

## Synchronization of a Complex Dynamical Network with Free Coupling Matrix

이 태 희\* · 박 주 현<sup>†</sup> · 권 오 민\*\* · 이 상 문\*\*\*  
 (Tae Hee Lee · Ju H. Park · Oh-Min Kwon · Sang-Moon Lee)

**Abstract** - This paper considers synchronization problem of a complex dynamical network. For the problem, the virtual target node is chosen as one of nodes in the complex network and only one connection is needed between an isolate target node and virtual target node not any more connections. Moreover, our synchronization scheme does not need additional conditions and information of coupling matrix comparing with existing works. Based on Lyapunov stability theory, a design criterion for a novel adaptive feedback controller for the synchronization between the isolate target node and another nodes of the complex network is proposed. Finally, the proposed method is applied to a numerical example in order to show the effectiveness of our results.

**Key Words** : Complex network, Synchronization, Free coupling matrix, Adaptive control method

### 1. 서 론

먹이 사슬, 전력망, 월드 와이드 웹, 신경망, 통신망 등의 자연적, 물리적 현상들을 표현하는데 있어 탁월한 복잡계망은 오늘날에 비선형 동특성을 연구하는 과학자들의 관심을 집중시키는 연구 분야로서 자리 매김 하고 있다[1-3]. 복잡계망이란 여러 개의 시스템이 독립적으로 존재하지 않고 서로가 서로에게 영향을 주며 그물망처럼 얽혀 있는 하나의 큰 시스템을 말한다. 이러한 복잡계망은 small-world network, scale-free network 등과 같이 커플링 행렬의 구조를 정의함에 따라 여러 가지 종류의 모델로 표현된다. 하지만 지금까지 잘 알려진 바와 같이 이러한 모델들은 몇 가지 기본적인 커플링 행렬의 제약이 따른다. 예를들어 커플링 행렬이 대칭행렬[4] 이거나, 한 행의 각항들의 합이 0이거나 [5], 행렬을 대각화 할 수 있는 [6] 등의 제약들이 있다. 이러한 제약들은 복잡계망의 수학적 분석을 용이 하게 하며, 제어적인 문제의 처리를 쉽게 할 수 있는 장점이 있다. 하지만 월드 와이드 웹이나 신경망과 같은 대부분의 실제적인 복잡계망의 구조는 이러한 제약들을 만족하지 않는다. 반면에 커플링 행렬의 제약이 존재하지 않는 복잡계망에 관한 소수의 연구가 존재하는데 [7], 이 커플링 행렬을 따로 프리 커플링 행렬이라 일컫는다.

복잡계망에 대한 다양한 연구 분야 중에서도 동기화에 관

한 연구는 매우 관심 있는 연구 주제이다 [4-9]. 이 복잡계망의 동기화에 관한 연구는 크게 두 가지 관점으로 분류되는데 하나는 내부 동기화 [4-5],[7]이고 다른 하나는 외부 동기화[8-9] 이다. 먼저 내부 동기화란 하나의 복잡계망에서 시스템을 구성하는 각각의 노드들의 응답이 하나의 목표노드의 응답을 따라가는 것을 말한다. 다음으로 외부 동기화란 둘 이상의 복잡계망들이 서로 같은 응답을 보이는 것을 말한다. 본 논문에서는 복잡계망의 내부 동기화에 대한 연구를 진행 할 것이다.

앞서 정리했듯이, 복잡계망의 내부 동기화에 관한 연구는 각각의 노드들의 응답을 목표노드의 응답과 같아지게 만드는 것이 주된 목적이다. 선행된 많은 연구[4-7]에서는 복잡계망 외부에 새로운 독립된 목표 노드를 하나 구성하여 이 새로운 노드와 복잡계망을 구성하고 있는 각각의 노드와의 일대일 연결을 통하여 복잡계망을 구성하고 있는 각각의 모든 노드들이 새로운 목표 노드의 응답을 따라가는 내부 동기화에 관해 다루고 있다. 하지만 이는 목표 노드와 이미 존재하는 복잡계망의 각각의 노드들과의 일대일 연결이 수행되어 져야 하는 단점이 있다. 만약 다루어야 할 복잡계망이  $N$ 개의 노드들로 구성되어져 있다면, 위의 방식은 목표 노드와 복잡계망을 구성하는 각각의 노드들과  $N$ 개의 일대일 연결을 새롭게 구성해 주어야 동기화가 가능하다. 이는 실제적인 측면에서 볼 때 매우 어렵고 비효율적이다.

앞서 언급된 내용들을 계기로 하여, 본 논문에서는 커플링 행렬의 제약이 없는 복잡계망의 내부 동기화에 관한 연구를 진행 할 것 이다. 또한 독립된 목표 노드와 복잡계망을 구성하고 있는  $N$ 개의 노드들과의  $N$ 개의 새로운 일대일 연결을 구성하지 않고, 복잡계망을 구성하고 있는 노드들 중의 한 노드를 가상의 목표노드로 설정하고, 새로운 연결 없이 기존의 복잡계망을 구성하고 있는 노드들 간의 연결을 이용하여 가상의 노드와 다른 노드들간의 동기화를 수행한

---

\* 정 회 원 : 영남대 공대 전기공학과 박사과정  
<sup>†</sup> 교신저자, 정회원 : 영남대학교 전기공학과 교수  
 E-mail : jessie@ynu.ac.kr  
 \*\* 정 회 원 : 충북대학교 전기공학과 조교수  
 \*\*\* 정 회 원 : 대구대학교 전자공학부 조교수  
 접수일자 : 2011년 5월 16일  
 최종완료 : 2011년 7월 26일

후, 독립된 목표 노드와 가상의 목표 노드간의 한 개의 새로운 일대일 연결 만을 통하여 기존의 연구 결과와 같은 결과를 나타내는 제어기를 설계하는 연구를 수행 할 것이다. 이를 위하여, 가상의 목표 노드와 복잡계망을 구성하는 각각의 노드들 사이에는 적응이득을 가지는 피드백 제어기 설계 할 것이며, 독립된 목표 노드와 가상의 목표 노드사이의 동기화에는  $H_\infty$  제어기법 [10]이 사용되어 질 것이다.  $H_\infty$  제어기법을 사용하여 설계된 제어기의 조건은 선형행렬부등식(LMI) 향으로 유도되어 진다. 선형행렬부등식을 이용한 접근법은 주어진 문제의 해결에 있어 수학적인 이점과 명료성 때문에 매우 각광받고 있는 기법이다. 이 선형행렬부등식 항은 다양한 블록최적화 알고리즘에 의해서 쉽게 해를 찾을 수 있다 [11].

## 2. 문제 제시

다음과 같은 서로 같은  $N$ 개의 노드로 구성된 복잡계망을 고려하자.

$$\dot{x}_i = f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} x_j(t) + u_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

여기서  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$  는  $i$ 번째 노드의 상태 벡터이며,  $f: R^n \rightarrow R^n$  는 비선형 함수,  $u_i(t)$ 는  $i$ 번째 제어 입력,  $C = (c_{ij})_{N \times N}$ 는 커플링 행렬로써 만약  $i$ 번째 노드가  $j$ 번째 노드에 의해 영향을 받는다면  $c_{ij}$ 는 0이 아니고, 영향을 받지 않는다면 0으로 표현되는 행렬이다.

동기화를 달성하기 위하여, 다음과 같이 오차벡터를 정의 하자.

$$e_1(t) = s(t) - x_1(t) \quad (2)$$

$$e_i(t) = x_1(t) - x_i(t) \quad i = 2, \dots, N \quad (3)$$

여기서 복잡계망 내부의 노드 중 첫 번째 노드  $x_1(t)$ 를 가상의 목표 노드로 설정하였고,  $s(t)$ 는 다음의 식으로 구성된 최종적으로 동기화 시킬 독립된 목표 노드이다.

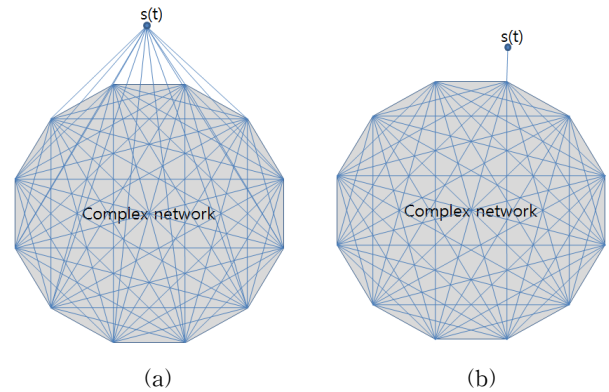
$$\dot{s}(t) = f(s(t))$$

**정의 1.** 만약 모든 복잡계망을 구성하는 모든  $0 < i < N$  번째 노드에 대해서  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|s(t) - x_i(t)\| = 0$ 이 될 때, 그 복잡계망은 점근적으로 내부 동기화가 이루어 졌다고 한다.

**참조 1.** 대부분의 선행 연구[4-7]에서는 오차벡터를  $e_i(t) = s(t) - x_i(t)$ 로 정의 하여 각각의 노드들과 독립된 목표 노드사이에  $N$ 개의 일대일 연결을 새롭게 구성해 주어야 했다. 하지만 본 논문에서는 오차벡터를 (2), (3)식과 같이 정의 하여 기존에 구성되어 있는 복잡계망의 연결을 이용하여 내부 동기화를 달성하는 연구를 제안한다.

그림 1의 (a)는 많은 선행 연구들에서 다루어진 독립된 목표 노드  $s(t)$ 와 복잡계망의 각 노드들 간의  $N$ 개의 일대일 연결을 통한 동기화 구조이며, (b)는 본 논문에서 제안하는 복잡계망의 동기화를 위한 기본 구조이다.

**참조 2.** 본 논문에서는 대칭행렬,  $c_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}$  등과 같은 커플링 행렬의 제약을 설정하지 않으므로 어떠한 커플링 행렬도 사용이 가능하다.



**그림 1** (a) 기존의 (b) 본 논문의 복잡계망의 동기화를 위한 기본 구조

**Fig. 1** The framework for synchronization of a complex network (a) in previous work (b) in this paper

**정의 2.** ( $H_\infty$  동기화[12]) 만약 오차함수가 다음의 조건

$$\int_0^\infty e^T(t) Q e(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty d^T(t) d(t) dt \quad (4)$$

을 만족한다면 오차 시스템 (2)는  $H_\infty$  동기화 되었다고 한다. 여기서  $Q$ 는 양의 대칭 행렬이며,  $d(t)$ 는 외란함수, 상수  $\gamma > 0$ 는  $H_\infty$  노름 경계 또는 외란감쇠 상수이다.

**참조 3.**  $H_\infty$  노름은 다음과 같이 정의 된다.

$$\|T_{ed}\|_\infty = \frac{\sqrt{\int_0^\infty e^T(t) Q e(t) dt}}{\sqrt{\int_0^\infty d^T(t) d(t) dt}}$$

여기서  $T_{ed}$ 는  $d(t)$ 에서  $e(t)$ 로의 전달함수이다. 따라서 식 (4)의 부등식은  $\|T_{ed}\|_\infty < \gamma$ 과 같음을 알 수 있다.

**보조정리 1.** (Shur complement [11]) 다음을 조건  $\Sigma_1 = \Sigma_1^T$ ,  $0 < \Sigma_2 = \Sigma_2^T$ 을 만족하는 주어진 행렬  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 가 있다면, 다음의 두 식은 동치이다.

1.  $\Sigma_1 + \Sigma_3^T \Sigma_2^{-1} \Sigma_3 < 0$
2.  $\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_3^T \\ \Sigma_3 - \Sigma_2 \end{bmatrix} < 0$  or  $\begin{bmatrix} -\Sigma_2 & \Sigma_3 \\ \Sigma_3^T & \Sigma_1 \end{bmatrix} < 0$

**가정 1.** 본 논문에서 다룰 복잡계망(1)의 벡터함수  $f(\cdot)$ 는 다음의 Lipschitz 조건을 만족한다.

$$\|f(a) - f(b)\| \leq l \|a - b\|$$

여기서  $l$ 은 양의 상수 이다. 본 논문에서 사용되는 Lipschitz 상수는 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} \|f(s(t)) - f(x_1(t))\| &\leq l_1 \|s(t) - x_1(t)\| \\ \|f(x_1(t)) - f(x_i(t))\| &\leq l_i \|x_1(t) - x_i(t)\| \quad i=2, \dots, N \end{aligned}$$

오차 시스템(3)의 동특성식은 다음과 같다.

$$\dot{e}_i = f(x_1) - f(x_i) + \sum_{j=1}^N (c_{1j} - c_{ij})x_j - u_i + u_1 \quad i=2, \dots, N \quad (5)$$

식 (5)는 가정 1에 의해, 다음의 식으로 표현 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \vdots \\ \dot{e}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \vdots \\ \bar{f}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} - c_{21} & c_{12} - c_{22} & \dots & c_{1N} - c_{2N} \\ c_{11} - c_{31} & c_{12} - c_{32} & \dots & c_{1N} - c_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{11} - c_{N1} & c_{12} - c_{N2} & \dots & c_{1N} - c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서  $\bar{f}_i = f(x_1) - f(x_i)$  이다.

식(6)은 오차의 정의에 의해 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \vdots \\ \dot{e}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \vdots \\ \bar{f}_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{12} - c_{22} & c_{13} - c_{23} & \dots & c_{1N} - c_{2N} \\ c_{12} - c_{32} & c_{13} - c_{33} & \dots & c_{1N} - c_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{12} - c_{N2} & c_{13} - c_{N3} & \dots & c_{1N} - c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{a}_2 x_1 \\ \bar{a}_3 x_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_N x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서  $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^N (c_{1j} - c_{ij})$  이다.

또한 오차 시스템 (2)의 동특성식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= f(s) - f(x_1) - \sum_{j=1}^N c_{1j}x_j - u_1 \\ &= \bar{f}_1 - \sum_{j=1}^N c_{1j}x_j - u_1 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $\bar{f}_1 = f(s) - f(x_1)$  이다.

### 3. 본 론

본 논문에서는 프리 커플링 행렬을 가지는 복잡계망의 내부 동기화를 위한 제어기 설계 문제에 대하여 다룰 것이다. 이론은 두 부분으로 나뉘는데, 독립된 목표 노드  $s(t)$ 와 가상의 목표 노드  $x_1(t)$  사이의 동기화를 위한 제어기의 설계와 복잡계망 내부의 가상의 목표 노드  $x_1(t)$ 와 다른 노드들 간의 동기화를 위한 제어기의 설계이다.

**정리 1.** 만약 다음의 조건

$$\begin{bmatrix} 2l_1P - H - H^T & P & Q \\ P & -\epsilon I & 0 \\ \star & 0 & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

(여기서  $\epsilon$ 은 양의 상수, 행렬  $I$ 는  $n$ 차 단위행렬, 행렬  $P, Q$ 는 양행렬,  $H = PK$  이다.)을 만족하는 오차시스템 (8)을 위한 제어기  $u_1(t) = Ke_1(t)$ 이 존재하고, 오차시스템 (7)을 위한 제어기와 적응칙을 다음과 같이 설계 할 때

$$u_i(t) = k_i(t)e_i(t) + a_i(t)x_1(t) \quad (10)$$

$$\dot{k}_i(t) = \|e_i(t)\|^2, \quad \dot{a}_i(t) = e^T(t)x_1(t) \quad i=2, \dots, N \quad (11)$$

복잡계망(1)의 모든 노드들은 독립된 목표 노드인  $s(t)$ 로 동기화 된다.

**증명.** 먼저 독립된 목표 노드와 가상의 목표 노드 사이의 오차의 동특성식 (8)에 이론 1에서 제안한 제어입력  $u_1(t)$ 을 인가하면,

$$\dot{e}_1 = \bar{f}_1 - Ke_1 - \sum_{j=1}^N c_{1j}x_j \quad (12)$$

를 얻게 된다. 여기서 본 논문의 첫 번째 목적은 독립된 목표 노드의 상태  $s(t)$ 와 가상의 목표노드의 상태  $x_1(t)$  간의 동기화를 달성하는 제어기를 설계하는 것 이다. 따라서 복잡계망의 다른 노드들의 커플링 항을 외란입력으로 생각하고 이 외란 입력에 강인한 제어기를 설계하면 위의 오차식 (12)에 관한 동기화를 달성 할 수 있다.

식(12)의 커플링항을 외란입력  $d(t)$ 로 표현하면, 다음과 같이 다시 표현 할 수 있다.

$$\dot{e}_1 = \bar{f}_1 - Ke_1 - d(t) \quad (13)$$

다음으로, 이론 1에서 나타난 제어기 (10)을 다른 오차 동특성식 (7)에 인가하면,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \vdots \\ \dot{e}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \vdots \\ \bar{f}_N \end{bmatrix} - \bar{K} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{12} - c_{22} & c_{13} - c_{23} & \dots & c_{1N} - c_{2N} \\ c_{12} - c_{32} & c_{13} - c_{33} & \dots & c_{1N} - c_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{12} - c_{N2} & c_{13} - c_{N3} & \dots & c_{1N} - c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\bar{a}_2 - a_2)x_1 \\ (\bar{a}_3 - a_3)x_1 \\ \vdots \\ (\bar{a}_N - a_N)x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ke_1 \\ Ke_1 \\ \vdots \\ Ke_1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

를 얻을 수 있다. 여기서  $\bar{K} = \text{diag}\{k_2, \dots, k_N\}$  이다.

이제 다음의 리아푸노프 함수를 고려하자.

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ V_1 &= e_1^T P e_1 \end{aligned} \quad (15)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N e_i^T e_i + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N (k_i - \bar{k}_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N (\bar{a}_i - a_i)^2 \quad (16)$$

여기서  $\bar{k}_i$ 는 가상의 상수이고 후에 정의될 것이다.

먼저 리아푸노프 함수 (15)를 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e^T P \dot{e} + e^T P \dot{e} \\ &= 2\bar{f}_1^T P e_1 + e_1^T (-K^T P - PK)e_1 - 2e^T P d \\ &\leq e_1^T (2l_1 P - K^T P - PK)e_1 - 2e^T P d \\ &\leq e_1^T X e_1 + \epsilon^{-1} e^T P P e + \epsilon d^T d \\ &= e_1^T (X + \epsilon^{-1} P P + Q)e_1 - e_1^T Q e_1 + \epsilon d^T d \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $X = 2l_1 P - K^T P - PK$  이다.

다음으로 리아푸노프 함수 (16)을 미분하게 되면,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= f \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{k}_2 - (c_{12} - c_{22}) & -(c_{13} - c_{23}) & \dots \\ -(c_{12} - c_{32}) & \bar{k}_3 - (c_{13} - c_{33}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -(c_{12} - c_{N2}) & -(c_{13} - c_{N3}) & \dots \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} (c_{1N} - c_{2N}) \\ (c_{1N} - c_{3N}) \\ \vdots \\ (c_{1N} - c_{NN}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}^T K_D \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

을 얻게 된다. 여기서  $f = \text{diag}\{\overline{f_2}, \overline{f_3}, \dots, \overline{f_N}\}^T$  이고,  $K_D = \text{diag}\{K, \dots, K\}$ 이다. 식 (18)에 가정 1을 적용하면 다음의 상계를 얻을 수 있다.

$$\dot{V}_2 \leq \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} l_2 - \overline{k_2} - (c_{12} - c_{22}) & -(c_{13} - c_{23}) & \dots \\ -(c_{12} - c_{32}) & l_3 - \overline{k_3} - (c_{13} - c_{33}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -(c_{12} - c_{N2}) & -(c_{13} - c_{N3}) & \dots \\ -(c_{1N} - c_{2N}) \\ -(c_{1N} - c_{3N}) \\ \vdots \\ l_N - \overline{k_N} - (c_{1N} - c_{NN}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}^T K_D \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

따라서 전체 리아푸노프 함수는

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \\ &\leq e^T(t) \begin{bmatrix} X + \epsilon^{-1}PP + Q & K \\ 0 & l_2 - \overline{k_2} - (c_{12} - c_{22}) \\ 0 & -(c_{12} - c_{32}) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & -(c_{12} - c_{N2}) \\ K & \dots & K \\ -(c_{13} - c_{23}) & \dots & -(c_{1N} - c_{2N}) \\ l_3 - \overline{k_3} - (c_{13} - c_{33}) & \dots & -(c_{1N} - c_{3N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -(c_{13} - c_{N3}) & \dots & l_N - \overline{k_N} - (c_{1N} - c_{NN}) \end{bmatrix} e(t) \\ &= -e^T(t)De(t) - e_1^T(t)Qe_1(t) + \gamma^2 d^T(t)d(t) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서  $e^T(t) = (e_1(t), \dots, e_N(t))^T$ 이고 행렬  $D$ 는

$$D = \begin{bmatrix} X + \epsilon^{-1}PP + Q & \frac{1}{2}K \\ \frac{1}{2}K & l_2 - \overline{k_2} - (c_{12} - c_{22}) \\ \frac{1}{2}K & -\frac{1}{2}((c_{13} - c_{23}) + (c_{12} - c_{32})) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}K & -\frac{1}{2}((c_{1N} - c_{2N}) + (c_{12} - c_{N2})) \\ \frac{1}{2}K & \dots \\ -\frac{1}{2}((c_{13} - c_{23}) + (c_{12} - c_{32})) & \dots \\ l_3 - \overline{k_3} - (c_{13} - c_{33}) & \dots \\ \vdots & \ddots \\ -\frac{1}{2}((c_{1N} - c_{3N}) + (c_{13} - c_{N3})) & \dots \\ \frac{1}{2}K & \dots \\ -\frac{1}{2}((c_{1N} - c_{2N}) + (c_{12} - c_{N2})) & \dots \\ -\frac{1}{2}((c_{1N} - c_{3N}) + (c_{13} - c_{N3})) & \dots \\ \vdots & \dots \\ l_N - \overline{k_N} - (c_{1N} - c_{NN}) & \dots \end{bmatrix}$$

이다.

$\epsilon = \gamma^2$ 으로 두고, 만약 식(19)의 행렬  $D$ 가 양행렬이 되는 상수  $\overline{k_i} (i=2, \dots, N)$ 가 존재한다면, 식 (20)로 부터

$$\dot{V}(e(t)) < -e_1^T(t)Qe_1(t) + \gamma^2 d^T(t)d(t) \quad (21)$$

의 식을 얻게 된다. 여기서, 행렬  $D$ 가 양행렬이 되기 위해서는 먼저 다음의 부등식

$$X + \gamma^{-2}PP + Q < 0$$

을 만족해야만 한다.

식(21)을 적분하면

$$\begin{aligned} V(e(\infty)) - V(e(0)) &< -\int_0^\infty e_1^T(t)Qe_1(t)dt + \gamma^2 \int_0^\infty d^T(t)d(t)dt \end{aligned}$$

를 얻게 된다. 여기서  $V(\infty) > 0$ ,  $V(0) = 0$ 이므로, 정의 2의 식(4)를 만족하게 되고 본 오차 시스템은  $H_\infty$  동기화가 이루어짐을 알 수 있다.

**참조 4.** 상수  $\overline{k_i} (i=2, \dots, N)$ 은 제어기에는 사용되지 않고 리아푸노프 함수내에서만 존재하는 가상의 수이다. 따라서 우리는 행렬  $D$ 를 양행렬로 만드는  $\overline{k_i}$ 를 아무런 제약없이 어떠한 수든지 선택 할 수 있다.

**참조 5.** 정리1에서 제안한 선형행렬 부등식(9)를 만족하는 행렬  $P$ 와  $H$ 는 매트랩의 LMI Toolbox[11]를 이용하여 쉽게 구해질 수 있다. 이를 바탕으로 제어기  $u_1(t)$ 의 제어이득  $K$ 는  $K = P^{-1}H$ 로 구해진다.

### 4. 수치예제

다음의 3차원 혼돈 로렌츠 시스템으로 이루어진 10개의 노드를 가진 복잡계망을 고려하자.

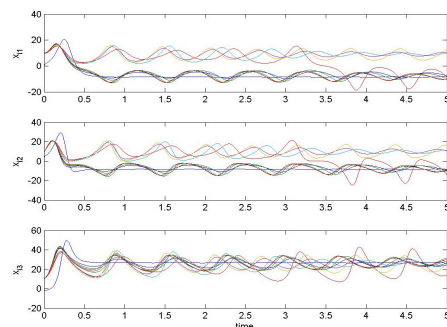
$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij}x_j(t) + u_i(t) \quad i = 1, \dots, 10 \quad (22)$$

$$f(x_i(t)) = \begin{bmatrix} a(x_{i2}(t) - x_{i1}(t)) \\ cx_{i1}(t) - x_{i2}(t) - x_{i1}(t)x_{i3}(t) \\ x_{i1}(t)x_{i2}(t) - bx_{i3}(t) \end{bmatrix}$$

$$a = 10, b = 8/3, c = 28$$

의된 감쇠 상수  $\gamma = 0.035$ 로 설정하였고, 립쉬츠 상수는  $l_i = 50 (i = 1, \dots, 10)$ , 각 노드의 초기치는 0에서 1사이의 랜덤 함수를 사용하여 설정하였고, 프리 커플링 행렬은 다음과 같이 설정하였다.

$$C = 0.1 \times \begin{bmatrix} -9 & 3 & 1 & -1 & -3 & 2 & -4 & 0 & 4 & -5 \\ 1 & -6 & 1 & -2 & 3 & -2 & -2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -7 & -1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -9 & 1 & 1 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & -7 & -1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & -4 & 2 & -7 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & -5 & -8 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & -5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -5 & 4 & 1 & 3 & 1 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$



**그림 2** 제어 입력이 없는 복잡계망 (21)의 각 상태 궤적  
**Fig. 2** State evolution of complex network (21) without control input

먼저 이론 1의 선형행렬 부등식의 조건(9)를 만족하는 제어입력  $u_1(t)$ 의 이득  $K=P^{-1}H$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P = \text{diag}\{0.4266, 0.4266, 0.4266\},$$

$$K = \text{diag}\{409.895, 409.895, 409.895\}$$

그림 2는 제어입력을 인가하지 않았을 때의 복잡계망 (21)의 각 상태별 상태궤적을 그린 그림이다. 그림에서 보는 바와 같이 제어입력이 없는 상태에서는 각각의 노드들의 상태들이 서로 일치하지 않음을 알 수 있다. 그림 3은 본 논문에서 설계된 제어기를 인가하였을 경우, 그에 따른 오차  $e_i(t)$  ( $i=1, \dots, N$ )의 궤적을 나타낸 그림이다. 그림 3으로부터 본 논문에서 제안된 제어기가 프리 커플링 행렬을 가지는 복잡계망의 내부 동기화를 달성하였음을 알 수 있다. 또한 우리는 커플링 행렬의 어떠한 정보도 이용하지 않고 제어 입력의 변수  $a_i(t)$  ( $i=2, \dots, N$ )가 시스템의 변수  $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^N (c_{1j} - c_{ij})$ 를 추정함으로써 동기화를 달성한다. 변수의 추정 결과를 보여 주기 위하여 추정변수의 초기치를  $a_i(0) = 0$  ( $i=2, \dots, N$ )으로 설정했다. 그림 4에는 변수의 추정치가 실제 변수의 값  $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^N (c_{1j} - c_{ij})$ 으로 각각 수렴함을 보여준다.

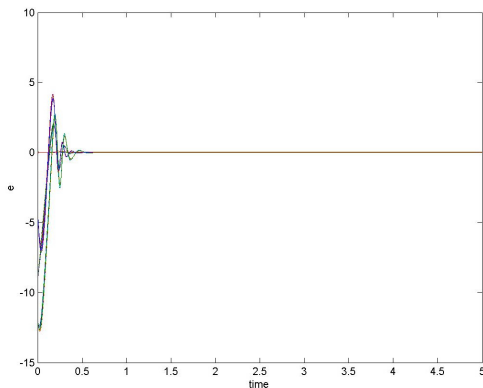


그림 3 수치 예제의 오차궤적  
Fig. 3 Error signals of example

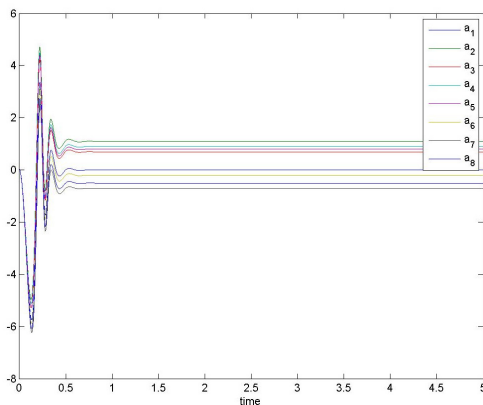


그림 4 추정된 변수  $a_i(t)$   
Fig. 4 Estimated parameters  $a_i(t)$

### 3. 결 론

본 논문에서는 프리 커플링 행렬을 가지는 복잡계망의 내부 동기화에 관한 연구를 수행하였다. 독립된 목표 노드와 복잡계망 내부의 한 개의 노드간의 하나의 일대일 연결을 통하여 전체 노드들과 독립된 목표 노드간의 동기화를 달성하였으며 제안된 제어기의 안정성을 리아푸노프 안정성 이론을 바탕으로 증명하였다. 제어기 설계에 있어  $H_\infty$  제어기법을 사용하여 안정화된 제어기의 존재 조건을 선형행렬부등식의 형태로 제시하였으며, 매틀랩의 LMI toolbox를 이용하여 제안된 선형행렬부등식의 조건을 만족하는 적절한 해를 계산하였다. 마지막으로 적절한 수치예제를 제시하여 제안된 제어기의 효용성을 도시하였다.

### 감사의 글

This work was supported by Yeungnam University. Also, this research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (2010-0009373).

### 참 고 문 헌

- [1] S.H. Strogatz, "Exploring complex networks," Nature, vol. 410, pp. 268-276, 2001.
- [2] S.N. Dorogovtsev, J.F.F. Mendes, "Evolution of networks," Advances in Physics, vol. 51, pp. 1079-1187, 2002.
- [3] M.E.J. Newman, "The structure and function of complex networks," SIAM Review, vol. 45, pp. 167-256, 2003.
- [4] J. Zhou, J.A. Lu, J. Lu, "Pinning adaptive synchronization of a general complex dynamical network," Automatica, vol. 44, pp. 996-1003, 2008.
- [5] W. Yu, G. Chen, J. Lü, "On pinning synchronization of complex dynamical networks," Automatica, vol. 45, pp. 429-435, 2009.
- [6] L. Wang, H.P. Dai, H. Dong, Y.Y. Cao, Y.X. Sun, "Adaptive synchronization of weighted complex dynamical networks through pinning," Eur. Phys. J. B, vol. 61, pp. 335-342, 2008.
- [7] L. Xiang, J.J.H. Zhu, "On pinning synchronization of general coupled networks," Nonlinear Dynamics, DOI 10.1007/s11071-010-9865-5, 2010.
- [8] D. Xu, Z. Su, "Synchronization criteria and pinning control of general complex networks with time delay," Applied Mathematics and Computation, vol. 215, pp. 1593-1608, 2009.
- [9] S. Zheng, Q. Bi, G. Cai, "Adaptive projective synchronization in complex networks with

time-varying coupling delay," Physics Letters A, vol. 373, pp. 1553-1559, 2009.

- [10] Yi-You Hou, Teh-Lu Liao, Jun-Juh Yan, "HN synchronization of chaotic systems using output feedback control design," Physisca A, vol. 379, pp. 81-89, 2007.
- [11] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory," SIAM, Philadelphia, 1994.
- [12] C.K. Ahn, " $H_\infty$  Chaos Synchronization for Nonlinear Bloch Equations," J. Korean Phys. Soc. vol. 55, pp. 2295-2300, 2009.

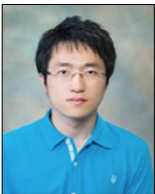


**이 상 문 (李 相 文)**

1973년 6월 15일생. 1999년 경북대학교 전자공학과 졸업(공학). 2006년 포항공과대학교 전기전자공학부 졸업(공학). 현재 대구대학교 전자공학부 전임강사.

E-mail : moony@daegu.ac.kr

저 자 소 개



**이 태 희 (李 泰 憲)**

1983년 7월 2일생. 2009년 영남대학교 전기공학과 졸업(공학), 2011년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사), 2011~현재 동 대학원 박사과정.



**박 주 현 (朴 柱 炫)**

1968년 1월 11일생. 1990년 경북대학교 전자공학과 졸업(공학). 1997년 포항공과대학교 전기전자공학부 졸업(공학). 현재 영남대학교 전기공학과 부교수

Tel : 053-810-2491  
Fax : 053-810-4767  
E-mail : jessie@ynu.ac.kr



**권 오 민 (權 五 珉)**

1974년 7월 13일생. 1997년 경북대학교 전자공학과 졸업(공학). 2004년 포항공과대학교 전기전자공학부 졸업(공학). 현재 충북대학교 전기공학과 조교수.

Tel : 043-261-2422  
Fax : 043-263-2419  
E-mail : madwind@chungbuk.ac.kr