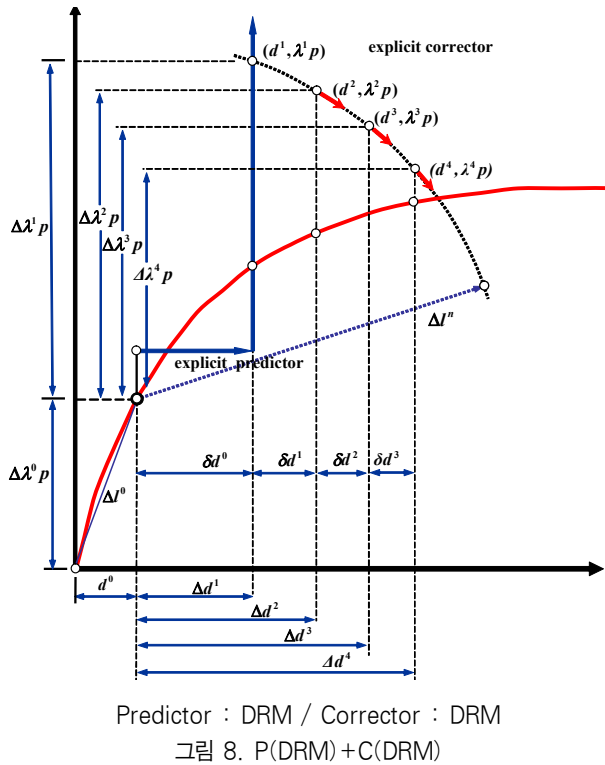
적게 나타나며, 명시적 해석법에 비해서 빠른 수렴성을 얻을 수 있다. 그러나 2가지의 해석법을 동시에 사용하는 하이브리드형 명시적 호장법은 위의 수치 해석적 장점도 불구하고, 2가지 해석알고리즘을 동시에 적용해야하는 수치 해석적 비효율성을 가지는 단점이 있다.



Predictor : implicit / Corrector : DRM  
그림 6. P(Impt.)+C(DRM)



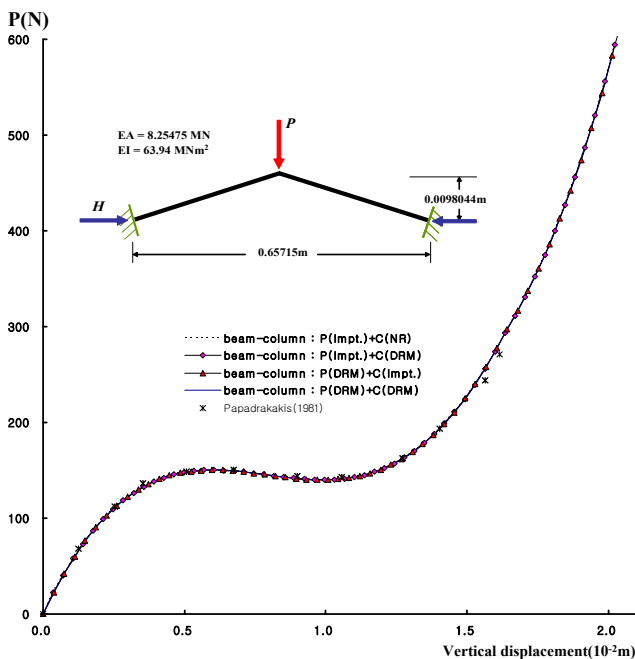
Predictor : DRM / Corrector : NR  
그림 7. P(DRM)+C(NR)



## 8. 검증예제의 수행

본 연구의 다양한 명시적 호장법의 정확성을 검증하기위해 서 공간프레임에 대한 탄소성 후좌굴 해석을 수행하였다.

### 8.1 William toggle의 후좌굴 해석



본 예제는 William(1964)에 의해 제시되어 2차원 평면프레임의 검증예제로 자주 사용되는 예제이다. 본 연구의 보-기둥요소와 다양한 호장법을 사용하여 후좌굴 해석을 수행하였으며, 그림 9에 하중작용점에서의 하중-변위곡선을 나타내었다. 본 연구의 보-기둥요소를 사용하여 1개의 요소만으로 하나의 부재를 모델링하였는데, 해석결과는 Papadrakakis(1981) 등의 이전 연구결과와 일치하였고, 적용된 호장법에 따른 해석결과의 차이는 발생하지 않았다.

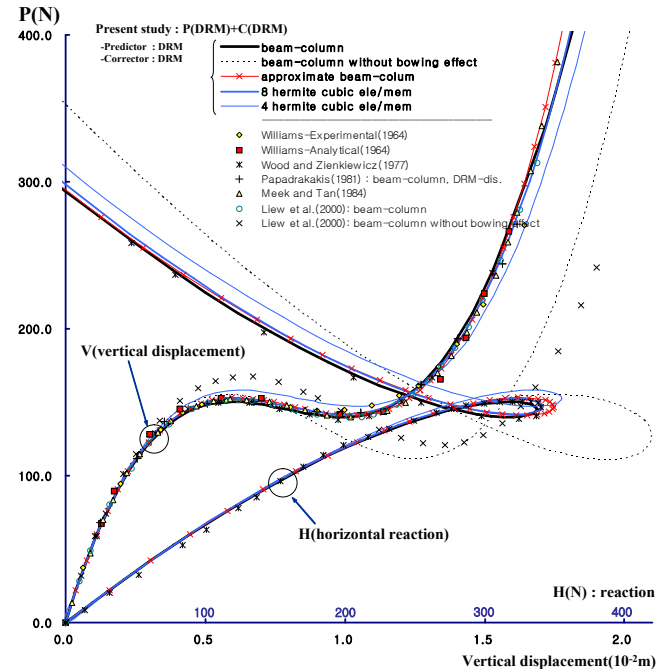


그림 10은 명시적 호장법을 사용하였을 때 적용된 요소에 따른 해석결과를 비교한 것이다. 본 연구의 보-기둥요소는 유한변형이론에 의한 대변위효과를 고려하였고, 보-기둥식에서 휨모멘트에 의한 축력의 증가효과를 고려하였기 때문에 적은 수의 요소를 사용하여도 기하학적 비선형 문제에 대한 정확한 해석결과를 얻을 수 있다. 실제로 유한요소법의 Hermite cubic 형상함수를 사용한 요소를 사용하여 본 예제를 수행하였을 때 1개의 부재를 8개의 유한요소로 분할한 결과가 1개의 보-기둥요소에 의한 결과에 수렴함을 알 수 있었다. Wood 등(1976)은 하나의 부재를 5개의 등매개변수요소로 모델링하여 Total Lagrangian 기법을 통해 해석을 수행하였고, Papadrakakis(1981)는 보-기둥요소를 사용하였으며, Liew(2000)는 굽힘 효과를 고려한 유한요소보요소를 이용하여 해석을 수행하였다. 또한 굽힘 효과를 고려하지 않은 보-기둥요소는 좌굴이후의 기하학적 대변위에 의한 부재의 휨변형 효과를 계산하는데 오차가 발생하였고, 보-기둥식



을 테일러시리즈 전개하여 얻은 근사 보-기동요소(Lee 등, 2011)를 사용하였을 때의 해석결과는 Meek 등(1984)의 결과와 근사한 값을 나타남을 알 수 있었다. 이는 Meek 등(1984)이 적용한 co-rotational 유한요소이론이 보-기동요소의 오일러리안 국부좌표계와 유사한 전개과정을 사용하였기 때문이다. 또한 co-rotational 유한요소이론에서는 절점방향행렬의 증분회전성분이 가환성을 가진다고 가정하기 때문에, 본 연구의 보-기동요소와 달리 접선강성행렬은 대칭성을 가진다.

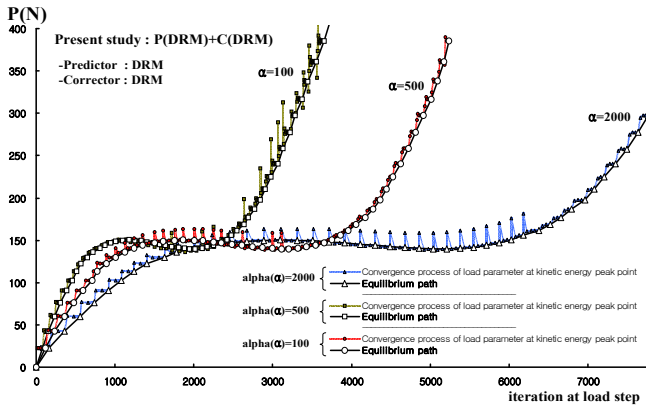


그림 11. 명시적 해석법의 수렴성 조절

그림 11은 명시적 호장법의 해석법적 안정성 및 수렴성을 도식화 한 것이다. 명시적 해석법은 강성행렬을 사용하지 않기 때문에 수렴성을 보장할 수 없는 제한적인 안정성(conditionally stable)을 가진다. 따라서 명시적 해석법에서는 수치 해석적 안정성을 확보하기 위한 안정화 해석과정이 필요하며, 이를 위해서 본 연구에서는 수렴성을 조절할 수 있는 식 (42)의 질량비례계수  $\alpha$ 를 사용하였다. 비교적 작은 값의 수렴계수  $\alpha = 100$ 을 사용하였을 경우,  $\alpha = 2000$ 의 경우보다 더 빠른 해석과정을 얻을 수 있었다. 이는 본 연구의 명시적 해석법이  $\alpha$ 값의 조절에 따른 구조물의 주기를 결정할 수 있기 때문이다. 따라서 더 작은 값의  $\alpha$ 를 사용하면, 목표 거동까지 도달하는데 더 짧은 시간이 걸리게 된다. 그러나 너무 작은  $\alpha$ 값을 사용하면, 불안정성이 커져 수치적 안정성을 확보할 수 없게 된다. 강성구조물의 해석에서 명시적 호장법은 묵시적 호장법에 비해서 더 많은 반복계산 횟수가 필요로 하는 등의 수렴성이 떨어지는 단점이 있으며, 이는 강성행렬을 사용하지 않는 수치 해석적 특성에 기인한다. 따라서 수렴성을 향상시키기 위한 연구가 추가되어야 할 것으로 사료된다.

## 8.2 12부재 공간프레임의 후좌굴 해석

본 예제는 3차원 공간프레임의 검증예제로 자주 사용되는 문제이다. 본 연구의 보-기동요소와 다양한 호장법을 사용하여

후좌굴 해석을 수행하였으며, 그림12에 해석결과를 나타내었다. 하나의 부재를 1개의 보-기동요소로 모델링하였고, 8.1절의 William toggle의 경우와 마찬가지로 해석법에 따른 오차는 없었다. 본 연구에 의한 해석결과는 이동단 경계조건의 경우 Papadrakakis(1981), Liew 등(2001) 등의 이전연구결과와 일치하였고, 힌지 경계조건의 경우 Nee 등(1988)의 해석결과보다 작은 좌굴하중이 계산되었다. 그러나 대체적으로 이전 연구결과와 유사한 거동특성을 나타냄을 알 수 있었다.

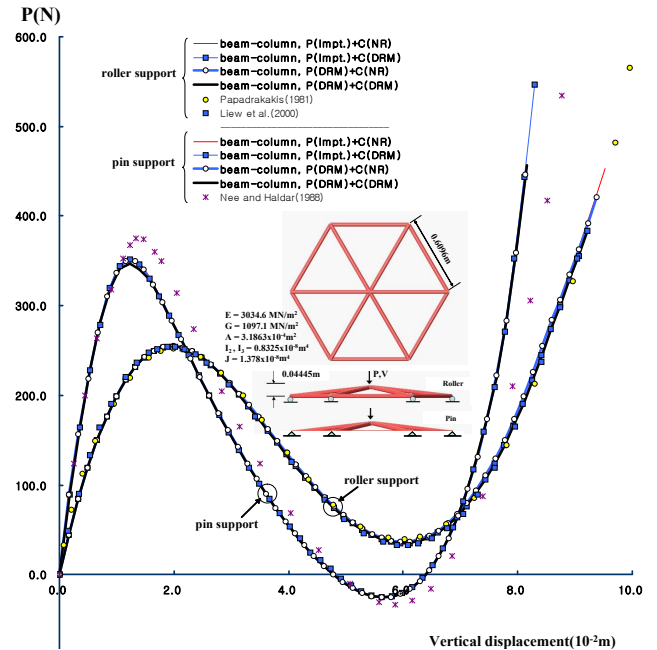


그림 12. 다양한 명시적 호장법에 의한 하중-변위 곡선

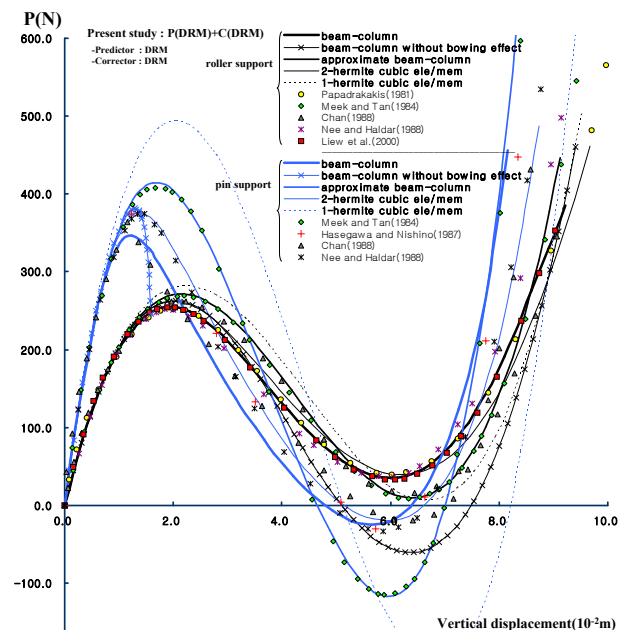


그림 13. 사용 요소에 따른 해석결과

그림 13은 명시적 호장법을 사용하였을 때 적용된 요소에 따른 해석결과를 비교한 것이다. 본 연구의 보-기둥요소를 사용했을 때 적은 수의 요소를 사용함에도 불구하고 가장 정확한 해석결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

### 8.3 18부재 공간프레임의 반강접 탄소성 후좌굴 해석

18부재로 이루어진 공간프레임에 대한 반강접 탄소성 후좌굴 해석을 수행하였다. 그림 14는 각각의 호장법에 의한 탄소성 후좌굴 해석 결과를 비교한 것이다. 이전 예제와 마찬가지로 해석법에 따른 오차는 발생하지 않았으며, 탄성 후좌굴 거동과, 탄소성 후좌굴거동은 이전 연구결과와 일치하였다.

특히 탄소성 후좌굴 해석의 경우 Argyris 등(1982)나 Abbasnia 등(1995)이 보고하지 않았던 탄소성 후좌굴 전체 경로를 새롭게 파악할 수 있었다. 이는 이전 연구(Argyris 등, 1982; Abbasnia 등, 1995)에서는 단순 증분형 해석을 수행하였기 때문에, 극한점 이후의 거동경로를 해석할 수 없었기 때문이다.

탄성 후좌굴의 경우에서도 Kassimali 등(1991)의 결과에 비해서 대변위 상태까지의 거동을 해석할 수 있었다. 본 예제 도 이전 예제와 동일하게 각각의 부재를 단일요소의 보-기둥 요소로 모델링하였다.

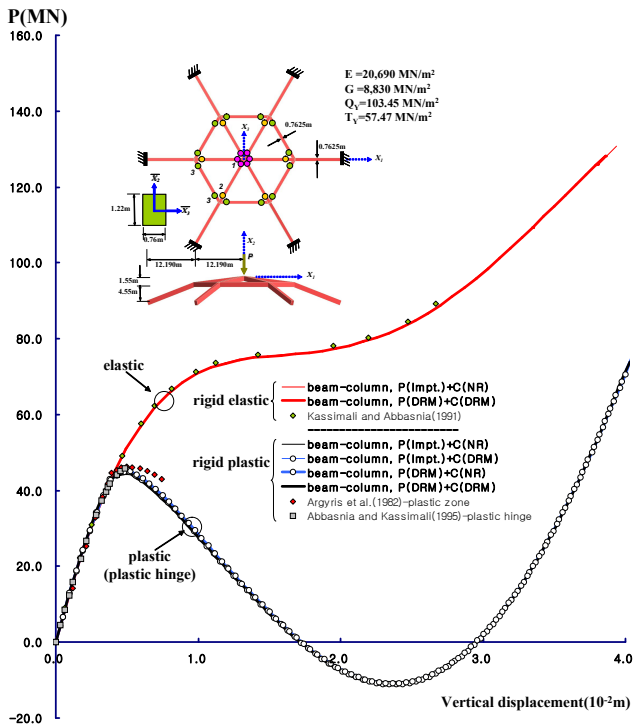


그림 14. 다양한 명시적 호장법에 의한 하중-변위 곡선

표 1. 18부재 공간프레임의 반강접 스프링 강성

|                  | $k_x$ | $k_{\theta 2}$     | $k_{\theta 3}$     |
|------------------|-------|--------------------|--------------------|
| semi-rigid type1 | $EA$  | $EI_2 \times 0.3$  | $EI_3 \times 0.3$  |
| semi-rigid type2 | $EA$  | $EI_2 \times 0.05$ | $EI_3 \times 0.05$ |

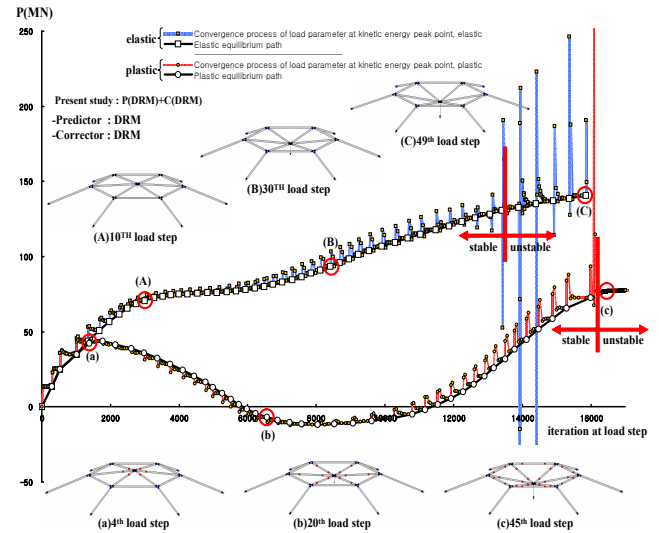


그림 15. 하중-변위관계에 따른 변형형상 및 하중계수의 수렴과정

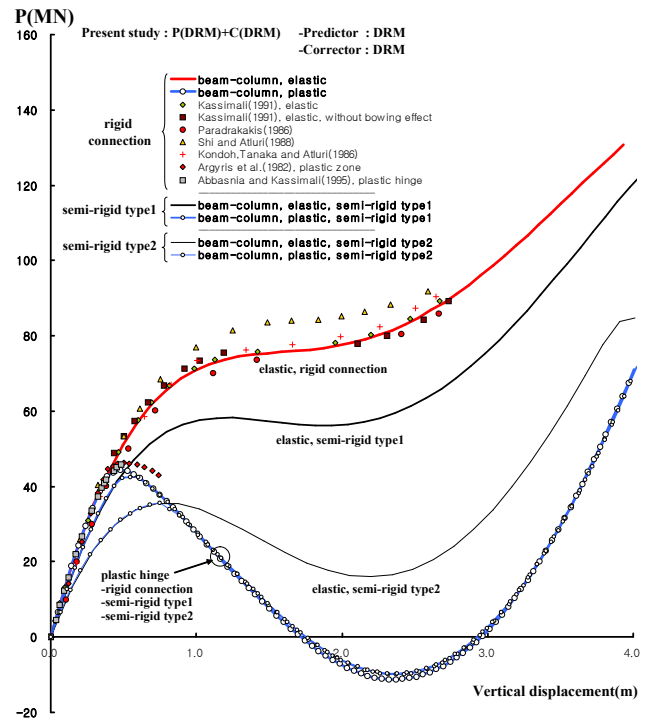


그림 16. 접합부 특성에 따른 해석결과

그림 15는 명시적 해석법을 사용하여 탄성, 탄소성 후좌굴 해석을 수행했을 때 하중-변위관계에 대한 변형형상 및 하중

계수의 수렴과정을 나타낸 것이다. 탄성해석의 경우 44 하중 스텝 이후에서 불평형력 및 하중계수가 이전에 비해서 갑자기 증가하는 불안정성이 발생하여, 결국 49 하중스텝에서 발산하였고, 탄소성해석의 경우 44 하중스텝에서 발산하였는데, 이는 대변위에 의한 부재회전 변형이 크게 발생하였기 때문이다. 만약 2개 이상의 요소로 분할하여 해석을 수행하면, 단일부재의 과도한 휨변형 효과를 분산할 수 있는 효과를 얻을 수 있다.

그림 16은 명시적 호장법을 사용하여 반강접 탄소성 후좌굴 해석을 수행한 결과이며, 접합부 스프링의 강성은 표1의 수치를 적용하였다. 스프링의 회전강성을 줄임에 따라 탄성, 탄소성 좌굴하중이 감소함을 확인 할 수 있었다. 반강접 탄소성 후좌굴 해석에서는 극한점 이후의 거동은 반강접 특성에 관계없이 모두 동일한 평형경로로 이동하고 있는데, 이는 보-기둥요소에 소성 힌지가 발생하여 회전에 대한 저항성능을 상실하였기 때문이다. 따라서 소성힌지 발생이후 구조물은 접합부의 회전강성과 무관한 힌지연결의 불안정구조물로 전이되었다는 것을 의미한다.

## 9. 결 론

본 연구에서는 다양한 명시적 호장법을 사용하여 반강접 탄소성 후좌굴 해석을 수행하기 위해서 다양한 명시적 호장법과 반강접 탄소성 공간프레임요소를 제안하였다.

이전연구 결과를 바탕으로 다양한 명시적 호장법을 제시하였는데, 강성행렬을 사용하는 묵시적 호장법의 결과와 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 그러나 명시적 호장법은 강성행렬을 사용하지 않기 때문에 묵시적 호장법에 비해서 비교적 많은 반복계산이 필요로 하는 단점이 있었지만, 수치 해석적 조절을 통해 수렴성을 증진시킬 수 있었으며, 강성행렬의 유도, 저장, 선형수치해석의 과정이 생략되는 장점을 가질 수 있음을 알 수 있었다. 따라서 본 연구의 명시적 호장법은 묵시적 호장법에 비해서 강성행렬의 사용을 최소화함으로써 명시적 해석법의 수치 해석적 장점을 높일 수 있었다.

또한 본 연구의 공간프레임요소는 기하학적, 재료적 비선형 특성 및 접합부 반강접 특성을 반영할 수 있는 요소로 3차원 탄소성 보-기둥요소에 기초하는데, 대변위의 기하학적 비선형 특성을 반영하기 위해서 오일러리안 유한회전이론에 의한 강제회전변형을 계산하였고, 보-기둥식에서 굽힘효과를 고려하여 축력에 대한 회전변형효과를 고려하였다. 또한 재료적 비선형 특성을 반영하기 위해서 소성힌지이론을 적용하였고, 반강접 스프링요소에 의해 접합부 특성을 고려하였으며, 정적응축과정에 의해 접합부 스프링과 내부의 보-기둥의 합성강성행렬과 부재력을 계산하였다. 이 요소를 사용하여 검증예제를 수행하였을 때, 다양한 문제에 대해서 정확한 해석결과를 얻

을 수 있었다. 또한 이 요소는 명시적, 묵시적 해석법에 대하여 모두 정확한 해석결과를 나타내었다.

향후 실제적인 문제에 대한 적용성 및 범용성을 확보한다면, 본 연구의 명시적 호장법과 반강접 탄소성 보-기둥요소는 후좌굴 해석 및 연속붕괴 문제에 효율적으로 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

## 감사의 글

본 연구는 국토해양부 첨단도시개발사업의 연구비지원 (과제번호# 09 첨단도시A01)에 의해 수행되었습니다.

## 참 고 문 헌

- 김문영, 노범준, 정성엽(1996) 공간빠대 구조물의 대변형 및 탄소성 유한요소해석, 1996년도 한국강구조학회 학술발표대회 논문집, 한국강구조학회, pp.157-168.
- 한상을, 이경수, 이상진(1999) 동적이완법에 의한 불안정 구조물의 안정화이행과정 해석에 관한 연구. 한국강구조학회지, 한국강구조학회, 제11권, 제6호, pp.591-602.
- 이경수, 한상을(2009) 공간구조물의 분기좌굴해석을 위한 수치해석 이론개발, 한국강구조학회 논문집, 한국강구조학회, 제21권, 제6호, pp.563-574.
- 이경수, 한상을(2009) 유한변형과 접합특성을 고려한 공간프레임의 대변형 탄소성 해석, 한국강구조학회 논문집, 한국강구조학회, 제21권, 제6호, pp.597-608.
- 加藤史郎 (1997) 單層ラチスドームの座屈に関する研究成果の報告, ラチス構造の弾塑性座屈解析法の基礎, 符録1, 豊橋技術科學大學建設工學系構造工學講座.
- Abbasnia, R. and Kassimali, A. (1995) Large Deformation Elastic-plastic Analysis of Space Frames, *J. Construct. Steel Research*, Vol. 35, pp.275-290.
- Argyris, J.H., Boni, B., Hindenlang, U., and Kleiber, M. (1982) Finite element analysis of two and three dimensional elasto-plastic frames-the natural approach, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* Vol. 35, pp. 221-248.
- Batoz, J.L. and Dhatt, G. (1979) Incremental displacement algorithm for nonlinear problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 14, pp.1262-1266.
- Chen, W.F., Goto, Y., and Liew, J.Y.R. (1996) Stability Design of Semi-Rigid Frames, John Wiley & Sons, Inc.
- Cheng, H. and Gupta, K.C. (1989) An historical note on finite rotations, *J. Applied Mechanics*, Vol. 56, pp.139-145.

- Crisfield, M.S. (1981) A fast incremental iterative solution procedure that handles 'snap through', *Computer & Structures*, Vol. 13, pp.55-62.
- Crisfield, M.A. (1997) Nonlinear finite element analysis of solids and structures, Vol. 2, Advanced Topics, John Wiley & Sons.
- Euler, L. (1775) Formulae Generales pro Trans latione Quacunque Corporum Rigiddrum, Novi Commentari Acad. Imp. Petrop., Vol. 20, pp.189-207.
- Goldstein, H. (1980) Classical Mechanics, Addison-Wesley
- Han, S.E. and Lee, K.S. (2003) A Study of the Stabilizing Process of Unstable Structures, *Computers & Structures*, Vol. 81, pp.1677-1688.
- Kato, S., Mutoh, I., and Shomura, M. (1998) Collapse of semi-rigidly jointed reticulated domes with initial geometric imperfections, *J. Construct. Steel Research*, Vol. 48, pp.145-168.
- Kato, S., Kim, J.M., and Cheong, M. (2003) A new proportioning method for member sections of single layer reticulated domes subjected to uniform and nonuniform loadings, *Engineering Structures*, Vol. 25, pp.1265-1278.
- Kassimali, A. and Abbasnia, R. (1991) Large deformation analysis of elastic space frames, *J. Struc. Eng. ASCE*, Vol. 117(7), pp.2067-2087.
- Kondoh, K. and Atluri, S.N. (1986) Simplified Finite Element Method for Large Deformation, Post-Buckling Analysis of Large Frame Structures, Using Explicitly Derived Tangent Stiffness Matrices, *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 23(1), pp.69-90.
- Lee, K.S., Han, S.E., and Park, T.H. (2011) A simple explicit arc-length method using the dynamic relaxation method with kinetic damping, *Computers & Structures*, Vol. 89, pp.216-233.
- Lee, K.S. and Han, S.E. (2011) Semi-rigid Elasto Plastic Post Buckling Analysis a Space Frame with Finite Rotation, *International Journal of Advanced Steel Construction*, Vol. 7(3), pp.275-303.
- Levy, R. and Spillers, W.R. (2003) Analysis of Geometrically Nonlinear Structures, Second Edition, Kluwer Academic Publishers.
- Liew, J.Y.R., Chen, H., Shanmugam, N.E., and Chen, W.F. (2000) Improved nonlinear plastic hinge analysis of space frame structures, *Engineering Structures*, Vol. 22, pp.1324-1338.
- Meek, J.L. and Tan, H.S. (1984) Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by an Incremental Iterative Technique, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 47, pp.261-282.
- Nee, K.M. and Haldar, A. (1988) Elastoplastic Nonlinear Post-Buckling Analysis of Partially Restrained Space Structures, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 71, pp.69-97.
- Papadrakakis, M. (1981) Post Buckling Analysis of Spatial Structures by Vector Iteration Methods, *Computer & Structure*, Vol. 14, pp.393-402.
- Ramm, E. (1981) Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, in : W. Wunderlich, E. Stein and K.J. Bathe, eds., Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics. Springer, pp.63-89.
- Riks, E. (1979) An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 15, pp.529-551.
- Spiller, W.R. (1990) Geometric stiffness matrix for space frames, *Computers & Structures*, Vol. 36(1), pp.29-37.
- Williams, F.W. (1964) An approach to the nonlinear behavior of the members of a rigid jointed plane frames work with finite deflections, *J. Mech. Appl. Math.* Vol. 17, pp.451-469.
- Shi, G. and Atluri, S.N. (1988) Elasto-plastic large deformation analysis of space-frames: a plastic-hinge and stress-based explicit derivation of tagent stiffness, *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 26, pp.589-615.
- Wood, R.D. and Zienkiewicz, O.C. (1977) Geometrically non-linear finite element analysis of beam, frames, arches and axisymmetric shells, *Computers & Structures*, Vol. 7, pp.725-735.

(접수일자 : 2011. 4. 4 / 심사일 2011. 4. 19 /  
심사완료일 2011. 10. 11)