

집단 과거 의존 파론도 게임의 역설[†]

이지연¹

¹영남대학교 통계학과

접수 2011년 5월 20일, 수정 2011년 6월 17일, 게재확정 2011년 6월 22일

요약

과거 시행의 승패 결과에 의해 현재 시행의 승패 확률이 결정되는 과거 의존 파론도 게임을 고려한다. 여러 명의 게임자들이 과거 의존 파론도 게임을 구성하는 공정한 두 게임 중에서 한 게임을 임의로 선택하는 전략과 매 시행 때마다 현재의 상태를 이용하여 그 기대상금이 최대인 게임을 선택하는 전략을 비교한다. 현재의 상태를 고려하지 않고 임의적으로 게임을 선택하는 전략은 점차 기대상금이 양수가 되어 결국 이기는 게임이 되는 반면에 현재의 상태를 이용하여 최적의 게임을 선택하는 전략은 게임이 진행될수록 오히려 기대상금이 0으로 일정하게 되는 역설적인 현상이 나타남을 확인하고, 이러한 역설적인 현상이 발생하는 확률 모수의 범위를 찾는다.

주요용어: 과거 의존 파론도 게임, 눈 먼 전략, 단기적 최적 전략, 마코프 체인, 정상확률분포.

1. 머리말

스페인의 물리학자 파론도는 두 개의 지는 게임이 결합하여 이기는 게임이 되는 간단한 동전 게임을 소개하였다 (Parrondo, 1996). 각 게임의 기대상금이 음수인 두 개의 게임을 규칙적으로 반복하거나 또는 임의적으로 선택하여 혼합하면 그 기대상금이 양수가 되는 역설적인 게임으로서, 이와 같이 두 개의 시스템이 결합하여 반대의 결과를 보여주는 현상을 이 후에 파론도 역설 (Parrondo's paradox; Abbott, 2010)이라고 부르게 되었다.

최근에는 여러 명의 게임자들이 집단적으로 진행하는 게임에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다 (Kim과 Lee, 2007; Parrondo 등, 2007; 김혜경과 박준표, 2009; 이지연, 2009; 오창혁, 2010). Dinis와 Parrondo (2003)는 매 시행마다 파론도 게임을 구성하는 두 게임 A와 B 중에서 최대의 기대상금을 제공하는 게임을 선택하는 전략을 소개하고, 아주 많은 수의 게임자들이 이 전략으로 게임을 진행하면 결국 지는 게임이 된다는 또 다른 역설적인 결과를 시뮬레이션을 통해 확인하였다. 즉, 매 시행에서는 더 많은 수익을 주는 게임을 선택하기 때문에 단기적 (short-range)으로는 최상이지만 궁극적으로는 기대상금이 감소하여 불리한 전략이 될 수 있음을 보인 것이다. Van den Broeck과 Cleuren (2004)은 게임자의 수가 1명 또는 2명일 때는 이 전략이 최상의 전략이 되지만, 3명만 되어도 최상의 전략이 되지 못함을 수리적으로 증명하였다. Ethier와 Lee (2011)는 일반화된 모수의 범위에서 이 단기적 최적 전략 (short-range optimization)의 점근적인 성질을 파악하고 각 모수의 범위에 따라 다른 점근 행태 (asymptotic behaviour)가 나타남을 증명하였다. 그러나 위의 논문들은 파론도 게임을 구성하는 게임

[†] 이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (2010-0005364).

¹ (712-749) 경북 경산시 대동 214-1, 영남대학교 통계학과, 교수. E-mail: leeje@yu.ac.kr

B가 게임자의 현재의 상금에 의해 결정되는 자본금 의존 (capital-dependent) 파론도 게임에 대한 연구들에 국한되어 있다.

본 논문에서는 이를 확장하여 과거 시행의 승패 결과에 의해 현재 시행의 승패 확률이 결정되는 과거 의존 (history-dependent) 파론도 게임 (Parrondo 등, 2000; Kay와 Johnson, 2003)의 역설적인 현상을 파악하고자 한다. Dinis와 Parrondo (2004)는 과거 의존 파론도 게임에서 여러 명의 게임자들이 있을 때, 다수결의 법칙 (majority rule), 즉 게임자들의 과반수가 유리한 게임을 모든 게임자들이 선택하게 되면 시행이 계속될수록 전체의 기대상금이 오히려 감소하는 시뮬레이션 결과를 얻었다. 본 논문에서는 이 다수결의 전략을 확장하여 여러 명의 게임자들이 단기적 최적 전략을 사용할 때에도 전체의 기대상금이 증가하지 않는 현상이 나타남을 확인하고 그런 역설적인 현상이 존재하는 모수의 범위를 찾는다. 이 결과는 매 시행에서 임의적으로 게임을 선택하는 것과 같이 현재 상태에 대한 정보를 전혀 사용하지 않는 눈 먼 전략 (blind strategy)은 그 기대상금이 증가하는 반면에 현재 상태의 정보를 활용하여 매 시행에서 최대의 기대상금을 제공하는 게임을 선택하는 단기적 최적 전략은 오히려 기대상금이 0이 되어 더 불리해지는 역설적인 현상을 보여준다.

먼저 2장에서는 고전적인 과거 의존 파론도 게임과 여러 명이 집단적으로 진행하는 집단 과거 의존 파론도 게임을 소개하고, 3장에서는 임의적 선택의 눈 먼 전략과 단기적 최적 전략에서 발생하는 역설적인 현상을 비교한다.

2. 집단 과거 의존 파론도 게임

2.1. 과거 의존 파론도 게임

Parrondo 등 (2000)은 기존의 자본금 의존 파론도 게임을 변형하여 새로운 형태의 파론도 게임으로서 과거 의존 파론도 게임 (history-dependent Parrondo game)을 소개하였다. $0 \leq \epsilon < 1/4$ 인 ϵ 에 대해

$$p_0 := \frac{9}{10} - \epsilon, p_1 = p_2 := \frac{1}{4} - \epsilon, p_3 := \frac{7}{10} - \epsilon \quad (2.1)$$

라고 두자. 게임 A는 앞면이 나올 확률이 $p := 1/2 - \epsilon$ 인 동전을 던져서 앞면이 나오면 1원을 얻고 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 게임 B는 4개의 동전을 사용하는데 만약 직전의 두 번의 시행 결과가 패-패 (각각 패-승, 승-패, 승-승)이면 앞면이 나올 확률이 p_0 (각각 p_1, p_2, p_3)인 동전을 던진다. 즉, 직전의 과거 2번의 시행 결과에 따라 현재 시행에서 사용될 동전이 결정되어 승패 확률이 정해진다. 여기서도 앞면이 나오면 1원을 얻고 뒷면이 나오면 1원을 잃는다.

Ethier와 Lee (2009)는 위 (2.1)의 특정한 확률값 뿐 아니라 $\kappa > 0, \lambda > 0, \lambda < 1 + \kappa$ 에 대해

$$p_0 := \frac{1}{1 + \kappa} - \epsilon, p_1 = p_2 := \frac{\lambda}{1 + \lambda} - \epsilon, p_3 := 1 - \frac{\lambda}{1 + \kappa} - \epsilon$$

로 확장된 게임 B를 고려하였다. 기존의 확률값 (2.1)은 $\kappa = 1/9$ 이고 $\lambda = 1/3$ 인 특별한 경우이다. 확장된 확률 모수의 임의적 혼합 게임 $\gamma A + (1 - \gamma)B$ (확률 $0 < \gamma < 1$ 로 게임 A를, 확률 $1 - \gamma$ 로 게임 B를 선택하는 혼합 게임)에 대해 $\kappa < \lambda < 1$ 또는 $\kappa > \lambda > 1$ 의 범위에서 파론도 역설이 존재함을 증명하였다. 그 내용을 마코프 체인으로 설명하면 다음과 같다 (Ethier, 2007).

게임 A와 B에 대해 연이은 2번의 시행 결과가 패-패, 패-승, 승-패, 승-승인 경우를 각각 상태 0, 1, 2, 3로 정의한다. X_n 을 n 번째의 연이은 두 시행의 결과를 나타내는 확률변수라고 하면, 과거 의존 파

론도 게임은 상태공간이 0, 1, 2, 3인 마코프 체인 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 로 표현할 수 있다. 초기 X_0 의 확률분포는 $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ 로 가정한다. 게임 A와 B의 전이확률행렬 (transition probability matrix)은 각각

$$P_A^o := \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \end{pmatrix}, P_B^o := \begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_1 & p_1 \\ 1-p_2 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_3 & p_3 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

이고 게임 A의 정상확률분포 (stationary distribution) π_A 는

$$\pi_A = \left(\frac{1}{4} + \epsilon + O(\epsilon^2), \frac{1}{4} + O(\epsilon^2), \frac{1}{4} + O(\epsilon^2), \frac{1}{4} - \epsilon + O(\epsilon^2) \right)$$

이고, 게임 B의 정상확률분포 π_B 는

$$\pi_B = \left(\frac{5}{22} + \frac{80}{99}\epsilon + O(\epsilon^2), \frac{3}{11} + \frac{10}{33}\epsilon + O(\epsilon^2), \frac{3}{11} + \frac{10}{33}\epsilon + O(\epsilon^2), \frac{5}{22} - \frac{140}{99}\epsilon + O(\epsilon^2) \right)$$

가 된다. 그러면 게임 A의 n 번째 시행까지 누적되는 기대상금은 $\alpha := (2p-1, 2p-1, 2p-1, 2p-1)^T$ 일 때,

$$E[C_n] = \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) (P_A^o)^{m-1} \alpha$$

이고, 따라서 점근적인 (asymptotic) 게임당 기대상금 $E(A_o)$ 는

$$E(A_o) = \lim_{n \rightarrow \infty} E[C_n - C_{n-1}] = \pi_A \alpha = -2\epsilon + O(\epsilon^2)$$

이다. 게임 B의 게임당 기대상금 $E(B_o)$ 는

$$E(B_o) = \pi_B \beta = -\frac{20}{9}\epsilon + O(\epsilon^2)$$

이다. 단, $\beta := (2p_0 - 1, 2p_1 - 1, 2p_2 - 1, 2p_3 - 1)^T$ 이다 (Epstein, 2007). 따라서 $\epsilon > 0$ 에 대해 두 게임 모두 음의 기대상금을 갖고, $\epsilon = 0$ 일 때는 기대상금이 모두 0인 공정한 게임이 된다. 반면에 임의적 혼합게임 $\gamma A + (1 - \gamma)B$ 의 경우는 그 전이확률행렬이 $\gamma P_A^o + (1 - \gamma)P_B^o$ 이고 정상확률분포는 $\gamma \pi_A + (1 - \gamma)\pi_B$ 이므로 게임당 기대상금은

$$\begin{aligned} E(\gamma A_o + (1 - \gamma)B_o) &= [\gamma \pi_A + (1 - \gamma)\pi_B][\gamma \alpha + (1 - \gamma)\beta] \\ &= \frac{5\gamma(1 - \gamma)}{99 + 32\gamma - 31\gamma^2} + O(\epsilon) \end{aligned}$$

로 얻어진다 (Ethier와 Lee, 2009). 그러므로 모든 $0 < \gamma < 1$ 에 대해 기대상금이 양수가 되는 $\epsilon \geq 0$ 을 찾을 수 있다. 즉, 두 개의 지는 (또는 공정한) 게임을 임의적으로 결합하여 이기는 게임이 되도록 만들 수 있다.

2.2. 집단 파론도 게임

1명의 게임자가 매 시행에서 두 게임 A와 B 중에서 자유롭게 한 개를 선택할 수 있다고 하자. 이전의 두 번의 시행에서 패-패이거나 승-승이면 게임 A는 앞면이 나올 확률이 $p = 1/2 - \epsilon$ 인 동전을 던지는 반면에 게임 B는 앞면이 나올 확률이 $p_0 = 9/10 - \epsilon$ 또는 $p_3 = 7/10 - \epsilon$ 인 동전을 사용하기 때문에 게임 B를 선택하는 것이 훨씬 유리하다. 만약 이전의 두 번의 시행에서 패-승이거나 승-패의 결과라면 게임 A를 선택하는 것이 유리하다. 이처럼 현재의 상태 정보를 이용하여 게임 A와 게임 B 중에서 앞면이 나올 확률이 더 큰 게임을 선택하는 것이 현재의 상태에 대한 정보를 전혀 이용하지 않고 매 시행마다 임의로 게임을 선택하거나 규칙적으로 반복 선택하는 것보다는 훨씬 유리하다. 만약 여러 명의 게임자들이 있을 때는 어떠한가? N 명의 게임자들로 이루어진 집단에서 매 시행 때마다 임의로 ϕN 명을 비복원 추출하여 과거 의존 파론도 게임을 한다고 하자. 이 때, 게임 B의 동전의 종류는 각 게임자의 이전의 시행 결과에 의해 정해지고, ϕ 는 $(0, 1]$ 의 실수로서 ϕN 는 자연수로 가정한다.

Ethier (2007)가 집단 자본금 의존 파론도 게임에 사용했던 마코프 체인 확률모형을 집단 과거 의존 파론도 게임에 적용하면 다음과 같다. 추출된 ϕN 명이 모두 게임 B를 계속 선택한다고 하자. N_i 를 N 명 중 상태가 i ($i = 0, 1, 2, 3$)인 게임자의 수라고 하면 (N_0, N_1, N_2, N_3) 는 상태가 모두 $\binom{N+3}{3}$ 개인 마코프 체인이 된다. 추출된 ϕN 명 중 상태 i 의 게임자 수를 (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) 라고 하면

$$P\{(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) = (y_1, y_2, y_3, y_4)\} = \frac{\binom{N_0}{y_0} \binom{N_1}{y_1} \binom{N_2}{y_2} \binom{N_3}{y_3}}{\binom{N}{\phi N}}$$

이다. 각 상태 i 에 대해 Z_i 를 추출된 Y_i 명 중 이기는 게임자 수라고 하면,

$$P\{Z_i = z_i | Y_i\} = \binom{Y_i}{z_i} p_i^{z_i} (1-p_i)^{Y_i-z_i}$$

가 된다. 따라서 마코프 체인은 상태 (N_0, N_1, N_2, N_3) 에서

$$N'_0 = (N_0 - Y_0) + (Y_0 - Z_0) + (Y_2 - Z_2)$$

$$N'_1 = (N_1 - Y_1) + Z_0 + Z_2$$

$$N'_2 = (N_2 - Y_2) + (Y_1 - Z_1) + (Y_3 - Z_3)$$

$$N'_3 = (N_3 - Y_3) + Z_1 + Z_3$$

의 상태 (N'_0, N'_1, N'_2, N'_3) 로 전이 (transition)가 일어난다. 그러면 $E[Y_i] = \phi N_i$ 이고 $E[Z_i | Y_i] = p_i Y_i$ 이므로

$$E[N'_0] = (1 - \phi)N_0 + \phi(1 - p_0)N_0 + \phi(1 - p_2)N_2$$

$$E[N'_1] = (1 - \phi)N_1 + \phi p_0 N_0 + \phi p_2 N_2$$

$$E[N'_2] = (1 - \phi)N_2 + \phi(1 - p_1)N_1 + \phi(1 - p_3)N_3$$

$$E[N'_3] = (1 - \phi)N_3 + \phi p_1 N_1 + \phi p_3 N_3$$

가 된다. 따라서 n 번의 집단적인 게임 B의 시행 후에 얻어지는 게임자당 평균 기대상금은

$$E[C_n] = \phi \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) P_B^{m-1} \beta$$

로 얻어진다. 단, $P_B := (1 - \phi)I + \phi P_B^o$ 이고 I 는 4차 항등행렬 (identity matrix)이다. 한편, 추출된 ϕN 명의 게임자들이 모두 게임 A를 n 번 반복하면 게임자당 평균 기대상금은, $P_A := (1 - \phi)I + \phi P_A^o$ 라고 할 때,

$$E[C_n] = \phi \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) P_A^{m-1} \alpha = -2n\phi\epsilon$$

로 계산된다.

3. 집단 파론도 게임의 역설

Dinis와 Parrondo (2003)와 Van den Broeck과 Cleuren (2004)에서 고려한 대로 여기서도 $N = \infty$ 인 경우를 살펴보자. x_i 를 직전의 2번의 시행의 결과 상태가 i ($i = 0, 1, 2, 3$)인 게임자들의 비율이라고 하면 $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1$ 이 된다. 초기값 $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ 에서 시작하여 상태 공간

$$\Delta := \{(x_0, x_1, x_2, x_3) : x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

상에서 게임 A가 선택되면 (x_0, x_1, x_2, x_3) 가 $(x_0, x_1, x_2, x_3)P_A$ 로 옮겨가고, 게임 B가 선택되면 (x_0, x_1, x_2, x_3) 가 $(x_0, x_1, x_2, x_3)P_B$ 로 움직이는 결정적인 (deterministic) 이산시간 선형변환이 된다. 이 때, $P_A = (1 - \phi)I + \phi P_A^o$ 이고, $P_B = (1 - \phi)I + \phi P_B^o$ 이다.

3.1. 임의적 선택 전략

집단적으로 게임 B만을 선택해서 진행하는 경우에 Appendix에서 보듯이 집단 게임의 전이확률 행렬 P_B 의 정상확률분포는 개별 게임의 전이확률행렬 P_B^o 의 정상확률분포 π_B 와 일치한다. 즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_B^n = \Pi_B$ 이다. 단, Π_B 는 각 행이 π_B 로 이루어진 정방행렬이다. 따라서 한 게임자의 궁극적인 게임당 상금은

$$\phi \pi_B \beta = -\frac{20}{9} \phi \epsilon + O(\epsilon^2)$$

이고, 게임 A만 계속하는 경우는

$$\phi \pi_A \alpha = -2\phi \epsilon + O(\epsilon^2)$$

이다. 확률 γ 로 임의적으로 선택하는 혼합 게임 $\gamma A + (1 - \gamma)B$ 의 경우, 한 게임자의 궁극적인 게임당 상금은 마찬가지로

$$\phi[\gamma \pi_A + (1 - \gamma)\pi_B][\gamma \alpha + (1 - \gamma)\beta] = \frac{5\gamma(1 - \gamma)\phi}{99 + 32\gamma - 31\gamma^2} + O(\epsilon) \quad (3.1)$$

로 얻어진다.

그러므로 $\epsilon = 0$ 인 경우, 모든 $0 < \phi < 1$ 에 대해 추출된 게임자들이 현재 상태에 대한 정보의 사용 없이 확률 $0 < \gamma < 1$ 로 공정한 게임 A와 B를 임의적으로 선택하는 전략을 사용하면 게임당 기대상금 (3.1)이 양수가 되는 이기는 게임이 된다.

3.2. 단기적 최적 전략

n 번째 시행에서 임의로 추출된 ϕN 명의 게임자들 중 이전의 시행 결과가 패-패인 게임자들의 비율을 $\pi_0(n)$, 패-승인 게임자들의 비율을 $\pi_1(n)$, 승-패인 게임자들의 비율을 $\pi_2(n)$ 그리고 승-승인 게임자들의 비율을 $\pi_3(n)$ 이라고 하자. Dinis와 Parrondo (2004)가 소개한 다수결의 전략은 매 시행에서 게임 B가 유리한 게임자들의 비율 $\pi_0(n) + \pi_3(n)$ 이 $1/2$ 를 초과하면 모든 게임자들이 게임 B를 선택하고, 그렇지 않으면 모두 게임 A를 선택하는 전략이다. 따라서

만약 $\pi_0(n) + \pi_3(n) \leq \frac{1}{2}$ 이면 게임 A를 선택하고
아니면 게임 B를 선택한다.

로 나타난다. 이번에는 매 시행마다 최고의 기대상금을 제공하는 게임을 선택하는 단기적 최적 전략을 사용해 보자. 만약 ϕN 명의 게임자들 모두가 게임 B를 선택한다면 그 기대상금은 $p_1 = p_2$ 이므로,

$$\begin{aligned} & \pi_0(n)(2p_0 - 1) + [1 - \pi_0(n) - \pi_3(n)](2p_1 - 1) + \pi_3(n)(2p_3 - 1) \\ &= 2\pi_0(n)(p_0 - p_1) + 2\pi_3(n)(p_3 - p_1) - (p_0 + p_3) \end{aligned}$$

가 되고, 만약 모두 게임 A를 선택하면 기대상금은 $2p - 1$ 이 된다. 따라서 n 번째 시행에서 보다 많은 기대상금을 얻기 위한 최적의 전략은 현재의 게임자들의 상태 $(\pi_0(n), \pi_1(n), \pi_2(n), \pi_3(n))$ 에 대해 $2\pi_0(n)(p_0 - p_1) + 2\pi_3(n)(p_3 - p_1) - (p_0 + p_3) \leq 2p - 1$ 이면 게임 A를 선택하고, 아니면 게임 B를 선택하는 것이다. 확률값 (2.1)을 대입하여 정리하면,

$$13\pi_0(n) + 9\pi_3(n) \leq 5 \text{이면 게임 A를 선택하고} \quad (3.2)$$

아니면 게임 B를 선택한다.

로 나타낼 수 있다.

$N = \infty$ 이고 $\epsilon = 0$ 이라고 두면, 단기적 최적 전략은 상태 $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \Delta$ 에 대해 $13x_0 + 9x_3 \leq 5$ 이면 게임 A가 선택되어 $(x_0, x_1, x_2, x_3)P_A$ 로 옮겨가고, $13x_0 + 9x_3 > 5$ 이면 게임 B가 선택되어 $(x_0, x_1, x_2, x_3)P_B$ 로 옮겨간다. 그림 3.1은 이 전략과 초기상태 $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ 를 (x_0, x_3) 의 공간에 나타낸 것이다.

초기상태 $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ 는 게임 B의 선택 영역에 속하므로 첫 번째 시행에서는 추출된 모든 게임자들이 게임 B를 선택한다. 따라서 게임 B의 n 번의 시행 후에 초기상태 $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ 는

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_0(n) \\ a_1(n) \\ a_2(n) \\ a_3(n) \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} P_B^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} R D^n L \end{aligned}$$

로 옮겨간다. 여기서 R 는 행렬 P_B 의 고유벡터 행렬, $L := R^{-1}$ 그리고 $D := \text{diag}(1, e_1, e_2, e_3)$ 이다. 단, $1, e_1, e_2, e_3$ 는 행렬 P_B 의 고유값이고 $1, e_{10}, e_{20}, e_{30}$ 는 행렬 P_B^0 의 고유값으로 $e_i = 1 - \phi + \phi e_{i0}$ ($i = 1, 2, 3$)을 만족한다 (Appendix). 그러므로 게임 B의 n 번의 시행 후에 전략 (3.2)의 경계 값은

$$13a_0(n) + 9a_3(n) - 5 = c_1 e_1^n + c_2 e_2^n + c_3 e_3^n \quad (3.3)$$

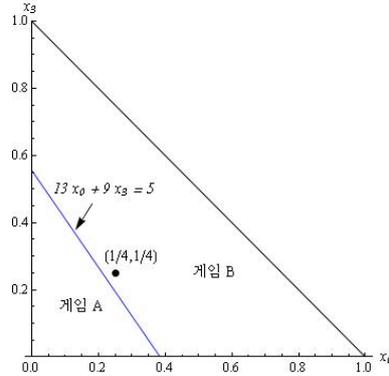


그림 3.1 단기적 최적 전략에서 게임의 선택 영역

이고, $c_1 := f(e_{10}, e_{20}, e_{30})$, $c_2 := f(e_{20}, e_{10}, e_{30})$, $c_3 := f(e_{30}, e_{10}, e_{20})$ 로 얻어진다. 단,

$$f(x, y, z) := \frac{(20x^2 - 9x + 1)[800yz - 260(y + z) + 467]}{15600(x - y)(x - z)}$$

이다. 행렬 P_B 의 고유값은 $|e_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} [13a_0(n) + 9a_3(n) - 5] = 0$ 을 만족한다. 한편, (3.3)의 경계 값은 $n = 1$ 일 때,

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}\phi \tag{3.4}$$

이고 $n = 2$ 일 때,

$$c_1 e_1^2 + c_2 e_2^2 + c_3 e_3^2 = \frac{1}{2} - \frac{6}{5}\phi + \frac{543}{800}\phi^2 \tag{3.5}$$

이며, $n \geq 3$ 이면

$$\begin{aligned} c_1 e_1^n + c_2 e_2^n + c_3 e_3^n &= c_1 [1 - (1 - e_{10})\phi]^n + c_2 [1 - (1 - e_{20})\phi]^n + c_3 [1 - (1 - e_{30})\phi]^n \\ &= (c_1 + c_2 + c_3) - \binom{n}{1} [c_1(1 - e_{10}) + c_2(1 - e_{20}) + c_3(1 - e_{30})]\phi \\ &\quad + \binom{n}{2} [c_1(1 - e_{10})^2 + c_2(1 - e_{20})^2 + c_3(1 - e_{30})^2]\phi^2 + O(\phi^3) \end{aligned}$$

이다. 여기서,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 13a_0(0) + 9a_3(0) - 5 = \frac{1}{2}, \\ c_1(1 - e_{10}) + c_2(1 - e_{20}) + c_3(1 - e_{30}) &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

이고,

$$c_1(1 - e_{10})^2 + c_2(1 - e_{20})^2 + c_3(1 - e_{30})^2 = \frac{543}{800}$$

이므로

$$c_1e_1^n + c_2e_2^n + c_3e_3^n = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}n\phi + \frac{543n(n-1)}{800} \frac{\phi^2}{2} + O(\phi^3) \quad (3.6)$$

$$= \frac{543n(n-1)}{800} \frac{1}{2} \left(\phi - \frac{160}{181(n-1)} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{48n}{181(n-1)} + O(\phi^3) \quad (3.7)$$

을 얻을 수 있다.

만약 모든 $n \geq 1$ 에 대하여 식 (3.3)이 양수이면 초기상태 $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ 에서 시작한 집단 게임은 단기적 최적 전략 (3.2)에 의해 모든 시행에서 게임 B만 계속 선택되게 된다. 식 (3.4)는 $\phi < 5/6$ 에서 양수이고, 식 (3.5)는 $\phi < 20(24 - \sqrt{33})/543$ 에서 양의 값을 가진다. $n \geq 3$ 일 때는 식 (3.6)에서

$$\frac{543n(n-1)}{800} \frac{1}{2} \left(\phi - \frac{160}{181(n-1)} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{48n}{181(n-1)} > 0$$

이므로 모든 $n \geq 3$ 에 대하여 경계 값이 양수가 되는 작은 ϕ 의 값을 찾을 수 있다. 따라서 $20(24 - \sqrt{33})/543$ 보다 작고 $n \geq 3$ 인 경우의 경계 값이 양수가 되는 범위의 ϕ 에 대해서는 식 (3.4), (3.5) 그리고 (3.6)의 값이 모두 양수가 되어 단기적 최적 전략에 의해 모든 시행에서 게임 B만 선택되고 따라서 게임당 기대 상금이 점차 0에 접근하게 된다. 그러므로 이 범위의 ϕ 에 대해서는, 현재 상태의 정보를 전혀 사용하지 않는 임의적 선택 전략에서는 기대상금이 양수가 되는 반면에 현재 상태의 정보를 사용하여 기대상금이 더 높은 게임을 선택하는 단기적 최적 전략에서는 오히려 기대상금이 0에 접근하여 더 불리해지는 역설적인 현상이 나타난다.

그림 3.2는 3개의 서로 다른 ϕ 값에 대해 $\gamma = 1/2$ 의 임의적 선택 전략에 의한 게임자당 누적 기대상금과 단기적 최적 전략의 게임자당 누적 상금을 비교한 것이다. $\phi = 1/10$ 와 $\phi = 3/10$ 인 경우는 게임이 진행될수록 임의적 선택 전략은 누적 기대상금이 증가하여 게임당 기대상금이 양수가 되고, 단기적 최적 전략은 증가 폭이 점차 둔화되어 궁극적으로 일정해지고 따라서 게임당 기대상금이 0이 된다. 이것은 단기적 최적 전략에 의해 모든 시행에서 게임 B만 선택되기 때문이다. 그러나 $\phi = 9/10$ 일 때는 단기적 최적 전략에 의해 처음에 게임 B가 선택되고 두 번째는 식 (3.4)의 값이 음수가 되어 게임 A가 선택되는 등 게임 A와 B가 혼합적으로 선택되어 게임자당 누적 상금이 점차 증가한다. 이것은 임의적 선택 전략보다 더 빠른 증가를 보여 이 경우는 단기적 최적 전략이 임의적 선택 전략보다 더 유리한 전략이 됨을 알 수 있다.

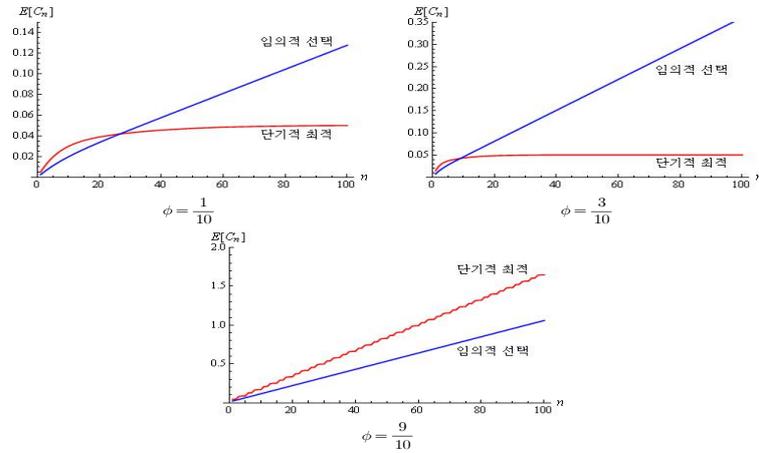


그림 3.2 $\gamma = \frac{1}{2}$ 의 임의적 선택 전략과 단기적 최적 전략의 누적 기대상금

Appendix

$\epsilon = 0$ 일 때, (2.2)의 행렬 P_B^o 의 고유값 (eigenvalue)은 1과 방정식 $400x^3 + 80x^2 + 33x - 117 = 0$ 의 해 e_{10}, e_{20}, e_{30} 가 된다. 여기서 e_{10} 는 실수이고 e_{20} 와 e_{30} 는 켈레 복소수로서 $e_{10} + e_{20} + e_{30} = -1/5$, $e_{10}e_{20} + e_{20}e_{30} + e_{10}e_{30} = 33/400$ 와 $e_{10}e_{20}e_{30} = 117/400$ 이고 $|e_{i0}| < 1, i = 1, 2, 3$ 을 만족한다. 그리고 대응되는 고유벡터 (eigenvector)는

$$r(x) := \begin{pmatrix} -27 - 108x + 240x^2 \\ 81 - 40x - 200x^2 \\ -91 + 130x \\ 39 \end{pmatrix}$$

에 대해서 $r_0 := (1, 1, 1, 1)^T, r_1 := r(e_{10}), r_2 := r(e_{20}), r_3 := r(e_{30})$ 가 된다 (Ethier와 Lee, 2009). 따라서 행렬 $P_B = 1 - \phi + \phi P_B^o$ 의 고유값은

$$\begin{aligned} &1, \\ e_1 &:= 1 - \phi + \phi e_{10}, \\ e_2 &:= 1 - \phi + \phi e_{20}, \\ e_3 &:= 1 - \phi + \phi e_{30} \end{aligned}$$

이고 고유벡터는 P_B^o 의 고유벡터 r_0, r_1, r_2, r_3 와 동일하다. 또한 행렬 P_B 의 정상확률분포는 $(5/22, 3/11, 3/11, 5/22)$ 로서 행렬 P_B^o 의 정상확률분포와 일치한다. 행렬 $R := (r_0, r_1, r_2, r_3)$ 라고 두고, $L := R^{-1}$ 이라고 하면 행렬 P_B 는 스펙트럼 분해 (spectral decomposition)에 의해

$$P_B = RDL$$

로 나타낼 수 있다. 단, $D := \text{diag}(1, e_1, e_2, e_3)$ 이다.

참고문헌

- 김혜경, 박준표 (2009). 일반화된 분수 지배게임에 대한 균형성. <한국데이터정보과학회지>, **20**, 49-55.
- 오창혁 (2010). 윗놀이와 확률. <한국데이터정보과학회지>, **21**, 719-727.
- 이지연 (2009). 집단 파론도 게임의 최적 전략. <한국데이터정보과학회지>, **20**, 973-982.
- Abbott, D. (2010). Asymmetry and disorder: A decade of Parrondo's paradox. *Fluctuation Noise Letters*, **9**, 129-156.
- Dinis, L. and Parrondo, J. M. R. (2003). Optimal strategies in collective Parrondo games. *Europhysics Letters*, **63**, 319-325.
- Dinis, L. and Parrondo, J. M. R. (2004). Inefficiency of voting in Parrondo games. *Physica A*, **343**, 701-711.
- Epstein, R. A. (2007). Parrondo's principle: An overview. In *Optimal Play: Mathematical Studies of Games and Gambling*, edited by S. N. Ethier and W. R. Eadington, 471-492, Institute for the Study of Gambling and Commercial Gaming, University of Nevada, Reno.
- Ethier, S. N. (2007). Markov Chains and Parrondo's Paradox. In *Optimal Play: Mathematical Studies of Games and Gambling*, edited by S. N. Ethier and W. R. Eadington, 493-506, Institute for the Study of Gambling and Commercial Gaming, University of Nevada, Reno.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2009). Limit theorems for Parrondo's paradox. *Electronic Journal of Probability*, **14**, 1827-1862.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2011). A discrete dynamical system for the greedy strategy at collective Parrondo games, *Dynamical Systems: An International Journal*, (to appear).
- Kay, R. J. and Johnson, N. F. (2003). Winning combinations of history-dependent games, *Physical Review E*, **67**, 056128.
- Kim, H. K. and Lee, D.-S. (2007). Characterizations of the cores of integer total domination games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **18**, 1115-1121.
- Parrondo, J. M. R. (1996). How to cheat a bad mathematician. In *EEC HC&M Network on Complexity and Chaos*, Institute for Scientific Interchange Foundation, Torino, Italy.
- Parrondo, J. M. R., Harmer, G. P. and Abbott, D. (2000). New paradoxical games based on Brownian ratchets. *Physical Review Letters*, **85**, 5226-5229.
- Parrondo, J. M. R., Dinis, L., Garcia-Torano, E. and Sotillo, B. (2007). Collective decision making and paradoxical games. *European Physical Journal Special Topics*, **143**, 39-46.
- Van den Broeck, C. and Cleuren, B. (2004). Parrondo games with strategy. In *Noise in Complex Systems and Stochastic Dynamics II. SPIE*, edited by Z. Gingl, J. M. Sancho, L. Schimansky-Geier and J. Kertesz, 109-118, Bellingham, WA.

Paradox in collective history-dependent Parrondo games[†]

Jiyeon Lee¹

¹Department of Statistics, Yeungnam University

Received 20 May 2011, revised 17 June 2011, accepted 22 June 2011

Abstract

We consider a history-dependent Parrondo game in which the winning probability of the present trial depends on the results of the last two trials in the past. When a fraction of an infinite number of players are allowed to choose between two fair Parrondo games at each turn, we compare the blind strategy such as a random sequence of choices with the short-range optimization strategy. In this paper, we show that the random sequence of choices yields a steady increase of average profit. However, if we choose the game that gives the higher expected profit at each turn, surprisingly we are not supposed to get a long-run positive profit for some parameter values.

Keywords: Blind strategy, history-dependent Parrondo games, Markov chain, short-range optimization strategy, stationary distribution.

[†] This research was supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (2010-0005364).

¹ Professor, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeonbuk 712-749, Korea.
E-mail: leejy@yu.ac.kr