

레터논문-11-16-4-11

레이리 페이딩 채널에서 대표적인 3차원 신호성상도의 성능

진진홍^{a)}, 최재철^{a)}, 강석근^{a)†}

Performance of Typical 3-D Signal Constellations in Rayleigh Fading Channel

Zhenxing Chen^{a)}, Chae Cheol Choe^{a)}, and Seog Geun Kang^{a)†}

요약

본 논문에서는 레이리 페이딩 채널에서 대표적인 3차원 신호성상도들의 이론적인 심볼오류확률을 유도한다. 모의실험을 통하여 제시된 평균 심볼오류확률이 매우 정확함을 검증하였다. 따라서 유도된 이론적 심볼오류확률은 향후 3차원 신호성상도를 이용하는 무선 통신시스템의 개발을 위한 성능 기준으로 활용할 수 있을 것으로 판단된다.

Abstract

In this paper, symbol error probability (SEP) of typical 3-dimensional (3-D) signal constellations in Rayleigh fading channel is derived. Simulation confirms that average SEP of the constellations is very accurate. Thus, the theoretical SEP derived can be exploited as a performance reference for future development of wireless communication systems with 3-D constellations.

Keywords : Wireless communication system, symbol error probability, signal constellation, Rayleigh fading channel

1. 서론

초고속 및 고품질 데이터 전송을 위한 방법으로 3차원 신호집합을 이용하는 전송기술에 대한 관심이 급격히 증가되고 있다^{[1][2]}. 3차원 신호성상도는 3차원 변조기술의 구현에 필수적인 요소이다. 이는 1990년대 중반 광통신을 위한

디지털 변조방식인 편광편이키잉(polarization shift keying, POLSK)에 사용된 바 있다^[3].

최근에는 다차원 신호성상도의 설계를 위한 효과적인 검색 알고리즘이 개발된 바 있다^[4]. 그 결과, 정사면체의 꼭지점으로 구성된 신호집합은 최적의 3차원 4진 성상도임이 증명되었다. Khabbazian 등^[5]은 가산성 백색 가우시안 잡음 환경에서 3차원 신호성상도의 이론적인 오류확률을 제시한 바 있다. 또한, Chen 등^[6]은 3차원 신호전송기술을 무선 통신시스템에 도입하기 위하여 3차원 신호사상기를 이용하는 직교 주파수분할다중화(orthogonal frequency division multiplexing, OFDM)의 설계방법을 제시하고 가우시안 잡음채널에서 이론적 심볼오류확률(symbol error probability, SEP)을 유도하였다.

a) 경상대학교 반도체공학과 및 공학연구원
Department of Semiconductor Engineering and Engineering Research
Institute, Gyeongsang National University

† 교신저자 : 강석근(sgkang@gnu.ac.kr)

※ 이 논문은 지식경제부 및 정보통신산업진흥원의 대학 IT 연구센터 지원사업(NIPA-2011-C1090-1131-0007)과 2011년도 교육과학기술부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업(No. 2011-0009443)의 결과임.

· 접수일(2011년3월31일), 수정일(2011년6월14일), 게재확정일(2011년6월14일)

본 논문에서는 기존의 연구들에서는 고려된 바 없는 레일리 페이딩 채널에서 3차원 신호성상도를 이용하는 디지털 통신시스템의 심볼오류확률을 이론적으로 유도하고 검증한다. 따라서 본 논문의 결과는 향후 3차원 신호성상도가 적용된 무선 통신시스템 개발에서 이론적인 성능 기준으로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

II. 레일리 페이딩 채널에서 심볼오류확률

M 개의 3차원 신호벡터로 구성된 신호성상도 $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}_{(i)}\}$ 에서 각 신호점은 $\mathbf{S}_{(i)} = x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z}$ 로 표현된다. 여기서 x, y, z 는 3축 방향의 기본벡터(basis vector)를 나타낸다. 3차원 성상도 가운데 가장 자주 사용되는 4진 성상도와 8진 성상도를 그림 1에 나타내었다^{[2],[4]}. 이와 같은 3차원 신호점은 Gram-Schmidt 직교화과정에 의하여 전송신호로 변환된다^[7].

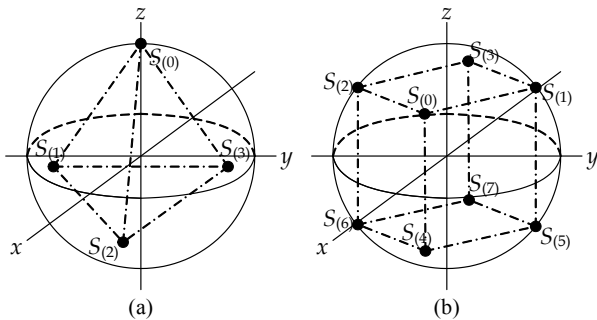


그림 1. 대표적인 3차원 신호성상도 (a) $M = 4$ (b) $M = 8$
 Fig. 1. The typical 3-D constellations (a) $M = 4$ (b) $M = 8$

가산성 백색 가우시안 잡음채널에서 수신신호벡터는 $\mathbf{R} = \mathbf{S}_{(i)} + \mathbf{N}$ 이 된다. 여기서 잡음벡터 $\mathbf{N} = N_x\mathbf{x} + N_y\mathbf{y} + N_z\mathbf{z}$ 의 각 축방향 성분 N_x, N_y, N_z 는 분산이 σ^2 인 영평균 가우시안 랜덤변수인 것으로 가정한다. 따라서 수신신호의 확률밀도 함수는

$$P(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^3}} e^{-\frac{(x-m_x)^2 + (y-m_y)^2 + (z-m_z)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

이 된다. 여기서 m_x, m_y, m_z 는 수신신호의 각 축방향 랜덤변

수의 평균이다. 따라서 가우시안 잡음채널에서 3차원 성상도의 심볼오류확률은 다음과 같다^[6].

$$P_s(\gamma) = 1 - \iiint_{\Omega} P(x, y, z) dx dy dz, \quad (2)$$

여기서 Ω 은 수신신호의 판정영역이고 γ 는 신호 대 잡음비(signal-to-noise power ratio, SNR)이다.

레일리 페이딩 채널에서 신호 대 잡음비는 아래의 확률 밀도함수를 가지는 랜덤변수이다.

$$p_s(\gamma) = \frac{1}{\Lambda} \exp\left(-\frac{\gamma}{\Lambda}\right), \quad (3)$$

여기서 Λ 는 심볼당 평균 신호 대 잡음비를 나타낸다. 따라서 레일리 페이딩 채널에서 평균 심볼오류확률은 가산성 잡음채널에서 오류확률을 다음과 같이 적분함으로써 구할 수 있다^[7].

$$P_{s, Ray}(\Lambda) = \int_0^{\infty} p_s(\gamma) P_s(\gamma) d\gamma. \quad (4)$$

Chen 등^[6]에 의하여 제시된 가산성 잡음채널에서 4진 성상도의 근사적 심볼오류확률을 γ 에 대한 등가식으로 나타내면

$$P_s(\gamma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-3\gamma/4} - \frac{1}{2}\text{erf}(\sqrt{\gamma}) + \frac{1}{4}\text{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{4}}\right)e^{-3\gamma/4} \quad (5)$$

이 된다. 여기서 $\text{erf}(\cdot)$ 는 오류함수(error function)이다. 따라서 레일리 채널에서 3차원 4진 성상도의 평균 심볼오류확률은 [8]의 6.283.2로 정의된 적분식에 의하여 다음과 같이 계산된다.

$$P_{s, Ray}(\Lambda) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Lambda} e^{-\gamma/\Lambda} P_s(\gamma) d\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\Lambda+4} - \frac{3\Lambda+3}{6\Lambda+8} \sqrt{\frac{\Lambda}{\Lambda+1}}. \quad (6)$$

그림 1(b)에 나타낸 8진 성상도는 3차원 신호공간에서 원점 대칭인 구조를 가진다. 가우시안 잡음채널에서 이 성상도의 이론적인 닫힌형(closed-form) 심볼오류확률은 아래

와 같다^[6].

$$P_s(\gamma) = 1 - \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2\gamma}{3}}\right) \right]^3. \quad (7)$$

수식 (3)과 (7)을 (4)에 대입하면 페이딩 채널에서 8진 성상도의 심볼오류확률은 다음과 같이 표현된다.

$$P_{s, Ray}(\Lambda) = 3 \int_0^\infty p_s(\gamma) Q\left(\sqrt{\frac{2\gamma}{3}}\right) d\gamma - 3 \int_0^\infty p_s(\gamma) Q^2\left(\sqrt{\frac{2\gamma}{3}}\right) d\gamma + \int_0^\infty p_s(\gamma) Q^3\left(\sqrt{\frac{2\gamma}{3}}\right) d\gamma. \quad (8)$$

수식 (6)의 적분방정식과 동일한 방식에 의하여 수식 (8)의 우측 첫 번째 적분식은 다음과 같이 계산된다.

$$\int_0^\infty p_s(\gamma) Q\left(\sqrt{\frac{2\gamma}{3}}\right) d\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{\Lambda+3}}. \quad (9)$$

$Q^2(x)$ 의 등가식인^[9] 수식 (10)을 이용하면 수식 (8)의 두 번째 적분식은 수식 (11)과 같이 유도된다.

$$Q^2(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2 \sin^2 \phi}\right) d\phi. \quad (10)$$

여기서는 [8]의 2.562.1의 적분식을 사용하였다. 수식 (8)의 세 번째 적분식은 수식 (12)와 같이 정리된다.

따라서 레일리 페이딩 채널에서 8진 성상도가 적용된 통

$$\int_0^\infty p_s(\gamma) Q^2\left(\sqrt{\frac{2\gamma}{3}}\right) d\gamma = \frac{1}{\pi\Lambda} \int_0^{\pi/4} \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{\gamma}{\Lambda} + \frac{\gamma}{3\sin^2\phi}\right)\right] d\gamma d\phi = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\Lambda}{\Lambda+3}} \tan^{-1}\left(\frac{\Lambda+3}{\Lambda}\right). \quad (11)$$

$$\int_0^\infty p_s(\gamma) Q^3\left(\sqrt{\frac{2\gamma}{3}}\right) d\gamma = \frac{1}{\pi\Lambda} \int_0^{\pi/4} \int_0^\infty Q\left(\sqrt{\frac{2\gamma}{3}}\right) \exp\left[-\left(\frac{\gamma}{\Lambda} + \frac{\gamma}{3\sin^2\phi}\right)\right] d\gamma d\phi = \frac{1}{8} - \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Lambda}{\Lambda+3}} \tan^{-1}\left(\frac{\Lambda+3}{\Lambda}\right) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{3\sin^2\phi}{\Lambda+3\sin^2\phi} \frac{\sqrt{\Lambda\sin^2\phi}}{\sqrt{\Lambda+(\Lambda+3)\sin^2\phi}} d\phi. \quad (12)$$

$$P_{s, Ray}(\Lambda) = \frac{7}{8} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{\Lambda+3}} + \frac{5}{2\pi} \sqrt{\frac{\Lambda}{\Lambda+3}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\Lambda+3}{\Lambda}}\right) - \frac{3}{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2\phi}{\Lambda+3\sin^2\phi} \frac{\sqrt{\Lambda\sin^2\phi}}{\sqrt{\Lambda+(\Lambda+3)\sin^2\phi}} d\phi. \quad (13)$$

신시스템의 평균 심볼오류확률은 수식 (13)과 같다.

III. 모의실험 및 성능분석

수식 (6)과 (13)에 제시된 이론적 심볼오류확률의 정확성을 검증하기 위하여 그림 2에 나타낸 시스템 모델을 이용하여 모의실험을 수행하였다. 여기서 의사랜덤 이진 신호열 (pseudo-random binary sequence, PRBS) 발생기 출력은 신호성상도에 의하여 대응되는 신호점으로 변환된다. 레일리 페이딩 채널과 가산성 백색 가우시안 잡음채널은 MatLab 함수를 이용하였다. 수신된 신호는 가장 인접한 신호점으로 판정된 다음 역사상기(demapper)에 의하여 비트열로 복원된다. 비교를 위하여 4진 위상편이키잉과 8진 위상편이키잉이 적용된 통신시스템의 이론적인 심볼오류도 함께 나타내었다. 또한, 가산성 백색 가우시안 잡음채널에서 각각의 성상도가 가지는 성능도 참고를 위하여 제시하였다.

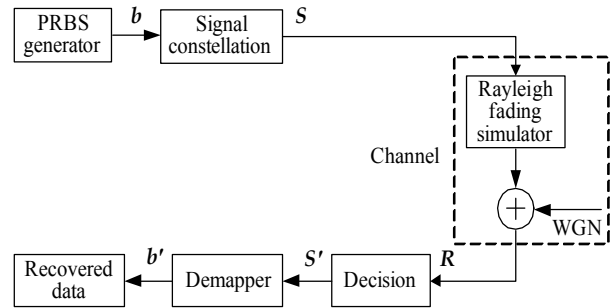


그림 2. 모의실험을 위한 시스템 모델의 저주파 등가 블럭도
Fig. 2. The lowpass equivalent block diagram for simulation

4진 신호성상도를 이용한 실험 결과를 그림 3에 나타내었다. 수식 (6)에 제시된 이론적인 심볼오류확률은 모의실험 결과와 신호 대 잡음비의 모든 영역에서 불과 0.5 dB 이내의 매우 근소한 차이를 가지는 것으로 나타났다. 그리고 3차원 4진 성상도가 적용된 시스템이 4진 위상편이키잉 성상도를 이용하는 시스템에 비하여 1 dB 가량 우수한 성능을 보이는 것을 알 수 있다.

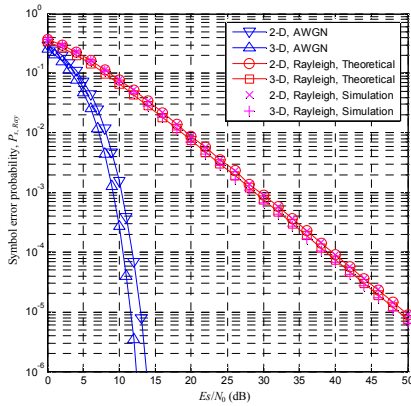


그림 3. 레일리 페이딩 채널에서 4진 성상도의 평균 심볼오류확률
Fig. 3. The average SEPs of the 4-ary constellations in Rayleigh fading channel

한편, 8진 성상도의 경우 이론적인 심볼오류확률과 모의 실험 결과가 거의 일치함을 그림 4를 통하여 확인할 수

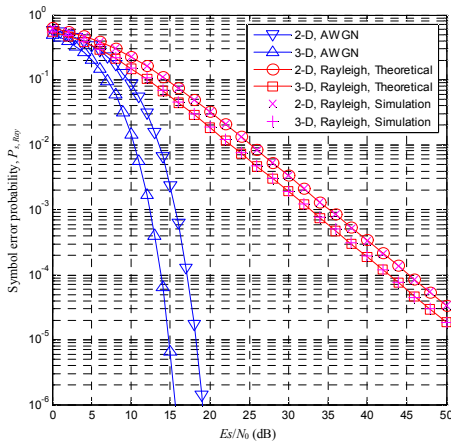


그림 4. 레일리 페이딩 채널에서 8진 성상도의 평균 심볼오류확률
Fig. 4. The average SEPs of the 8-ary constellations in Rayleigh fading channel

있다. 이는 수식 (13)에 제시된 심볼오류확률이 매우 정확하게 유도되었음을 의미한다. 또한, 기준 오류율 $P_{s,Ray} = 10^{-4}$ 으로 정할 때 레일리 페이딩 채널에서 3차원 8진 신호 성상도는 2차원 성상도에 비하여 약 3 dB 가량 신호 대 잡음비 이득이 있음도 확인할 수 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는 초고속 및 고품질 통신에서 가장 자주 사용되는 3차원 신호성상도가 레일리 페이딩 채널에서 가지는 심볼오류확률을 이론적으로 유도하였다. 컴퓨터 모의실험을 이용한 검증 결과 이론적인 오류확률은 매우 정확함을 알 수 있다. 따라서 제시된 결과는 향후 3차원 성상도가 적용된 무선 통신시스템 설계에서 성능 기준으로 활용할 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

- [1] H. G. Batshon, I. Djordjevic, and T. Schmidt, "Ultra high speed optical transmission using subcarrier-multiplexed four-dimensional LDPC-coded modulation," *Opt. Express*, vol. 18, no. 19, pp. 10814-10819, Sep. 2010.
- [2] S.G. Kang, "An OFDM with 3-D signal mapper and 2-D IDFT modulator," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 12, no. 12, pp. 871-873, Dec. 2008.
- [3] S. Benedetto and P. Poggiolini, "Multilevel polarization shift keying: Optimum receiver structure and performance evaluation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, no. 2/3/4, pp. 1174-1186, Feb./Mar./Apr. 1994.
- [4] J.-E. Porath and T. Aulin, "Design of multidimensional signal constellations," *IEE Proc.-Commun.*, vol. 150, no. 5, pp. 317-323, Oct. 2003.
- [5] M. Khabbazi, M.J. Hossain, M.-S. Alouini, and V.K. Bhargava, "Exact method for the error probability calculation of three-dimensional signal constellations," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 57, no. 4, pp. 922-925, Apr. 2009.
- [6] Z. Chen, E.C. Choi, and S.G. Kang, "Closed-form expressions for the symbol error probability of 3-D OFDM," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 14, no. 2, pp. 112-114, Feb. 2010.
- [7] J.G. Proakis, *Digital Communications*, 2nd ed., McGraw-Hill, Singapore, 1989.
- [8] I.S. Gradshteyn and J.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 4th ed., Academic Press, New York, 1980.
- [9] M.K. Simon, "Single integral representations of certain integer powers of the Gaussian Q-function and their application," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 6, no. 12, pp. 532-534, Dec. 2002.