

# 복합적층구조해석을 위한 1차전단변형이론의 간단한 수정방안

## A Simple Modification of the First-order Shear Deformation Theory for the Analysis of Composite Laminated Structures

천 경 식<sup>1)</sup> · 지 효 선<sup>2)</sup>  
*Chun, Kyoung Sik Ji, Hyo Seon*

요 약 : 본 논문에서는 1차전단변형이론의 횡방향 전단응력과 전단변형률을 개선한 간단한 수정방법을 제시하였다. 고차전단변형이론, 층별이론과 같은 기존의 많은 제정된 방법들과 비교해서 본 방법은 매우 간단하게  $C^0$  연속성만이 요구되는 유한요소에 적용할 수 있으며, 그 방정식 구성도 매우 간단하다. 본 방법의 기본 개념은 고차전단변형이론에 의한 수식으로 부터 두께방향에 따른 횡방향 전단응력과 전단변형률의 분포를 수정하는 것이다. 그러므로 1차전단변형이론처럼 전단보정계수는 더 이상 요구되지 않는다. 제안한 수식의 타당성을 검증하기 위하여 수치해석을 수행하였으며, 본 수정방법에 의한 해는 고차전단변형이론을 고려한 결과와 잘 일치하였다.

ABSTRACT : In this study, a simplified method of improving not only transverse shear stress but also shear strain based on the first-order shear deformation theory was developed. Unlike many established methods, such as the higher-order shear deformation and layerwise theories, this method can easily apply to finite elements as only  $C^0$  continuity is necessary and the formulation of equations is very simple. The basic concept in this method, however, must be corrected: the distribution of the transverse shear stresses and shear strains through the thickness from the formulation based on the higher-order shear deformation theory. Therefore, the shear correction factors are no longer required, based on the first-order shear deformation theory. Numerical analyses were conducted to verify the validity of the proposed formulations. The solutions based on the simplified method were in very good agreement with the results considering the higher-order shear deformation theory.

핵심 용 어 : 횡방향 전단응력, 변형률, 전단보정계수, 고차전단변형, 1차전단변형.

KEYWORDS : transverse shear stresses and strains, shear correction factor, higher-order shear deformation, first-order shear deformation

### 1. 서론

섬유보강 복합재료는 높은 비강도, 비강성으로 인해 항공우주 산업뿐만 아니라 조선, 자동차, 기계 등 여러 분야에서 적용되고 있다. 특히 선진국에서는 섬유보강 복합재료를 교량, 건물, 관로 등의 건설분야에 응용하려는 연구가 10여년 전부터 활발히 진행되어 왔으며, 국내에서는 완전 복합신소재 교량을 법정도료에 최초로 건설하였다(지효선 등, 2002). 이러한 섬유보강 복합재료는 이방성 재료를 임의의 섬유 보강각도

로 배치·적층시켜 제작한다. 그러므로, 복합적층 구조는 보다 정확한 해석을 통해 거동특성을 파악해야 하며, 그에 따른 많은 연구가 계속 진행되어 왔다.

우선, 고전적 판 이론은 전단변형 효과를 무시하였기 때문에 얇은 판에 대해서만 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 그 후 Reissner (1945)가 전단응력이 두께방향으로 일정하게 분포한다는 가정하에 전단변형효과를 고려하였으며, Mindlin (1951)은 전단응력이 포물선 분포를 나타내므로 전단보정계수를 도입하여 Reissner의 이론을 수정하였다. Whitney (1969)는 전단보

1) (주)바우컨설턴트 구조부, 차장, 공학박사(chunkspe@naver.com)

2) 교신저자. 대원대학 철도건설과, 부교수, 공학박사

(Tel: 043-649-3266, Fax: 043-649-3681, E-mail: hsji@mail.daewon.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2012년 2월 29일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

정계수를 5/6로 제시, 현재까지 적용되고 있는 1차전단변형이론의 토대를 마련하였으며, 구조물의 거동해석에 있어서 기대 이상의 정확도를 보여 오늘날까지 유한요소에서 적용되고 있다. 그러나 복합적층 구조물의 국부해석에 있어서 정확한 응력예측이 요구되나, 1차전단변형이론은 판/셸의 두께방향에 따라 전단변형률과 전단응력을 정확하게 표현할 수 없다는 단점이 있다. 즉, 면내변형률과 면내응력을 제외한 횡방향 전단변형이 두께방향으로 일정하게 분포한다는 가정으로 인해 판이나 셸의 상·하면에서 전단변형이 0이 되는 조건을 만족하지 못한다. 전단보정계수는 단지 원통형 휨모드(cylindrical bending)를 갖는 등방성이나 크로스-플라이로 적층된 판에서만 합리적인 값을 나타내며, 일반적인 비등방성 판이나 셸에서는 적용의 한계가 있다. 이러한 단점을 극복하기 위한 두 가지 접근방법이 있다.

첫 번째 방법은 전단왜곡함수(shear warping function)를 추가함으로써 개선한 것이며(Pai, 1995), 두 번째 방법은 반복계산을 통해 알맞은 전단보정계수를 찾아내는 방법이다(Noor 등, 1990). 최근에는 변위장의 요소를 두께방향에 관한 Talyor 전개식으로 확장, 고차항이 포함된 전단변형이론이 제시되었다. Reddy(1984)는 단순화된 고차전단변형이론을, Kant(2000, 2001, 2001)는 일반화된 Hook의 법칙을 이용하여 종방향 수직 변형률/응력의 효과와 종방향 뒤틀림을 고려한 적층판의 유한요소 지배방정식을 유도, 3차원 탄성해석을 수행하였다. 천경식 등(2003)은 앞서 언급된 다양한 고차전단변형이론을 토대로 8절점 유한요소를 개발하여 그 결과를 비교, 분석하였다. 또한 두께방향에 따라 면내변위를 구간별 포물선 분포로 나타내는 Layerwise이론(Reddy 등, 1990)이 최근에 개발되었으며, 전단변형의 보다 정확한 거동을 나타낼 수 있었다. 이 때, Layerwise 거동을 표현할 수 있는 함수로 지그재그 함수(zig-zag function)가 있으며, 천경식 등(2003)은 삼각함수를 이용한 적층보의 지그재그 모델을 제시하였다. 하지만 고차전단변형과 Layerwise이론 및 다른 여타방법들은 상당히 많은 자유도를 포함하고 있으며 전개식이 복잡하다.

따라서, 간단하면서도 적용이 용이한 1차전단변형이론의 개선방향을 찾는 것이 우선이라 할 수 있다. 이에 Rolfes와 Rohwer (1997)는 전단보정계수 5/6이 필요하지 않고, 판의 상·하면에서의 경계조건을 만족하는 개선된 전단강성행렬을 제시하였다. 그러나, 판의 거동을 원통형 휨모드(cylindrical bending)로 국한하고 있으며, 전단강성행렬 유도시 면내하중에 의한 영향을 무시하고 면외하중만을 고려하였다. Auricchio와 Sacco (2003)는 3차원 평형방정식과 부분 혼합된 수식화(partial mixed formulation)에 근거하여 합리식을 도출하였으나 그 식이 상당히 복잡하고, 추후 비선형 해석시 또 다른

추가적인 수식화를 요구하는 등의 불편함이 있다.

따라서, 본 연구에서는 간단하면서도 효율적인 1차전단변형이론의 개선방안을 제시하고자 한다. 개선안은 판의 상·하면에서 전단변형률 및 응력에 대한 경계조건을 만족하고, 전단보정계수를 사용하지 않으며, 자유도는 기존의 FSDT(first-order shear deformation theory)와 동일할 뿐만 아니라, 어떠한 가정이나 혼합정식화를 통한 복잡한 수식전개가 필요하지 않고 매우 간단하다.

## 2. 기본이론

일정한 두께  $h$ 를 갖는 적층구조  $\Omega$ 는 다음과 같다. 여기서, 평면  $z = 0$ 은 변형전 평판의 중립면을 의미한다.

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, z) \in R^3 / z \in \left( -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right), (x_1, x_2) \in A \subset R^2 \right\} \quad (1)$$

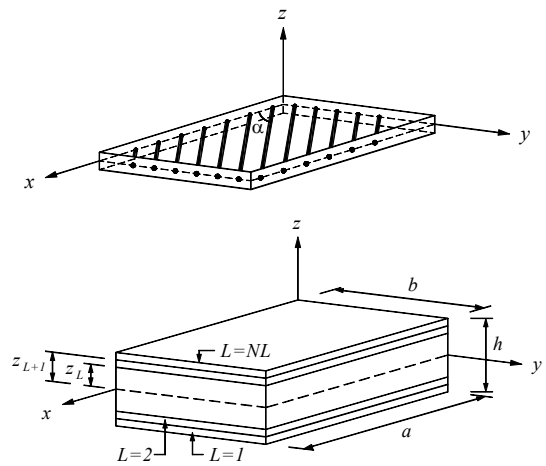


그림 1. 적층구조에서 전체 및 국부 좌표계

적층은  $NL$ 개의 층수로 이루어지며,  $L$ 번째 층은 두께방향으로  $z = z_{L-1}$ 과  $z = z_L$ 사이에 놓여있다. 적층판 상·하면의 위치는  $z_0 = -h/2$ ,  $z_{NL} = h/2$ 이다.

1차전단변형이론의 변형률과 응력장은 다음의 기본적인 가정에 따라 전개한다.

- 1) 중립면에 수직인 응력( $\sigma_z$ )은 0이다.
- 2) 변형전 두께방향 중립면에 수직인 평면은 변형후에도 평면을 유지하지만 중립면과 수직일 필요는 없다 ( $\gamma_{xz} \neq 0, \gamma_{yz} \neq 0$ ).
- 3) 판의 수직방향 변형률( $\epsilon_z$ )은 매우 작으므로 무시한다.

1차전단변형이론의 변위장은 식(2a), (2b), (2c)와 같으며,  $u$ ,  $v$ 와  $\psi_x, \psi_y$ 는 각각 중립면에서의 면내변위와  $y$ 축과  $x$ 축에 대한 회전각을,  $w$ 는 횡방향 변위를 의미한다.

$$u_1(x, y, z) = u + z\psi_x \tag{2a}$$

$$u_2(x, y, z) = v + z\psi_y \tag{2b}$$

$$u_3(x, y, z) = w \tag{2c}$$

### 3. 개선방안

본 연구에서 제시하고자 하는 1차전단변형이론의 수정방법은 Reddy (1984)의 고차전단변형이론으로부터 유도한다. 고차전단변형이론의 변위장은 식(3a), (3b), (3c)와 같다.

$$u_1(x, y, z) = u + z\psi_x + z^2\xi_x + z^3\zeta_x \tag{3a}$$

$$u_2(x, y, z) = v + z\psi_y + z^2\xi_y + z^3\zeta_y \tag{3b}$$

$$u_3(x, y, z) = w \tag{3c}$$

여기서, 고차변위  $\xi_x, \xi_y, \zeta_x$  그리고  $\zeta_y$ 는 판/셸 상·하면에서의 전단응력( $\tau_{xz} = \tau_5, \tau_{yz} = \tau_4$ )이 0이 되는 경계조건에 의해 결정한다.

$$\tau_5\left(x, y, \pm \frac{h}{2}\right) = 0, \tau_4\left(x, y, \pm \frac{h}{2}\right) = 0 \tag{4}$$

직교이방성 판이나 직교이방성 층을 임의의 보강각도로 적층시킨 판/셸의 경우도 식(4)의 경계조건을 만족하여야 하고, 전단변형률에 관해서도 마찬가지로 식(6a), (6b)와 같이 0이 되어야 한다.

$$\gamma_2 = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = \psi_x + 2z\xi_x + 3z^2\zeta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{5a}$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = \psi_y + 2z\xi_y + 3z^2\zeta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{5b}$$

$$\gamma_2\left(x, y, \pm \frac{h}{2}\right) = 0 \tag{6a}$$

$$\gamma_1\left(x, y, \pm \frac{h}{2}\right) = 0 \tag{6b}$$

즉,

$$\xi_x = 0, \xi_y = 0 \tag{7a}$$

$$\zeta_x = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x\right) \tag{7b}$$

$$\zeta_y = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y\right) \tag{7c}$$

식(3)에 제시된 변위장에 식(7a), (7b), (7c)를 대입하여 정리하면 식(8a), (8b), (8c)와 같이 새로운 변위장을 유도할 수 있다. 식(9a), (9b), (9c), (9d), (9e)는 그에 따른 변형률이다.

$$u_1 = u + z\psi_x - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{8a}$$

$$u_2 = v + z\psi_y - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{8b}$$

$$u_3 = w \tag{8c}$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^0 + z\kappa_1^0 + z^3\kappa_1^2 \tag{9a}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_2^0 + z\kappa_2^0 + z^3\kappa_2^2 \tag{9b}$$

$$\epsilon_6 = \epsilon_6^0 + z\kappa_6^0 + z^3\kappa_6^2 \tag{9c}$$

$$\gamma_1 = \gamma_1^0 + z^2\kappa_4^2 \tag{9d}$$

$$\gamma_2 = \gamma_2^0 + z^2\kappa_5^2 \tag{9e}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \epsilon_1^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_2^0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_6^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \kappa_1^0 &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \kappa_1^2 = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ \kappa_2^0 &= \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \kappa_2^2 = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ \kappa_6^0 &= \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\kappa_6^2 = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

$$\gamma_1^0 = \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}, \kappa_4^2 = -\frac{4}{h^2}\left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\gamma_2^0 = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \kappa_5^2 = -\frac{4}{h^2}\left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

면내 변형률은 식(9a), (9b), (9c), (9d), (9e)에 나타낸 고차전단변형이론에 의한 변형률에서  $\epsilon_1, \epsilon_2$ 와  $\epsilon_6$ 에서  $z^3$ 항을 제외한 나머지 항으로도 충분하다. 즉,  $\kappa_1^2, \kappa_2^2$ 와  $\kappa_6^2$ 을 무시하고 다음과 같이 식(9a), (9b), (9c), (9d), (9e)를 간단히 정리할 수 있다.

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} z \tag{11a}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} z \tag{11b}$$

$$\epsilon_6 = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right) z \tag{11c}$$

$$\gamma_1 = \left(1 - \frac{4}{h^2} z^2\right) \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (11d)$$

$$\gamma_2 = \left(1 - \frac{4}{h^2} z^2\right) \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (11e)$$

식(11a), (11b), (11c), (11d), (11e)에서 전단변형률  $\gamma_1$  와  $\gamma_2$  를 제외한 나머지는 1차전단변형이론에 의한 변형률과 동일하다. 식(11d), (11e)에서 보듯이 1차 전단변형률  $(\psi_y + \partial w/\partial y, \psi_x + \partial w/\partial x)$ 에  $(1 - 4z^2/h^2)$  항을 추가함으로써 실제와 유사한 포물선 분포를 나타낼 수 있으며, 이는 전단응력이 판의 상·하면에서 0이 되어야하는 경계조건을 만족시킨다. 여기서, 식(11d), (11e)에 나타난 포물선 함수식을 다음과 같이 전단변형에 관한 형상함수로 정의한다(Yunquin 등, 1996).

$$\varpi(\eta) = 1 - \eta^2, \quad \eta = \left(\frac{2z}{h}\right) \quad (12)$$

실제적으로 발생하는 전단변형률  $\gamma$ 는 1차 전단변형이론에 의한 전단변형률  $\gamma^{(1)}$ 과 전단형상함수( $\varpi(\eta)$ )의 관계식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\gamma = \gamma^{(1)} \varpi_\gamma(\eta) \quad (13a)$$

$$\tau = \tau^{(1)} \varpi_\tau(\eta) \quad (13b)$$

식(13a), (13b), (14a)에 의한 전단에너지  $U_s$ 와 두께방향으로 균일한 전단변형률(이하 ‘공칭전단변형률’)에 의한 전단에너지  $\bar{U}_s$ 의 등식으로부터 공칭전단변형률과 1차전단변형률의 관계식( $f_\eta$ )을 유도하면 식(14b)와 같다.

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tau \gamma h d\eta = \frac{1}{2} \tau^{(1)} \gamma^{(1)} h \int_{-1}^1 \varpi_\gamma(\eta) \varpi_\tau(\eta) d\eta$$

$$\bar{U}_s = \frac{1}{2} \bar{\gamma} \int_{-1}^1 \tau h d\eta = \frac{1}{2} \tau^{(1)} \bar{\gamma} h \int_{-1}^1 \varpi_\tau(\eta) d\eta \quad (14a)$$

$$\gamma^{(1)} = \frac{\int_{-1}^1 \varpi_\tau(\eta) d\eta}{\int_{-1}^1 \varpi_\gamma(\eta) \varpi_\tau(\eta) d\eta} \bar{\gamma} = f_\eta \bar{\gamma} \quad (14b)$$

식(14b)를 식(13a), (13b)에 대입하여 정리하면 식(15a), (15b), (16a), (16b)와 같이 전단변형률과 전단응력을 함수의 형태로 표현할 수 있다. 여기서,  $S$ 는 강성의 역으로 표현되는 컴플라이언스(compliance)로써 전단응력과 전단변형률에 관한 형상함수( $\varpi_\tau, \varpi_\gamma$ )의 관계로 유도되며,  $G^{(L)}$ 는  $L$  번째 층의 전단계수를 의미한다.

$$\gamma_1 = f_\eta \varpi_\gamma(\eta) \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (15a)$$

$$\gamma_2 = f_\eta \varpi_\gamma(\eta) \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (15b)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{S} \gamma_1^{(1)} \varpi_\tau(\eta) = \frac{1}{S} f_\eta \varpi_\tau(\eta) \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (16a)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{S} \gamma_2^{(1)} \varpi_\tau(\eta) = \frac{1}{S} f_\eta \varpi_\tau(\eta) \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (16b)$$

여기서,

$$S = \frac{\int_{-1}^1 \frac{\varpi_\tau(\eta)}{G^{(L)}} d\eta}{\int_{-1}^1 \varpi_\tau(\eta) d\eta} = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \frac{\varpi(\eta)}{G^{(L)}} d\eta$$

표 1. 사인하중을 받는 단순 지지된 정사각형 적층판( $0^0/90^0/90^0/0^0$ )의 중앙점에서 무차원화된 최대처짐

| $a/h$ | Theory                        | $w^*$          |
|-------|-------------------------------|----------------|
| 4     | ELS (Pagano)                  | 1.9360         |
|       | HSDT (Reddy)                  | 1.8940 (0.963) |
|       | FSDT (Whitney)                | 1.7100 (0.883) |
|       | 8QUAD72 (천경식 등, 2003a; 2003b) | 1.9023 (0.983) |
|       | SC-FSDT                       | 1.8324 (0.947) |
| 10    | ELS (Pagano)                  | 0.7370         |
|       | HSDT (Reddy)                  | 0.7150 (0.970) |
|       | FSDT (Whitney)                | 0.6630 (0.899) |
|       | 8QUAD72 (천경식 등, 2003a; 2003b) | 0.7204 (0.997) |
|       | SC-FSDT                       | 0.7004 (0.950) |
| 20    | ELS (Pagano)                  | 0.5130         |
|       | HSDT (Reddy)                  | 0.5060 (0.986) |
|       | FSDT (Whitney)                | 0.4910 (0.957) |
|       | 8QUAD72 (천경식 등, 2003a; 2003b) | 0.5078 (0.990) |
|       | SC-FSDT                       | 0.5027 (0.980) |
| 100   | ELS (Pagano)                  | 0.4350         |
|       | HSDT (Reddy)                  | 0.4340 (0.998) |
|       | FSDT (Whitney)                | 0.4340 (0.998) |
|       | 8QUAD72 (천경식 등, 2003a; 2003b) | 0.4343 (0.998) |
|       | SC-FSDT                       | 0.4350 (1.000) |

표 2. 등분포하중을 받는 단순 지지된 정사각형 적층판( $0^0/90^0/0^0$ )의 중앙점에서 무차원화된 최대처짐

| $a/h$ | HSDT<br>(Reddy) | FSDT<br>(Whitney) | 8QUAD72<br>(천경식 등, 2003a; 2003b) | SC-FSDT        |
|-------|-----------------|-------------------|----------------------------------|----------------|
| 4     | 2.9091          | 2.6597 (0.914)    | 2.9096 (1.000)                   | 2.8398 (0.976) |
| 10    | 1.0900          | 1.0220 (0.938)    | 1.0981 (1.007)                   | 1.0649 (0.977) |
| 20    | 0.7760          | 0.7573 (0.976)    | 0.7785 (1.003)                   | 0.7684 (0.990) |
| 50    | 0.6838          | 0.6807 (0.995)    | 0.6842 (1.001)                   | 0.6820 (0.997) |

### 4. 결과분석

본 절에서는 앞서 제시한 단순 수정된 1차전단변형이론의 타당성을 규명하고자 Pagano(1972)의 정해 및 여러 이론들과 비교·분석하였다.

해석모델은 다음에 제시된 직교이방성 성질을 갖는 4변 단순 지지된 비등방성 적층판이며, 하중조건은 Navier에 의한 해석해(Analytical Solution)와의 비교를 위해 사인하중과 등분포하중으로 제한한다. 참고적으로 본 연구에서 제시된 해석결과는 유한요소에 의한 값으로 요소분할수는  $20 \times 20$ 로 설정하였다.

$$\begin{aligned}
 E_1/E_2 &= 25 \\
 G_{12}/E_2 &= G_{23}/E_2 = 0.5, \quad G_{13}/E_2 = 0.2 \\
 \nu_{12} &= 0.25
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

하중 및 처짐, 응력에 대한 무차원 계수는 다음과 같다.

$$q = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{18}$$

$$w^* = w_0(a/2, b/2)(E_2 h^3/a^4 q_0) \tag{19a}$$

$$\sigma_x^* = \sigma_x(a/2, b/2, h/2)(h^2/b^2 q_0) \tag{19b}$$

$$\sigma_y^* = \sigma_y(a/2, b/2, h/4)(h^2/b^2 q_0) \tag{19c}$$

$$\sigma_{xy}^* = \sigma_{xy}(0, 0, h/2)(h^2/b^2 q_0) \tag{19d}$$

$$\sigma_{yz}^* = \sigma_{yz}(a/2, 0, 0)(h/b q_0) \tag{19e}$$

$$\sigma_{xz}^* = \sigma_{xz}(0, b/2, 0)(h/b q_0) \tag{19f}$$

동일한 두께를 갖는 4개층을 ( $0^0/90^0/90^0/0^0$ )으로 적층시킨 단순지지된 정사각형판( $a/b=1$ )에 사인(sine)하중을 재하시켜 해석을 수행하였으며, 그에 따른 중앙점의 무차원 처짐을 표 1에 나타내었다. 표 1에서 ELS는 3차원 탄성이론에 의해 Pagano가 제시한 해이며, FSDT는 전단보정계수 5/6를 갖는 1차전단변형이론으로 Whitney가 제시하였다. HSDT는 Reddy에 의해 제시된 단순화된 고차전단변형이론으로 7개의 자유도를 갖고 있다. 8QUAD72는 천경식 등(2003)이 고차전단변형이론을 토대로 작성한 8절점 유한요소의 해석치이다. 표에서 (·) 안에 수치는 ELS에 대한 비율을 의미한다.

본 연구에서 제시한 수정된 1차전단변형이론 SC-FSDT는 전단보정계수를 갖는 FSDT와 비교하여 상당히 개선되었음을 알 수 있다. 특히, SC-FSDT와 FSDT를 폭두께비에 따라 ELS와 비교한 결과, 그 오차가  $a/h=4$ 에서 5.3%, 11.7%,  $a/h=10$ 에서 5%, 10.1%,  $a/h=20$ 에서 2%, 4.5%를 나타내고 있어 성능이 향상되었음을 알 수 있다.

표 3. 사인하중을 받는 단순 지지된 정사각형 적층판( $0^0/90^0/90^0/0^0$ )의 중앙점에서 무차원화된 최대응력

| $a/h$ | Theory         | $\sigma_x^*$ | $\sigma_y^*$ | $\sigma_{yz}^*$ | $\sigma_{xz}^*$ | $\sigma_{xy}^*$ |
|-------|----------------|--------------|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 4     | ELS (Pagano)   | 0.720        | 0.663        | 0.292           | 0.219           | 0.0476          |
|       | HSDT (Reddy)   | 0.681        | 0.647        | 0.244           | 0.211           | 0.0451          |
|       | FSDT (Whitney) | 0.406        | 0.576        | 0.196           | 0.140           | 0.0308          |
|       | SC-FSDT        | 0.370        | 0.562        | 0.240           | 0.193           | 0.0334          |
| 10    | ELS (Pagano)   | 0.559        | 0.401        | 0.196           | 0.301           | 0.0275          |
|       | HSDT (Reddy)   | 0.551        | 0.394        | 0.163           | 0.211           | 0.0251          |
|       | FSDT (Whitney) | 0.499        | 0.361        | 0.130           | 0.167           | 0.0241          |
|       | SC-FSDT        | 0.488        | 0.356        | 0.148           | 0.244           | 0.0250          |
| 100   | ELS (Pagano)   | 0.539        | 0.276        | 0.141           | 0.337           | 0.0216          |
|       | HSDT (Reddy)   | 0.539        | 0.275        | 0.129           | 0.308           | 0.0216          |
|       | FSDT (Whitney) | 0.538        | 0.270        | 0.101           | 0.178           | 0.0213          |
|       | SC-FSDT        | 0.538        | 0.268        | 0.109           | 0.266           | 0.0213          |

표 2는 등분포하중을 받는 단순지지된 적층판의 처짐분포를 나타낸 것이다. 적층조건은  $(0^0/90^0/0^0)$ 이며, 나머지 제약조건은 표 1과 동일하게 설정하였다. ELS는 사인하중에 대해서만 그 정해가 제시되어 있는바, Navier 방법으로 해석적으로 접근한 HSDT를 비교 기준으로 설정하였다. 표에서 보듯이 SC-FSDT는 HSDT와 비교하여 최대 2.4%의 오차를 보인 반면, FSDT는 그 오차가 최대 8.6%를 보이고 있다. FSDT와 SC-FSDT의 거동차이는 전단응력에서 더 확실해진다.

표 3과 그림 2, 3은 사인하중을 받는 적층판의 무차원 응력분포를 비교하여 나타낸 것이다. SC-FSDT는 판의 상·하면에서 전단응력이 0이 되는 경계조건을 만족하고 있을 뿐만 아니라 전체적으로 HSDT와 매우 유사한 분포경향을 나타내고 있어 FSDT에 비교하여 상당한 개선효과를 보이는 것을 알 수 있다.

$$\sigma_{xz} = \int_{-h/2}^z \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) dz \quad (20a)$$

$$\sigma_{yz} = \int_{-h/2}^z \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dz \quad (20b)$$

그림 2, 3에서 층간 연속적 응력분포를 갖는 FSDT\_3D는 FSDT의 해석결과를 평형방정식(식(20a), (20b) 참조)에 적용하여 별도로 산출한 것이다. 그러나 이를 유한요소에서 적용시 응력에 대한 편미분을 필요로 하여 고차의 형상함수를 추가해야 하는 등의 문제가 있다. 즉, SC-FSDT는 HSDT 및 FSDT\_3D와 달리 고차의 변위장이나 별도의 후처리 과정이 필요없으며, 유한요소에 적용하기에도 매우 용이한 장점을 가지고 있다.

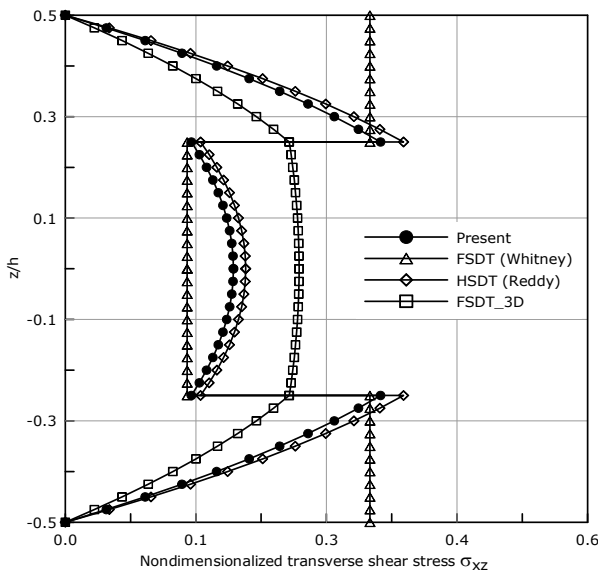


그림 2.  $a/h = 4$  에서 대칭 적층판( $0^0/90^0/90^0/0^0$ )두께의 무차원화된 횡 전단응력( $\sigma_{xz}^*$ )

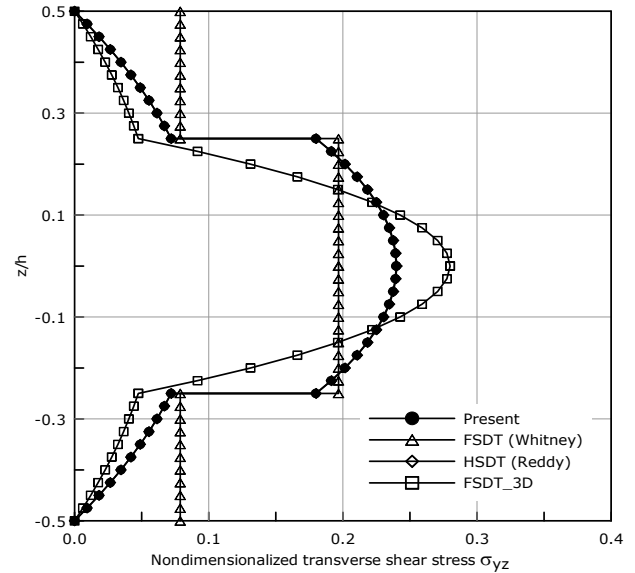


그림 3.  $a/h = 4$  에서 대칭 적층판( $0^0/90^0/90^0/0^0$ )두께의 무차원화된 횡 전단응력( $\sigma_{yz}^*$ )

### 5. 결론

본 연구는 1차전단변형이론의 간단한 수정방안을 제시하였다. 기존의 1차전단변형이론과 동일한 변위장과 자유도를 가지면서, 전단변형률과 전단응력이 판/셀의 상·하면에서 0이 되는 경계조건을 만족하도록 전단변형에 대한 형상분포함수를 추가적으로 설정하였다. 그 수정방법은 고차전단변형이론으로부터 유도되었지만 매우 간단히  $C^0$  연속성을 갖는 유한요소에 적용할 수 있을 뿐만 아니라, 기존 1차전단변형이론(FSDT)에 비해 상당한 개선효과를 보였으며, 고차전단변형이론과 유사한 전단응력분포가 나타내었다. 따라서 본 연구에서 제시한 이론 및 해석결과를 근거로 복합적층구조의 유한요소해석시 보다 정확한 결과를 도출할 수 있을 것으로 기대해본다.

### 기 호 설 명

- $x, y, z$  : 전체좌표계
- $u_1, u_2, u_3$  :  $x, y, z$  축에서의 변위
- $u, v, w$  : 중립면에서의 변위
- $\psi_x, \psi_y$  :  $y$  축과  $x$  축에 대한 회전각
- $\epsilon_i$  : 면내 및 전단변형률
- $\sigma_i$  : 면내 및 전단응력
- $\omega$  : 전단변형에 관한 분포형상함수
- $U_s$  : 유효전단변형 에너지
- $\bar{U}_s$  : 평균전단변형 에너지

$E_1, E_2$  : 한 층(layer)의 1축과 2축 탄성계수  
 $G_{12}, G_{23}, G_{13}$  : 한 층(layer)의 전단탄성계수  
 $\nu_{12}$  : 포아송비

### 참 고 문 헌

- 지효선, 천경식, 손병직, 장석운(2002) 완전 복합신소재 교량 상부구조 현장적용 실험연구, 2002년도 대한토목학회 학술발표논문집, 대한토목학회, pp.139-142.
- 천경식, 최희권, 장석운(2003a) 다양한 Serendipity 유한요소 에 따른 복합적층판의 정적, 좌굴 및 자유진동해석 비교연구, 대한토목학회 논문집, 대한토목학회, 제23권, 제5A호, pp.901-909.
- 천경식, 홍대기, 장석운(2003b) 삼각함수를 이용한 복합적층보 의 지그재그 모델, 대한토목학회 논문집, 대한토목학회, 제 23권, 제3A호, pp. 421-428.
- Auricchio, F. and Sacco, E. (2003) Refined first-order shear deformation theory models for composite laminates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 70, pp. 381-390.
- Cho, M.H. and Kim, M.H. (1996) A postprocess method using a displacement field of higher-order shell theory, *Composite Structures*, Vol. 34, pp.185-196.
- Kant, T. and Swaminathan, K. (2000) Analytical solutions using a higher order refined theory of the stability analysis of laminated composite and sandwich plates, *Structural Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 10, No. 4, pp.337-357.
- Kant, T. and Swaminathan, K. (2001) Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, *Composite Structures*, Vol. 53, pp.73-85.
- Kant, T. and Swaminathan, K. (2001) Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, *Composite Structures*, Vol. 56, pp.329-344.
- Mindlin, R.D. (1951) Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 18, pp.31-38.
- Noor, A.K., Burton, W.S., and Peters, J.M. (1990) Predictor-corrector procedures for stress and free vibration analyses of multilayered composite plates and shells, *Computer Methods of Applied Mechanics*, Vol. 82, pp.341-363.
- Pagano, N.J. (1972) Exact solutions for rectangular bi-directional composites and sandwich plates, *AIAA Journal*, Vol. 10, pp.931-933.
- Pai, P.F. (1995) A new look at the shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32, pp.2295-2313.
- Reissner, E. (1945) The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 12, No. 2, pp.69-77.
- Reddy, J.N. (1984) A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp.745-752.
- Reddy, J.N., Barbero, E.J., and Teply, J.L. (1990) An accurate determination of stresses in thick laminates using a generalized plate theory, *International Journal of Numerical Method Engineering*, Vol. 29, pp.1-14.
- Reddy, J.N. (1997) Mechanics of laminated composite plates, CRC Press, New York.
- Rolfes, R. and Rohwer, K. (1997) Improved transverse shear stresses in composite finite elements based on first order shear deformation theory, *International Journal of Numerical Method Engineering*, Vol. 40, pp.51-60.
- Yunquin, Q. and Knight, N.F. Jr. (1996) A refined first-order shear deformation theory and its justification by plane-strain bending problem of laminated plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, pp.49-64.
- Whitney, J.M. (1969) The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates, *Journal of Composite Materials*, ASCE, Vol. 3, pp.534-547.

(접수일자 : 2011. 4. 5 / 심사일 2011. 4. 21 /  
 심사완료일 2011. 7. 29)