

---

# Duffing 방정식을 가진 MEMS에서의 카오스 현상

배영철\*

## Chaotic Phenomena in MEMS with Duffing Equation

Young-Chul Bae\*

### 요 약

최근 센서 네트워크 등이 대량으로 설치되면서 전원에 대한 유지보수의 어려움을 자지고 있다. 이를 해결하기 위한 방법으로 센서 네트워크에 MEMS 발진기를 삽입하여 MEMS 발생하는 진동을 이용한 전원 개발이 관심을 받고 있다.

본 논문에서는 MEMS 시스템에서 전원 신호로 사용할 수 있는 진동 신호를 발생시키기 위한 방법의 하나로 Duffing 방정식으로 구성하는 MEMS 시스템을 제안하고 이 시스템의 진동신호에서 카오스적인 거동을 컴퓨터 시뮬레이션으로 확인하고 검증하였다. 검증 방법으로 파라미터 변화에 의한 주기 운동과 카오스 운동이 있음을 시계열 데이터, 위상 공간, 전력 스펙트럼, 포앵카레 맵을 통하여 확인하였다.

### ABSTRACT

Recently, there are many difficult for maintenance in the power in established sensor networks. In order to solve this problems, the power development has been interested using vibration in MEMS that insert the MEMS oscillator.

In this paper, we propose the MEMS system with Duffing equation to generate vibration signal that can be use power signal in MEMS and confirm and verify the chaotic behaviors in vibration signal of MEMS by computer simulation. As a verification methods, we confirm the existence of period motion and chaotic motion by parameter variation through the time series, phase portrait, power spectrum and poincare map.

### 키워드

Chaos, Nonlinear Dynamics, MEMS, vibration signal, Duffing equation  
카오스, 비선형 동적 시스템, MEMS, 진동 신호, Duffing 방정식

## I. 서 론

최근에 MEMS(Microelectromechanical system)에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있다[1-3]. MEMS를 이용하면 이 시스템 자체가 마이크로 미만의 초소형

소자이기 때문에 많은 활용 가치를 가지고 있다.

사회가 복잡해지면 관측해야할 대상도 많아져 최근에는 센서 네트워크가 관심을 받고 있으며 우리 주변에 많이 설치되어 있다[4-5]. 이들 센서 네트워크를 구동하기 위한 전원이 필요하며 일반적으로 배터리를 사

---

\*전남대학교 전기·전자통신·컴퓨터 공학부(ycbae@jnu.ac.kr)

이 논문은 2011년 한국전자통신학회총합학술대회에서 발표한 일부 내용을 포함한 논문임

접수일자 : 2011. 08. 16

심사(수정)일자 : 2011. 09. 17

게재확정일자 : 2011. 10. 12

용하고 있다. 전원을 배터리로 사용하는 경우 주기적인 배터리 교체로 인한 인력소모가 커지고 있어 이에 대한 대응책이 필요하며 가장 일반적인 방법으로 센서 네트워크 자체 회로에서 생산하는 전원을 직접 공급하는 방법이 있을 수 있다.

이러한 방법을 뒷받침하기 위한 방법의 하나로서 MEMS에서 직접 전원을 발생시키는 연구가 필요하며 MEMS에서 카오스적인 진동현상[2] 이용하여 전력을 발생시키는 방법이 좋은 예가 될 것이다. 그러나 참고 문헌[2]의 경우 MEMS에서 카오스 현상에 해석 중에서 파라미터 값의 변화에 의한 정확한 해석을 내놓지 못한 문제점을 가지고 있다

또한 최근에 비선형 시스템에 대한 연구도 활발하게 진행되고 있으며 주로 시스템에서 진동 신호를 발생시키는 오실레이터에 대한 연구가 활발하다[6-7]

본 논문에서는 MEMS 시스템에서 전원 신호로 사용할 수 있는 진동 신호를 발생시키기 위한 방법의 하나로 Duffing 방정식[8-10]을 가지는 MEMS 시스템을 제안하고 이 시스템의 진동신호에서 카오스적인 거동을 컴퓨터 시뮬레이션으로 확인하고 검증하였다[8-10]. 검증 방법으로 파라미터 변화에 의한 주기 운동과 카오스 운동이 있음을 시계열 데이터, 위상 공간, 전력 스펙트럼, 포엔카레 맵을 통하여 확인하였다

## II. MEMS 회로

### 2.1 Duffing 방정식[8]

MEMS에서 비선형 특성을 구하기 위해 일반적인 비선형 스프링 힘을 가진 그림 1 및 식(1)과 같이 표현되는 Duffing 방정식이라 불리는 비선형 동력학 시스템을 생각해 보자. 이 방정식은 식(1)과 같이 좌변에 3차원의 형상을 나타내는  $\beta x^3$  항이 비선형 특성을 좌우하는 힘을 가지고 있다.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \beta x^3 = f_0 \sin \omega t \tag{1}$$

여기서 여기서  $m$ 은 질량,  $k$ 는 스프링 계수,  $c$ 는 감쇠 계수를 나타낸다.  $\beta$ 는 비선형성의 세기를 나타낸다. 식(1)의 좌변은 2차 항을 가진 시스템으로서 카오스

적인 거동을 나타낼 수 있는 기본적인 요소인 시스템이 3차계 이상이며 비선형 요소를 가져야한다는 사실에 미흡하다. 비선형적인 요소는 존재하나 시스템이 2차계로서 이 시스템에서는 카오스적 거동을 찾을 수 없다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 우변에 강제적인 힘을 가하여 비자율(nonautonomous) 시스템을 구성하여 3차 시스템을 만들게 된다.

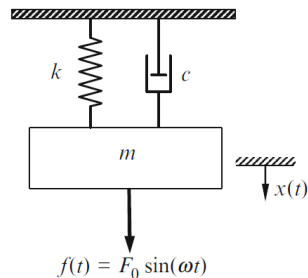


그림 1. Duffing 방정식의 모델  
Fig. 1 Model of Duffing equation

식(1)의 Duffing 방정식에서 자유 발진(free oscillation), 계동 발진(damped oscillation), 히스테리시스 현상이라 불리는 강제발진 1차 공진과 점프 현상(Forced Oscillations - Primary Resonance and Jump Phenomenon)과 서브하모닉(subharmonic)과 슈퍼하모닉(superharmonic)으로 불리는 2차 공진(Secondary Resonances) 공진 현상이 발생한다[10].

### 2.2 MEMS 발진기[2]

MEMS 발진기는 식(2)와 같이 간단한 스프링-질량 시스템으로 모델링 될 수 있다. 식(2)로 표시하는 MEMS 시스템은 식(1)로 표시하는 Duffing 방정식과 동일한 모델이라고 볼 수 있다.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = F(x, V) \tag{2}$$

여기서, 현실적인 MEMS 설계에 기반하여 사용할 수 있는 파라미터 선정하였으며 그 값은 질량  $m = 2.3 \times 10^{-9} \text{ kg}$ , 기계적 선형 강체 상수  $k_1 = 5.31 \text{ N/m}$ , 기계적 입체 강체 상수

$k_3 = 0.3 \times 10^{11} \text{ N/m}^3$ 로 선정하였으며 전기적인 힘  $F(x(t), V(t))$ 는 시간  $t$ , 변위  $x$ , 여기전극전압 (excitation electrode voltage)  $V$ 의 함수를 나타낸다.

### 2.3 전기적인 힘[1-2]

식(2)에서도 식(1) 동일하게 좌변이 2차항만 존재하여 카오스적 거동을 만들지 못하므로 카오스적인 거동을 만들기 위하여 우변에 강제적인 힘인 전기적인 힘을 가하여 3차 시스템인 비자율 시스템을 구성해야만 한다.

#### 2.3.1 이상적 전기적인 힘[1-2]

식(2)의 MEMS 설계 전기적인 힘은 식(3)와 같이 정의하여 사용한다.

$$F(x) = kV_1^2 u(x) - kV_2^2 u(-x) \quad (3)$$

여기서  $u(x)$ 는 계단 함수(step function),  $k$ 는 스칼라,  $V_1, V_2$ 들은 동조 전극에 인가한 전압들이다.

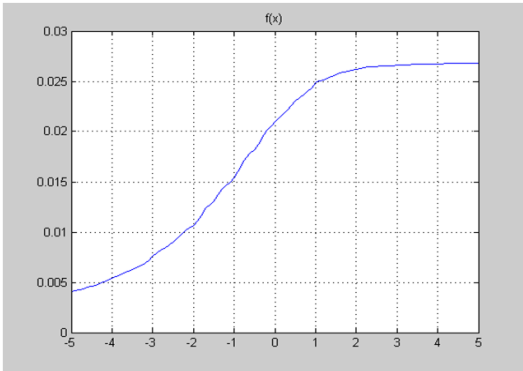


그림 2. 하나의 동조 전극으로부터 얻은  $f(x)$  값  
Fig. 2  $f(x)$  value from one tuning electrode

#### 2.3.2 실제 전기적인 힘[1-2]

식(3)은 이상적인 모델이므로 실제 실험이나 시뮬레이션에 적용하기 어려운 문제점이 존재하므로 이를 극복하기 위한 실질적인 전기적인 힘은 식(4)과 같이 기술된다.

$$F(x) = V_1^2 f(x) - V_2^2 f(-x) \quad (4)$$

적당한 동조 전압  $V_1(t), V_2(t)$ , 계동 계수  $c$ 를 선택함에 의해 시스템의 퍼텐셜 에너지는 이중 우물 퍼텐셜의 구성을 나타낸다. 또한 시스템 거동은 많은 기계적 시스템에서 단단한 스프링 효과를 나타내는 양인 입체 강체 항을 가진 비선형 발진기인 Duffing 발진기 [9] 또는 오직 진동의 하나의 모드를 고려하였을 때인 버클드 빔(buckled beam)[10]과 유사함을 알 수 있다.

적당하게 선택한 전극 전압들은 원하는 정현파 구동력을 가진 신호를 소개할 수 있으며 카오스의 정상상태에 시스템을 가져온다.  $F(x)$ 의 구성에서 반대칭 성분  $f(x)$ 와  $f(-x)$ 를 사용한다.  $f(-x)$ 를 그림 3에 나타내었다.

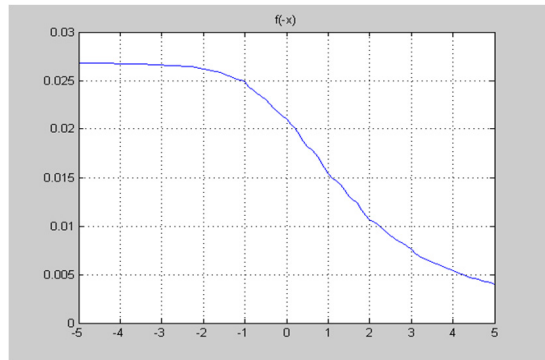


그림 3.  $f(-x)$  그래프  
Fig. 3  $f(-x)$  graph

식(4)에서  $V_1 = V_0 - V_a \cos(\omega t)$ ,

$V_2 = V_0 + V_a \cos(\omega t)$ 라 놓고  $F(x)$ 를 구하면 식 (5)와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} F(x) &= [V_0 - V_a \cos(\omega t)]^2 f(x) - [V_0 + V_a \cos(\omega t)]^2 f(-x) \quad (5) \\ &= [V_0^2 + V_a^2/2 + V_a^2 \cos(2\omega t)/2] [f(x) - f(-x)] \\ &\quad - 2V_0 V_a \cos(\omega t) [f(x) - f(-x)] \\ &= (V_0^2 + V_a^2/2) [f(x) - f(-x)] \\ &\quad - 2V_0 V_a \cos(\omega t) [f(x) + f(-x)] + O(\cos(2\omega t)) \end{aligned}$$

식(5)에서  $F(x)$ 의 값 또는 그래프를 구하기 위해서는  $f(x) - f(-x)$ 의 값과  $f(x) + f(-x)$  값의 그래프가 필요하며 이들의 값을 각각 그림 4과 그림 5에 나타내었다. 또한 전체  $F(x)$ 의 값을 컴퓨터 시뮬레이션으로 구한 값을 그림 6에 나타내었다.

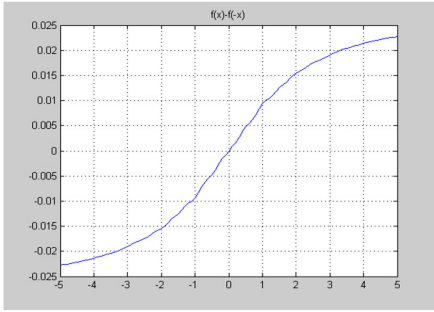


그림 4.  $f(x) - f(-x)$  그래프  
Fig. 4  $f(x) - f(-x)$  graph

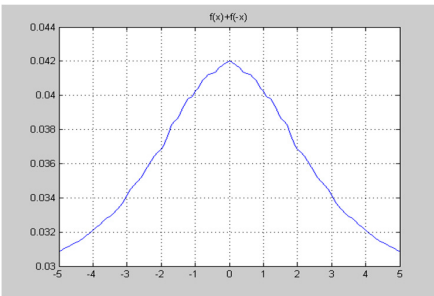


그림 5.  $f(x) + f(-x)$  그래프  
Fig. 5  $f(x) + f(-x)$  graph

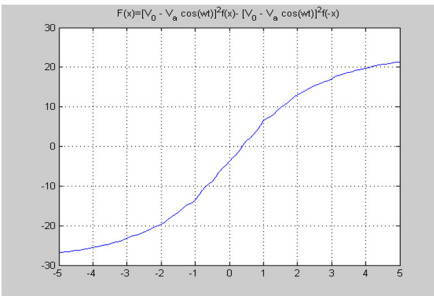


그림 6. 전기적인 힘을 나타내는  $F(x)$  그래프  
Fig. 6  $F(x)$  graph of electric forcing

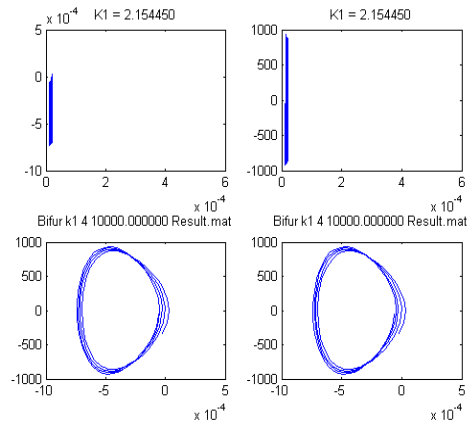
### III. 파라미터 변화에 의한 카오스 현상 분석

MEMS 시스템에서의 비선형 특성인 카오스 특성을 확인하기 위하여 파라미터 변화에 의한 식(2)와 식(5)를 이용하여  $k_1$ 과  $k_3$ 의 파라미터 값을 변화시켰을 때의 시계열 데이터와 위상 공간을 통하여 주기 운동에서 카오스 운동으로 변화하는 주기 배증 과정을 확인하였다. 또한 전력 스펙트럼을 통하여 카오스적 거동의

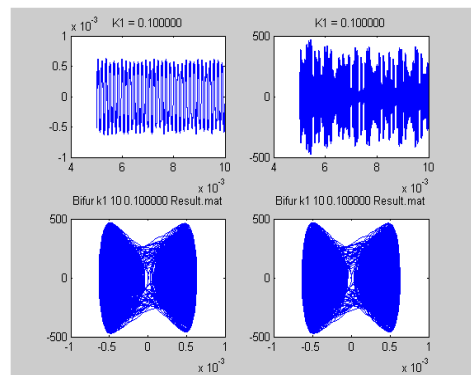
모습을 확인하였다.

#### 3.1 $k_1$ 변화에 의한 시계열 데이터와 위상 공간을 통한 주기 배증 과정

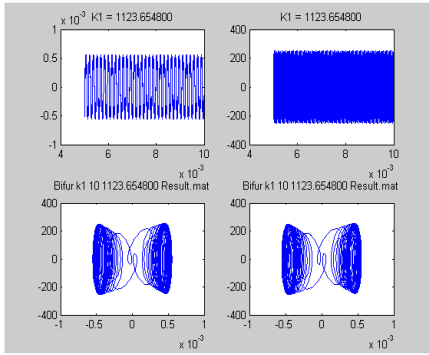
식(2)과 식(5)을 이용하여 파라미터 값  $k_1$ 를 변화시켜 컴퓨터 시뮬레이션을 하였을 때의 시계열 데이터와 위상 공간을 그림 6에 나타내었다.



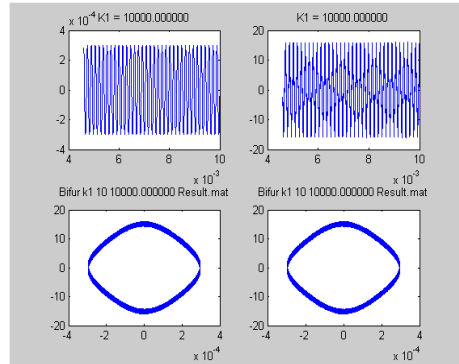
(a)  $k_1 = 2.15$  일 때의 시계열 데이터(위)와 위상공간(아래)  
(a) Time-series(upper) and phase plane(bottom) when  $k_1 = 2.15$



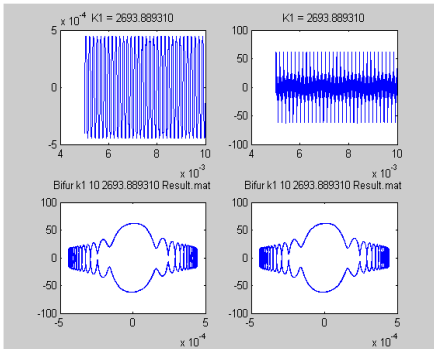
(b)  $k_1 = 0.1$  일 때의 시계열 데이터(위)와 위상공간(아래)  
(b) Time-series(upper) and phase plane(bottom) when  $k_1 = 0.1$



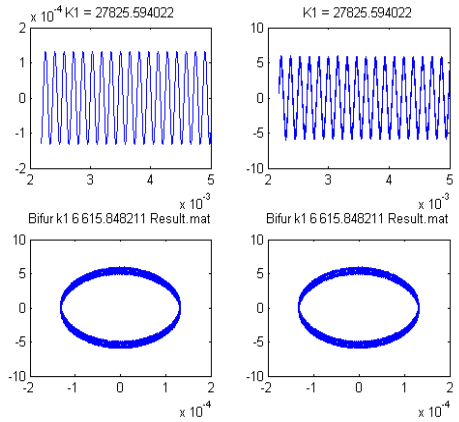
(c)  $k_1 = 1123.65$  일 때의 시계열 데이터(위)와 위상공간(아래)  
(c) Time-series(upper) and phase plane(bottom) when  $k_1 = 1123.65$



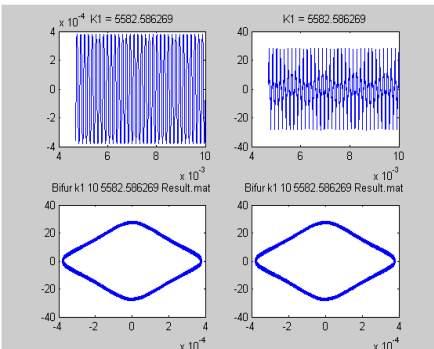
(f)  $k_1 = 10,000$  일 때의 시계열 데이터(위)와 위상공간(아래)  
(f) Time-series(upper) and phase plane(bottom) when  $k_1 = 10,000$



(d)  $k_1 = 2693.88$  일 때의 시계열 데이터(위)와 위상공간(아래)  
(d) Time-series(upper) and phase plane(bottom) when  $k_1 = 2693.88$



(g)  $k_1 = 27,825$  일 때의 시계열 데이터(위)와 위상공간(아래)  
(g) Time-series(upper) and phase plane(bottom) when  $k_1 = 27,825$



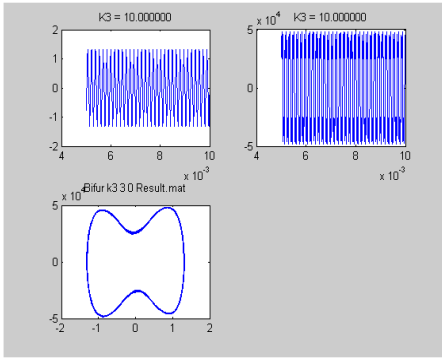
(e)  $k_1 = 5582.58$  일 때의 시계열 데이터(위)와 위상공간(아래)  
(e) Time-series(upper) and phase plane(bottom) when  $k_1 = 5582.58$

그림 7.  $k_1$ 의 값을 변화시켰을 때의 시계열 데이터와 위상 공간  
Fig. 7 Time-series and phase plane when  $k_1$  value varied.

그림 7에서 보는 바와 같이 다양한 주기 운동(a), 어트랙터를(b, c) 볼 수 있으며, 주기 운동(d), 리미트 사이클(e-g)의 카오스적인 특성이 있음을 확인 할 수 있다.

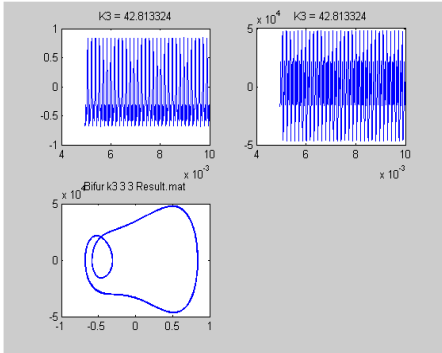
### 3.1 $k_3$ 변화에 의한 시계열 데이터와 위상 공간을 통한 주기 배증 과정

식(2)과 식(5)을 이용하여 파라미터 값  $k_3$ 를 변화시켜 컴퓨터 시뮬레이션을 하였을 때의 시계열 데이터와 위상 공간을 그림 7에 나타내었다.



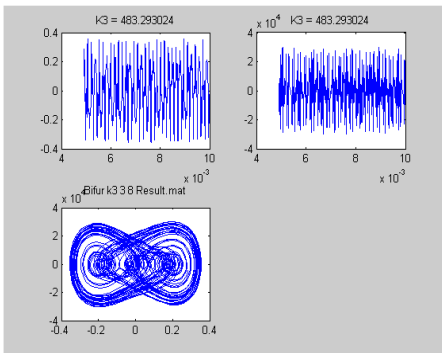
(a)  $k_3 = 10.0$  일 때의 시계열 데이터(위)와 위상공간(아래)

(a) Time-series(upper) and phase plane(bottom) when  $k_3 = 10.0$

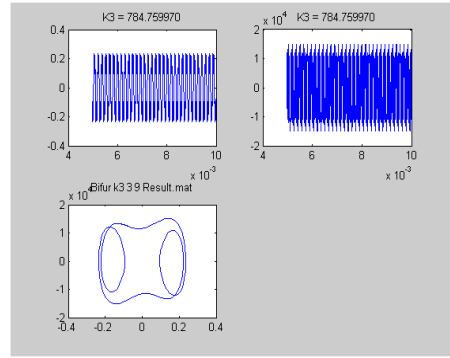


(b)  $k_3 = 42.5$  일 때의 시계열 데이터(위)와 위상공간(아래)

(b) Time-series(upper) and phase plane(bottom) when  $k_3 = 42.5$



(c)  $k_3 = 483$  일 때의 시계열 데이터(위)와 위상공간(아래)  
(c) Time-series(upper) and phase plane(bottom) when  $k_3 = 483$



(d)  $k_3 = 784$  일 때의 시계열 데이터(위)와 위상공간(아래)  
(d) Time-series(upper) and phase plane(bottom) when  $k_3 = 784$

그림 8.  $k_3$ 의 값을 변화시켰을 때의 시계열 데이터와 위상공간  
Fig. 8 Time-series and phase plane when  $k_3$  value varied.

그림 8에서 보는 바와 같이 1주기 운동(a), 2주기 운동(b), 카오스 어트랙터(c), 그리고 다시 주기 운동(d)의 전형적인 카오스적 특성이 있음을 확인할 수 있다.

### 3.3 전력 스펙트럼과 포앵카레 맵을 통한 카오스 현상 해석

식(2)와 식(5)를 이용하여 전력 스펙트럼을 구한 결과를 그림 9에 나타내었다. 그림 9의 전력 스펙트럼을 보면 스펙트럼 대역이 전대역에 걸쳐 나타난 것을 알 수 있으며 이는 카오스 현상이 있음을 나타내는 일반적인 특성임을 알 수 있다.

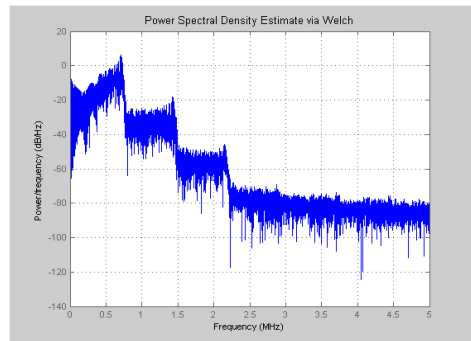


그림 9. 전력 스펙트럼  
Fig. 9 Power spectrum

또한 그림 7(b)를 기반으로한 포엔카레 맵을 그림 10에 나타내었다. 그림 10을 통하여도 이 식(2)의 MEMS시스템이 카오스적인 특성을 가지고 있음을 확인 할 수 있다.

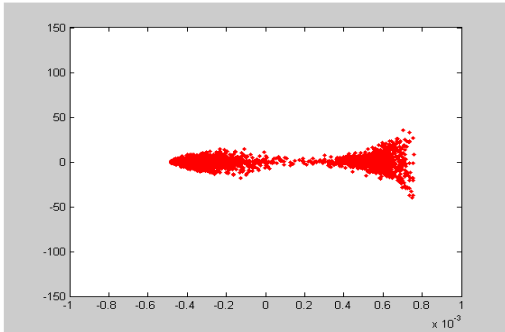


그림 10. 전력 스펙트럼  
Fig. 10 Power spectrum

## V. 결론 및 향후 과제

Duffing 시스템으로 구성되는 MEMS 시스템에서 카오스적인 거동이 있음을 파라미터 변화에 의해 시계열 데이터와 위상 공간을 통해서 컴퓨터 시뮬레이션으로 확인하였다. 또한 전력 스펙트럼과 포엔카레 맵을 통하여 동일한 시스템에 있어서 카오스 거동이 있음을 확인하였다.

앞으로 MEMS 시스템에서 카오스 특성을 이용하여 센서 네트워크와 같은 소자의 자체 전원으로서 활용할 수 있는 효율이 높은 MEMS 발진기를 제작하는 것이 과제로 남는다.

## 참고 문헌

- [1] S. G. Adams, "Design of electrostatic actuators to tune MEMS", Ph.D. dissertation, Cornell Univ., Ithaca, NY, May, 1996.
- [2] Yongmei Cindy Wang, Scott G. Adams, James S. Thorp, Noel C. MacDonald, Pete Hartwell, and Fred Bertsch, "Chaos in MEMS, Parameter Estimation and Its Potential Application", IEEE. trans. Circuit and System, Vol. 45, No. 10, pp. 1013-1020, 1998.
- [3] K. Shaw, Z. Zhang, and N. MacDonald, "SCREAM I: A single mask, single crystal silicon process for microelectromechanical structures", MEMS'93, pp. 155 - 160, 1993.
- [4] 박나연, 손철수, 김원중, "모바일 센서 네트워크에서 효율적인 노드 위치 결정", 한국전자통신학회논문지, 5권, 4호, pp. 391-398, 2010.
- [5] 강희훈, 이영중, 한완옥, "유비쿼터스 센서 네트워크를 위한 에너지-효율적인 계층 구조 클러스터 기반 라우팅 기법", 한국전자통신학회논문지, 4권, 3호, pp. 243-246, 2009.
- [6] 손영우, 배영철, "하드웨어 구현에 의한 카오스 어트랙터 생성용 Chua 회로에 관한 연구", 한국전자통신학회논문지, 5권, 2호, pp. 158-163, 2010.
- [7] 손영우, 배영철, "L 성분이 없는 간략화 CHUA 회로 구현에 관한 연구", 한국전자통신학회논문지, 5권, 1호, pp. 17-22, 2010.
- [8] G. Duffing, "Erzwungene Schwingungen bei Veranderlicher Eigen Frequenz und ihre Technische Bedeutung", Vieweg, Braunschweig, 1918.
- [9] J. M. T. Thompson and H. B. Stewart, "Nonlinear Dynamics and Chaos", John Wiley, Singapore, 1988.
- [10] M. Lakshmanan, K. Murali, "Chaos in Nonlinear oscillators", World scientific, 1995.
- [11] S. Parthasarathy and M. Lakshmanan, "On the exact solutions of the duffing oscillator", J. Sound Vib. Vol. 137, pp. 523-526, 1990.
- [12] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, "Nonlinear Oscillations". John Wiley, New York, 1979.
- [13] J. Guckenheimer and P. Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", New York, NY: Springer-Verlag, 1983.
- [14] F. C. Moon and P. Holmes, "A magnetoelelastic strange attractor," J. Sound Vib., Vol. 65, No. 2, pp. 285-296, 1979.

저자 소개



**배영철(Young-Chul Bae)**

1984년 광운대학교 전기공학과  
(공학사)

1986년 광운대학교대학원 전기공  
학과 (공학석사)

1997년 광운대학교대학원 전기공학과(공학박사)

1986년~1991년 한국전력공사

1991년~1997년 산업기술정보원 책임연구원

1997년~2006년 여수대학교 전자통신전기공학부 부  
교수

2002년~2002년 Brigham Young University 방문교수

2006년~현재 전남대학교 전기·전자통신·컴퓨터  
공학부 교수

2011년~2011년 University of Utah 방문교수

※ 관심분야 : Chaos Control and Chaos Robot,  
Robot control etc.