

극대변형 해석을 위한 SPH 수치기법 개발 및 ExLO 코드 연계

Integration of 3-Dim SPH Scheme into the ExLO Code

이 민 형* 조 영 준*
Minhyung Lee Youngjun Cho

Abstract

This paper describes the development of SPH(Smooth Particle Hydrodynamics) scheme and integration into the multi-material shock physics code(ExLO) for the purpose of the application to the extreme large deformation problems. SPH numerical scheme has been extended into the fluid dynamics and the high-speed impact events, such as space structure protection against space debris and meteorite catering. Like other hydrocodes, SPH scheme also solves the conservation equations with the constitutive equation including equation of state. The benchmark problem, Taylor-Impact test, was simulated and the predictions show good agreements with both the published numerical data and experimental data. Currently, the contact treatment between materials is under development.

Keywords : Smooth Particle Hydrodynamics(입자동력학), Hydrocode(하이드로코드), Large Deformation(대변형), Taylor-Impact Test(테일러 충돌 시험), Integration(연계)

1. 서론

최근에 국내에서 우주 구조물을 우주 파편으로부터 (space debris) 보호하기 위해 부분적인 수치기법 연구가 시작되었다. 지구 근접위치에는 Fig. 1과 같이 아주 많은 우주파편이 존재하며 이는 점차 증가하고 추세이다^[1]. 우주 파편은 실제로 6~20km/s의 속도를 움직이고 있으며 이러한 큰 운동에너지는 인공위성에 상당한 위협이 되고 있다. 미국, 유럽 및 일본에서는

우주구조체를 보호하기 위해 약 30여 년 전부터 연구를 진행하고 있다^[2~4].

실험적인 연구는 약 6km/s의 충돌속도 범위까지 수행하고 동적 재료 물성(material model) 및 고압 상태방정식을(EOS) 개발하는 연구동 병행한다. 실질적인 설계를 위한 다양한 자료는 예산과 시간이 절약되는 수치기법에 의존한다. 이러한 대변형 비정상문제를 다루는 수치코드인 Hydrocode는 선진국에서 60여년의 개발 역사를 지닌다. 국내에서는 약 20여년의 역사를 지니고, Lagrangian, ALE 및 Eulerian 코드가 개발이 되어 오고 있다. 90년대부터 우주선 방호연구에 극대변형 해석에 특히 유효한 SPH(Smooth Particle Hydrodynamics) 기법이 발전하여 적용되는 실정이다^[2,3]. 따라서 본 논문

† 2011년 3월 25일 접수~2011년 5월 13일 게재승인

* 세종대학교(Sejong University)

책임저자 : 이민형(mlee@sejong.ac.kr)

문에서 국내에서 개발되는 SPH(Smooth Particle Hydrodynamics) 기법을 기술하고 이 기법을 개발된 ExLO^[4] 코드와의 연계를 기술한다. 국내에서도 10여년 전에 SPH 기법에서 입자간의 접촉기법 연구를 수행한 실적이 있다^[5]. 적용된 실린더 좌표계 수치기법이 현재에는 채택이 되지 않는 복잡한 방법론이 채택되어 구현되었다^[6].

SPH 기법은 1970년대에 우주과학분야에서 제안된 수치기법이다^[7,8]. 현재 여러 가지 기법들의 보완되어 안정적인 하나의 수치기법으로 평가되고 있다. 다른 기법과 마찬가지로 보존방정식들과 재료모델 및 상태방정식을 풀게 된다. 하지만 중요한 차이점은 보존형태 미분방정식을 커널(Kernel)함수로 표현하고, 이를 요소를 표현하는 입자들을 사용한 적분형태로 재구성하는 것이다. 따라서 요소들의 연결도(connectivity)가 별도로 필요 없이 매 시간 스텝마다 주위의 요소를 찾는다(search 기능). 따라서 극한 대변형과정에서 Lagrangian 기법에서 나타나는 체적이 음수가 되는 문제가 극복가능하다.

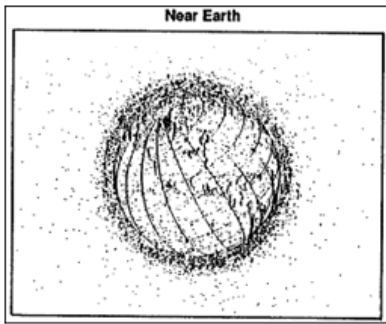


Fig. 1. Earth Orbital Debris Population^[1]

2. SPH 수치 기법

가. SPH 기법의 기초이론

SPH 기법은 구하고자 하는 해를 커널함수를 사용한 적분형태로 변환하여 구하는 방식이다. 즉 함수 $f(x)$ 에 대해 다음과 같은 수학적 표현에 기초한다.

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') \delta(x-x') dx' \quad (1)$$

여기서 x 는 위치함수이며 δ 는 Dirac delta function이

다. 여기서 δ 함수를 W (smoothing kernel function)으로 치환하면 다음과 같은 SPH 기본 식 형태가 된다.

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') W(x-x',h) dx' \quad (2)$$

여기서 h 는 유효영역(influence area)을 나타내는 길이차원이다(Fig. 2). 도함수의 SPH 표현식도 마찬가지로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla f(x) = \int_{\Omega} \nabla f(x') \delta(x-x') dx' \quad (3)$$

이 표현식을 divergence theorem을 사용하면 궁극적으로 다음과 같이 커널함수의 미분으로 치환하여 구할 수 있다.

$$\nabla f(x) = - \int_{\Omega} f(x') \nabla W(x-x') dx' \quad (4)$$

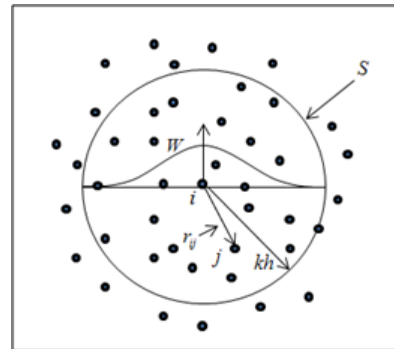


Fig. 2. Particle approximations using particles within the smoothing function W for particle i

주의할 사항은 커널함수 W 의 차원은 문제의 차원에 따라 달라지며 W 함수는 다음과 같은 성질을 가진 even function이 사용된다.

- normalization condition

$$\int_{\Omega} W(x-x',h) dx' = 1 \quad (5)$$

- unity condition

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x-x',h) dx = \delta(x-x') \quad (6)$$

- compact condition

$$W(x-x') = 0 \text{ when } |x-x'| > kh \quad (7)$$

나. 지배 방정식

다른 수치기법과 동일하게 아래 식 (8)과 같은 연속체역학에서의 보존방정식을 풀게 된다. 이 방정식은 일종의 오일러 방정식에 해당되며 재료의 강도를 포함하는 구성방정식과 같이 연립되어진다^[10].

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} \\ \frac{Dv^\alpha}{Dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \\ \frac{De}{Dt} &= \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 ρ 는 밀도, v 는 속도, σ 는 응력함수이며 e 는 내부에너지이다. α, β 는 3차원 벡터성분이다.

물질의 강도, 파괴 등을 구현하기 위한 재료모델은 기존의 코드들에 적용되는 다양한 모델들이 그대로 적용가능하다. 즉 응력함수는 압력과 전단응력으로 표현된다.

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta} \quad (9)$$

그리고 응력변화율은 shear modulus G 와 strain rate tensor를 사용하여 다음과 같이 구한다.

$$\dot{\tau}^{\alpha\beta} = G\overline{\epsilon^{\alpha\beta}} = G\left(\epsilon^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\epsilon^\gamma{}_\gamma\right) \quad (10)$$

또한 strain rate는 다음 식으로 구하여진다.

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha}\right) \quad (11)$$

상태방정식은 기존 코드들에 사용된 서브루틴들이 수정 없이 적용가능하다. 가장 많이 사용되는 상태방정식인 ‘Mie-Grunisen EOS’를 사용하여 주된 계산을 수행하였다. 매우 큰 고압(high pressure)에 적합한 상태방정식도 알려져 있으며 이 또한 프로그램에 구현되어 있어 선택이 가능하다.

위에서 나열된 지배방정식들은 ‘2.가’장에서 기술한 방식을 사용하여 커널함수의 적분형태로 변환하여 프로그램에 적용하는데 아래에 지배방정식의 SPH 근사 표현식을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_i &= \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (U_i^\beta - U_j^\beta) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \\ \left(\frac{dv^\alpha}{dt}\right)_i &= \sum_{j=1}^N m_j \frac{\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \\ \left(\frac{de}{dt}\right)_i &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i} + \frac{p_j}{\rho_j}\right) (U_i^\beta - U_j^\beta) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \\ &\quad + \frac{1}{\rho_i} \tau_i^{\alpha\beta} \epsilon_i^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, i 는 계산하고자 하는 입자이며 j 는 유효반경 내에 존재하는 입자들이다. m 은 입자의 질량, U 는 입자의 절대속도이다. 실질적으로 여러 형태의 근사식이 알려져 있으나 여기서는 가장 보편적인 식을 구현하였다.

다. SPH 기법 연계 전체 구조

ExLO 코드는 이미 Lagrangian, ALE 및 Eulerian 기법이 구현되어 있다. 새롭게 SPH 기법에 추가된 전체 구조를 Fig. 3에 나타내었다. SPH 기법은 요소간의 물질 이류가 발생하지 않고 초기 질량이 보존되므로 근본적으로 Lagrangian 기법에 속한다고 볼 수 있다. 따라서 Lagrangian 기법의 flow chart가 그대로 유지된다. 하지만 전체 코드 프레임에서 초기에 SPH 기법은 분기하도록 설계하였다.

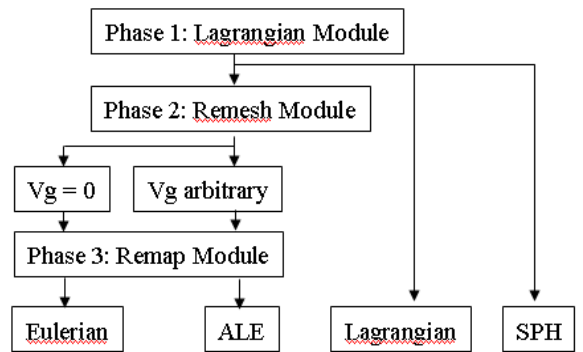


Fig. 3. Incorporation of SPH scheme onto the ExLO code for extreme large deformation applications

다양한 기법들을 통합하는 궁극적인 장점은 하나의 프레임 내부에 다양한 수치기법이 존재하여 문제의 특성에 따라 최적의 기법이 선택적으로 사용가능하다는 것이다.

3. 계산 예제

가. Taylor-Impact Test : 2-Dim Planar

벤치마크 문제인 Taylor-Impact test를 SPH 기법을 사용하여 계산하였다. 직각 좌표계를 사용하므로 우선적으로 2차원 plain symmetry 조건으로 수행하였다.

Armco iron 실린더(실체는 2차원 무한 평판)가 강체의 벽에 221m/s 속도로 충돌하는 경우이다. 재료는 elastic-perfectly plastic으로 기술하고 Mie-Grunisen EOS를 적용하였다(Table 1). 충돌방향 길이에는 67개 그리고 지름 방향으로는 20개의 입자를 사용하였다. 강체 벽을 묘사하기 위해 충돌 면에 3개 층의 ghost particles를 추가로 설정하는 방법이 적용되었다. 이 입자들은 같은 질량 및 에너지를 가지나 단지 속도가 반대방향인 입자들로 묘사한다⁹⁾. 추가된 입자들로 인한 계산 시간이 증가되는 단점이 있다.

Table 1. Material properties for the Armco iron

ρ (kg/m ³)	C (m/s)	S	G (GPa)	Γ
7850	3630	1.8	80	1.81

* linear shock velocity; $u_s = C + Su_p$

* Γ , Grunisen constant

아래에 결과를 제시하였다. Fig. 4에 새롭게 계산한 결과를 참고문헌과¹⁰⁾ 비교하여 도시하였다. 시간대별로 충돌체의 변형 형상 및 입자의 모양 결과가 두 결과 간에 매우 유사하여 수치기법이 만족스럽게 적용되었음을 확인 가능하다. 본 예제는 평면 대칭결과이므로 실질적인 실험자료가 존재하지 않으나 축대칭결과보다 변형이 더욱 심하게 나타나므로 기법 검증에는 좋은 예제이다.

나. Taylor-Impact Test: 3-Dim

여기서는 3차원 실린더를 모델링하여 실험¹¹⁾과 비교하여 정확도를 검증해 보았다. 초기 길이와 반지름이

모두 30.0mm와 5.0mm인 실린더가 초기속도 221m/s로 강체 벽에 충돌하는 계산을 수행하였다. 재료는 앞 예제와 동일한 Iron 이다.

Fig. 5에 초기 입자요소를 도시하였다. 길이방향으로 30개를 사용하여 전체 1830개의 입자를 사용하였다. 최종 변형모양을 Fig. 6에 실험과 비교하여 제시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 예측된 최종변형 형태가 실험 결과와 거의 일치함을 알 수 있어 3차원 계산이 가능함을 잘 보여준다.

최종 변형 후의 실린더 길이 및 충돌면에서의 변형된 지름의 크기를 Table 2에 비교하여 나타내었다. 실험결과와의 미세한 차이는 실험에 사용된 재료를 표현하는 구성방정식에서의 오차로 판단된다. 상대적으로 적은 입자를 사용하였지만 좋은 결과가 얻어졌다고 판단된다.

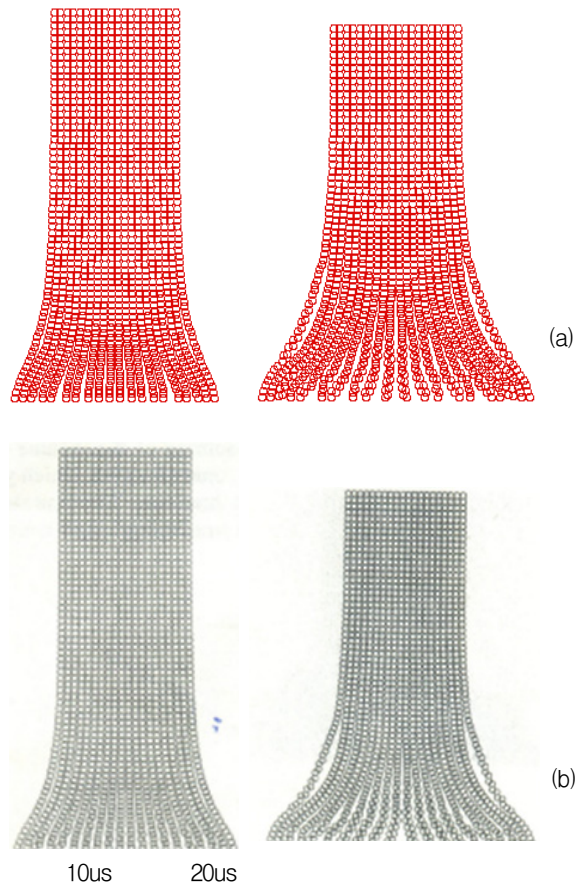


Fig. 4. Comparison of particle distributions obtained using current code(a) and from reference(b)

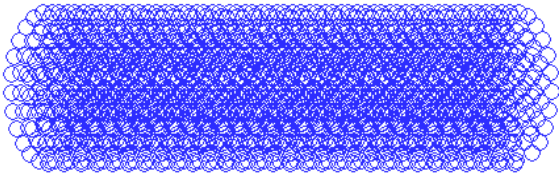


Fig. 5. Particle distributions

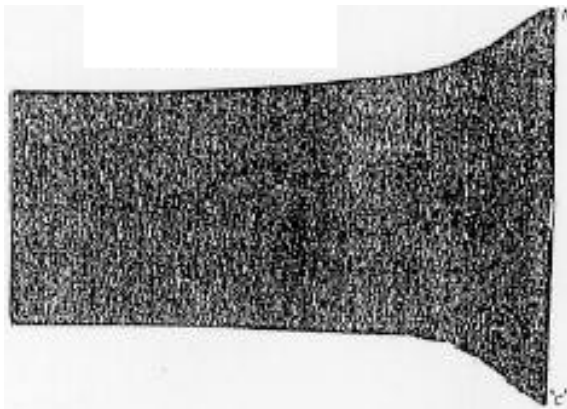
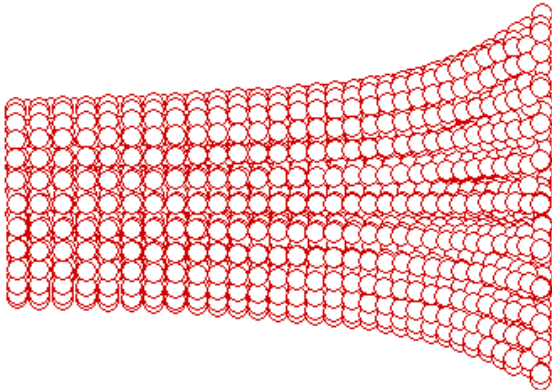


Fig. 6. Comparison of final deformations obtained from current code and experimental data^[11]

Table 2. Comparisons of final length and deformed diameter at impact surface

	Experiment ^[11]	SPH
Length (mm)	23.13 to 23.59	22.75
Deformed Diameter (mm)	16.70 to 17.04	16.12

4. 요약

직각좌표계를 사용한 Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) 수치기법 개발에 대해 기술하였다. 새로 개발한 SPH 기법을 기존에 개발되어 있는 ExLO 코드 프레임에 연결하여 하나의 코드 프레임 안에서 문제의 특성에 따른 Lagrangian, ALE, Eulerian 및 SPH 수치기법의 최적 선택이 가능하도록 한 것에 의미가 있다.

먼저 SPH 기초적인 수치기법을 기술하였으며 Taylor-Impact test 예제를 계산하여 기존의 다른 수치코드 결과 및 문헌에 제시된 실험과 비교하여 좋은 결과를 얻었다.

3차원 직각좌표계로 개발하였으며 현재 2차원 확대칭코드를 구현중이다. 또한 초극한 대변형 해석을 위해 다중 물질 접촉기법(contact)을 개발 중이다. 이러한 기법들이 구현되면 실질적인 다양한 범위의 문제에 적용이 가능할 것이다.

후 기

이 논문은 생존성특화연구센터의 지원과 2010년도 정부재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 연구되었음(NRF-2010-013-D00002)

References

- [1] Isbell, W. M., and Tedeschi, M. J., "Hypervelocity Research and the Growing Problem of Space Debris", International Journal of Impact Engineering, Vol. 14, pp. 359~372, 1993.
- [2] Libersky, L. D., Petscheck, A. G., Carney, T. C., Hipp, J. R. and Allahddi, F. A., "High Strain Lagrangian Hydrodynamics-a Three-Dimensional SPH Code for Dynamic Material Response", Journal of Computational Physics, Vol. 109, pp. 67~75, 1993.
- [3] Johnson, G. R., Petersen, E. H. and Stryk, R. A., "Incorporation of an SPH option into the EPIC Code for a Wide Range of High Velocity Impact Computations", International Journal of Impact Engineering, Vol. 14, pp. 385~394, 1993.
- [4] Lee, M., Chung, W. J., Kim, H. J., and Kim, H.

- W., "ExLO : A Three-Dimensional Total Shock Physics Code", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 23, pp. 1636~1641, 2009.
- [5] 서송원, A Study on Elasto-Plastic Contact Algorithm in SPH using Reproducing Condition and Penalty Method, 박사학위 논문, 연세대학교, 2003.
- [6] Petschk, A. G. and Libersky, L. D., "Cylindrical Smoothed Particle Hydrodynamics", *J. of Computational Mechanics*, Vol. 109, pp. 76~83, 1993.
- [7] Lucy, L. B., "Numerical Approach to Testing the Fission Hypothesis", *Astronomical Journal*, Vol. 82, pp. 1013~1024, 1997.
- [8] Monaghan, J. J., "Why Particle Methods Work", *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 3, pp. 422~433, 1982.
- [9] Randles, P. E. and Libersky, L. D., "Smooth Particle Hydrodynamics Some Recent Improvements and Applications", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 375~408, 1996.
- [10] Liu, G. R. and Liu, M. B., *Smooth Particle Hydrodynamics; a Meshless Particle Method*, World Scientific, New Jersey, pp. 324~329, 2003.
- [11] Hayhurst, C. J., Clegg, R. A., Livingstone, I. H. and Francis, N. J., "The Application of SPH Technology in AUTODYN-2D to Ballistic Impact Problems", *16th Int. Symposium on Ballistics*, San Francisco, 23~28 September, 2006, Vol. 3, pp. 409~417, 1996.