한국통계학회논문집
2011, 18권, 4호, 433–443

DOI: 10.5351/CKSS.2011.18.4.433

이단계 보험요율의 복합 포아송 위험 모형의 파산 확률

송미정[a], 이지연[1,a]

[a]영남대학교 통계학과

요 약

잉여금의 수준에 따라 이단계의 보험요율이 적용되는 복합 포아송 위험 모형을 고려한다. 먼저 이 위험 모형에 대응되는 이단계 서비스율의 $M/G/1$ 대기행렬 모형을 설정하고, $M/G/1$ 대기행렬 모형에서 작업량이 0에 도달하기 전에 과부하가 발생하는 확률을 유도한다. 이 과부하 확률을 이용하여 위험 모형에서 잉여금이 목표값에 도달하기 전에 파산하는 확률을 구하고, 보험 청구액이 지수분포를 따르는 경우의 파산 확률을 계산한다.

주요용어: 복합 포아송 위험 모형, 파산 확률, 이단계 보험요율, $M/G/1$ 대기행렬 모형, 과부하 확률.

1. 서론

보험은 가계나 기업이 우연한 사고로 인해 겪게되는 경제적인 불안정에 대비하기 위해 보험회사에게 위험을 전가하는 사회적인 장치이다. 즉, 보험회사가 보험 가입자들로부터 통계적 기초에 의해 산출된 보험료를 받아 기금을 형성하고, 사고로 인해 경제적 손실이 발생할 때 보험금을 지급하는 것이다 (이용주, 2003). 최근 들어 주가나 금리 등에 의해 금융시장의 변동성이 증가하고 있으며, 금융시장의 자율화와 국제화라는 세계적인 추세에 따라 보험 분야의 제반환경이 급격히 변하고 있다. 이에 따라 보험회사의 자산이 증가하고 있으며, 보험회사의 체계적인 자산 운용을 위해 보험 상품의 잉여금 변화에 관한 확률과정(stochastic process)에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다 (Gerber, 1990; Gerber와 Shiu, 1998; Lin과 Willmot, 1999; Lin 등, 2003; Lin과 Pavlova, 2006; 한수희와 이의용, 2006; Oh 등, 2007; 이혜선 등, 2009; Park, 2010).

보험 확률모형에서 많이 쓰이는 복합 포아송 위험 모형(compound Poisson risk model)은 잉여금 과정(surplus process)이 보험요율(premium rate)에 의해 시간에 비례하여 증가하며, 포아송 과정(Poisson process)을 따르며 발생하는 보험 사고에 의해 보험금 청구가 일어나면 청구 금액만큼 감소한다. 보험 상품의 파산이란 잉여금 과정에서 잉여금이 0보다 작게 되는 상태를 의미한다. 보험 상품이 파산하게 되면 그 보험에 가입한 가입자는 큰 피해를 입게 되므로 보험 상품의 파산을 사전에 방지하는 것이 무엇보다 중요하기 때문에 보험 상품의 파산 확률에 대한 연구가 많이 이루어지고 있다. Gerber (1990)는 간단한 복합 포아송 위험 모형에서의 파산 확률을 구하였고, Lin과 Pavlova (2006)는 잉여금의 상태에 따라 보험요율이 변하는 위험 모형에 대해 Gerber-Shiu 할인 벌점 함수(discounted penalty function)를 유도하여 파산 확률을 구하였다. Asmussen와 Petersen (1988)는 위험 모형을 댐 모형(dam model)과 연결하여 댐 모형의 수위 과정(water level process)에서 시간을 역 방향으로 진행하면 위험 모형의 잉여금 과정에 대응할 수 있음을 이용하여 댐 모형의 정상확률(stationary distribution)로 위험 모형의 파산 확률을 유도하였다.

[1] 교신저자: (712-749) 경북 경산시 대동 214-1, 영남대학교 통계학과, 교수. E-mail: leejy@yu.ac.kr

본 논문에서는 잉여금의 수준에 따라 다른 보험요율이 적용되는 모형으로서 잉여금이 적정값을 넘으면 보험 가입자에게 배당금(dividend)을 지급하거나 또는 다른 투자처에 재투자 함으로써 결과적으로 잉여금에 대한 보험요율이 줄어드는 이단계 보험요율의 복합 포아송 위험 모형을 다루고자 한다. 일반적인 파산 확률 연구에서는 파산 확률을 구하는 데 있어 잉여금이 무한히 증가할 수 있는 경우를 생각한다. 하지만 보험 사업에서 하나의 보험 상품에 대해 무한한 잉여금을 가정하는 대신 그 상품에 대한 목표 잉여금을 설정하고, 목표 잉여금에 도달하기 전에 파산이 발생할 확률을 고려하여 보험요율을 결정할 수 있다면 재투자 등의 다양한 이익 창출이 가능할 것이다.

Song과 Lee (2010)는 복합 포아송 위험 모형의 잉여금 과정을 $M/G/1$ 대기행렬 모형(queueing model)의 작업량 과정(workload process)에 대응시켜 $M/G/1$ 대기행렬 모형에서 얻어지는 결과들을 활용하여 목표 잉여금 없이 잉여금이 무한히 증가할 수 있는 위험 모형에서 궁극적인 파산(ultimate ruin)이 일어날 확률을 유도하였다. 본 논문에서는 이를 확장하여 목표 잉여금을 설정하고 목표 잉여금에 도달하기 전에 먼저 파산이 발생할 확률을 구하고자 한다. 2장에서 목표 잉여금이 있는 이단계 보험요율의 복합 포아송 위험 모형을 소개하고, 3장에서는 복합 포아송 위험 모형의 파산 확률을 구하기 위해 대응되는 이단계 서비스율의 $M/G/1$ 대기행렬 모형을 설명하고, $M/G/1$ 대기행렬 모형에서 작업량이 0에 도달하기 전에 과부하가 발생하는 확률을 구한다. 4장에서는 3장에서 구한 $M/G/1$ 대기행렬 모형에서의 과부하 확률을 이용하여 위험 모형에서 목표 잉여금에 도달하기 전에 파산이 발생할 확률을 유도하고, 특별히 보험금 청구 금액이 지수분포를 따르는 경우의 파산 확률을 계산한다.

2. 이단계 보험요율의 복합 포아송 위험 모형

보험 상품에 대한 잉여금 과정은 회사가 정한 보험요율에 따라 가입자들이 지불하는 보험료에 의해 증가하고 보험금 청구가 발생하였을 때 회사가 지불하는 보험금만큼 감소하게 된다. 복합 포아송 위험 모형에서는 보험금 청구의 발생 횟수가 발생률 $\lambda > 0$인 포아송 과정 $\{N(t), t \geq 0\}$을 따르고, 청구되는 각각의 보험금 $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$은 평균이 m이고 서로 독립이며 동일한 일반 분포 G를 가지고, 보험금 청구의 발생 횟수와 보험금은 서로 독립인 것으로 가정한다. 총보험청구액은 보험금 청구의 발생 횟수와 보험금 청구액의 규모에 의해 결정되는 확률과정으로, 시간 t까지 발생한 총보험청구액 확률과정 $S(t)$는

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

로 나타낼 수 있다. 단, $N(t) = 0$이면 $S(t) = 0$이다.

보험요율을 결정할 때, 보험 영업을 통해 적절한 이윤을 획득하기 위해서 보험금 지급액의 기대값을 구하고 그 값에 적절한 보완 부가보험료(security loading)를 반영한다. 이단계 보험요율의 복합 포아송 위험 모형에서 보험요율은 경계값 $b > 0$를 기준으로 시간 t에서의 잉여금이 b보다 작으면 보험요율은

$$p_1 := \lambda m(1 + \theta_1)$$

로 가정한다. 여기서 $\theta_1 > 0$은 상대적인 보완 부가급(relative security loading factor)이고, θ_1에 의해 보험요율 p_1은 단위시간당 보험금 지급액인 λm보다 항상 크게 된다(만약 $\theta_1 \leq 0$로 $p_1 \leq \lambda m$이면 파산 확률은 항상 1이 된다). 시간 t에서의 잉여금이 b 이상이면, 보험회사는 고객들에게 배당금을 지불할 수 있다. 단위시간당 지불하는 배당율을 q, $0 \leq q < p_1 - \lambda m$라고 하면, 보험요율은 $p_2 := p_1 - q > \lambda m$으

로

$$p_2 := \lambda m(1+\theta_2)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 θ_2는 상대적인 보완 부가급으로 $0 < \theta_2 \le \theta_1$을 만족한다.

시간 t에서 이단계 보험요율의 복합 포아송 위험 모형의 잉여금의 상태를 $U(t)$라고 하면, 잉여금 과정 $\{U(t), t \ge 0\}$는

$$U(t) = u + \int_0^t p\,(U(s))\,ds - S\,(t)$$

로 얻어진다. 여기서 $u = U(0) \ge 0$는 초기 잉여금이고, 보험요율 $p(x)$는 잉여금의 상태 x에 따라

$$p(x) := \begin{cases} p_1, & 0 \le x < b\text{일 때}, \\ p_2, & x \ge b\text{일 때} \end{cases}$$

로 주어진다. 잉여금 과정에서 파산이 발생하는 시점은

$$T := \inf\{t > 0 \,|\, U(t) < 0\}$$

로 정의한다. $T = \infty$는 파산이 발생하지 않는 것을 의미한다.

보험 상품에 대한 목표 잉여금을 $\tau > b$라고 할 때, 이 상품의 잉여금 과정이 초기 잉여금 u에서 시작하여 목표값 τ에 도달하기 전에 파산이 발생할 확률 $\psi(u,\tau)$은

$$\psi(u,\tau) := \Pr[T < \infty, 0 < U(t) < \tau, 0 < t < T | U(0) = u]$$

으로 정의된다. 이 파산 확률은 초기 잉여금 u의 크기에 따라 달라지므로 $\psi(u,\tau)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\psi(u,\tau) := \begin{cases} \psi_1(u,\tau), & 0 \le u < b\text{일 때}, \\ \psi_2(u,\tau), & b \le u < \tau\text{일 때}. \end{cases}$$

특별히 $\tau = \infty$이면 잉여금 과정 $\{U(t), t \ge 0\}$의 잉여금이 무한히 증가할 수 있는 경우로, 이 경우에 얻어지는 파산 확률 $\psi(u,\infty)$는 Song과 Lee (2010)의 파산 확률과 같게 된다.

파산 확률 $\psi(u,\tau)$를 구하기 위해 이 위험 모형에 대응되는 이단계 서비스율의 $M/G/1$ 대기행렬 모형을 구성하고, $M/G/1$ 대기행렬 모형에서 과부하가 발생하는 확률을 이용한다.

3. 이단계 서비스율의 $M/G/1$ 대기행렬 모형

서비스 제공자가 한 명 있는 대기행렬 시스템에 서비스를 받기 위해 고객들이 서로 독립적으로 도착한다. 고객들은 도착률이 $\lambda > 0$인 포아송 과정을 따르며 도착하고 각 고객들이 가지고 오는 작업량은 평균이 m인 일반 분포 G를 따르며 FIFO(First In First Out)에 의해 서비스가 진행된다. 서비스 제공자는 초기 작업량 $w > 0$에서 서비스를 시작하며, 시간 t에서의 서비스율(service rate)는 시스템의 현재 작업량에 따라 결정된다. 즉, 시스템의 작업량이 경계값으로 주어진 상수 $d > 0$를 넘어서게 되면 서비스 제공자는 단위시간당 서비스율 p_1으로 진행하고, 작업량이 d 이하이면 서비스율 p_2로 일을 한다. 서비스율은 단위시간당 처리하는 작업량을 의미한다. 안정된(stable) 시스템을 고려하기 위해 $\lambda m < p_1$와 $\lambda m < p_2$를 가정한다. $\{W(t), t \ge 0\}$를 이 시스템의 작업량 확률과정이라고 하고, 작업량이

0에 도달하기 전에 충분히 큰 수 $z > d$를 먼저 넘어서는 과부하(overflow)가 발생하는 시간을 T^*라고 하면

$$T^* := \inf\{t > 0 | W(t) > z\}$$

가 된다. 과부하가 발생하지 않으면 $T^* = \infty$이 된다. Lee (2007)처럼 $0 \le \alpha < \beta < \infty$에 대해서 작업량 과정 $\{W(t), t \ge 0\}$가 초기 작업량 w에서 시작하여 처음으로 구간 $(\alpha, \beta]$를 벗어나는 시간을

$$T_w(\alpha, \beta) := \inf\{t \ge 0 \,|\, W(t) \notin (\alpha, \beta], W(0) = w\}, \quad \alpha \le w \le \beta$$

로 정의하면, 초기 작업량 w에서 시작한 $\{W(t), t \ge 0\}$이 0에 도달하기 전에 과부하가 발생할 확률 $\phi(w, z)$는

$$\phi(w, z) = \Pr\left[W(T_w(0, z)) > z | W(0) = w\right]$$

로 구할 수 있다. 과부하 확률 $\phi(w, z)$는 초기 작업량 w에 의해 결정되므로

$$\phi(w, z) = \begin{cases} \phi_1(w, z), & d < w \le z\text{일 때}, \\ \phi_2(w, z), & 0 < w \le d\text{일 때} \end{cases}$$

로 나타낼 수 있다.

3.1. 과부하 확률 $\phi_1(w, z)$

초기 작업량 w가 $d < w \le z$이면, 서비스 제공자는 서비스율 p_1으로 일을 시작하여 작업량이 d이하가 되면 서비스율이 p_2로 바뀌게 된다. 그러므로 작업량이 0에 도달하기 전에 z보다 크게 되는 과부하가 발생하는 사건은 초기 작업량 w에서 시작하여 작업량이 d에 도달하기 전에 z보다 크게 되는 사건과 작업량이 d에 먼저 도달하고 그 이 후에 z보다 크게 되는 사건으로 구분할 수 있다. 따라서 과부하 확률 $\phi_1(w, z)$는

$$\phi_1(w, z) = \Pr\left[W\left(T_w(d, z)\right) > z\right] + \Pr\left[W\left(T_w(d, z)\right) = d, W\left(T_d(0, z)\right) > z\right] \tag{3.1}$$

로 얻어진다. 식 (3.1)의 우변의 각 확률을 구하기 위해 작업량 확률과정 $\{W(t), t \ge 0\}$를 서비스율이 p_1인 구간의 확률과정 $\{W_1(t), t \ge 0\}$과 서비스율이 p_2인 구간의 확률과정 $\{W_2(t), t \ge 0\}$로 분할한다. 확률 $\Pr\left[W\left(T_w(d, z)\right) > z\right]$은 초기 작업량 w에서 시작한 시스템에서 작업량이 d에 도달하기 전에 과부하가 발생하는 사건의 확률로 서비스율이 p_1으로만 진행되기 때문에 확률과정 $\{W_1(t), t \ge 0\}$이 d에 도달하기 전에 과부하가 발생하는 사건과 동일하다. 그러므로 식 (A.1)으로부터

$$\begin{aligned} \Pr\left[W\left(T_w(d, z)\right) > z\right] &= \Pr\left[W_1\left(T_w(d, z)\right) > z\right] \\ &= 1 - \frac{H_1(z - w)}{H_1(z - d)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

을 얻을 수 있다. 여기서 $H_1(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \rho_1^n G_e^{*n}(x)$, $\rho_1 := \lambda m / p_1$, $G_e(x) := (1/m) \int_0^x \{1 - G(s)\} ds$는 G의 평형 분포(equilibrium distribution)이고, $*n$는 n차 적률(n-fold recursive convolution)로 $G_e^{*0}(x) := I(x \ge 0)$는 Heaviside 함수이다.

작업량이 d에 도달하기까지는 확률과정 $\{W(t), t \geq 0\}$이 확률과정 $\{W_1(t), t \geq 0\}$와 일치하고 더불어 마코프 성질(Markov property)을 만족하기 때문에 식 (3.1)의 우변의 두번째 확률은

$$\Pr\left[W_1\left(T_w(d,z)\right) = d\right] \Pr\left[W\left(T_d(0,z)\right) > z\right]$$

와 같다. 여기서 확률 $\Pr\left[W\left(T_d(0,z)\right) > z\right]$은 d에서 시작한 작업량 확률과정이 0에 도달하기 전에 먼저 d를 넘어설 때, 그 넘어서는 양 $L(d)$를 이용한다. 우선 d에서 시작한 확률과정 $\{W(t), t \geq 0\}$이 0에 도달하기 전에 d보다 커질 때까지는 확률과정 $\{W_2(t), t \geq 0\}$와 일치한다. 따라서 식 (A.2)로부터 $L(d)$의 분포함수 $F_d(l) := \Pr[L(d) \leq l]$는

$$\begin{aligned} F_d(l) &= \Pr[W_2(T_d(0,d)) \leq d + l] \\ &= 1 - \frac{\rho_2 (H_2 * J_l)(d)}{H_2(d)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

이다. 여기서 $H_2(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \rho_2^n G_e^{*n}(x)$, $\rho_2 := \lambda m / p_2$, $J_l(x) := G_e(x+l) - G_e(l)$이고 $(H_2 * J_l)(x) = \int_{0-}^{x} J_l(x-s) \mathrm{d}H_2(s)$이다. 그러므로 d에서 시작한 확률과정 $\{W(t), t \geq 0\}$이 0에 도달하기 전에 과부하가 발생할 확률은

$$\begin{aligned} \Pr\left[W\left(T_d(0,z)\right) > z\right] &= \int_0^{\infty} \Pr\left[W\left(T_d(0,z)\right) > z | L(d) = l\right] d_l F_d(l) \\ &= 1 - F_d(z-d) + \int_0^{z-d} \phi_1(d+l, z) d_l F_d(l) \end{aligned} \tag{3.4}$$

가 된다. 식 (3.2), (3.3)과 (3.4)에 의해

$$\begin{aligned} \phi_1(w,z) &= 1 - \frac{H_1(z-w)}{H_1(z-d)} + \frac{H_1(z-w)}{H_1(z-d)} \left(1 - F_d(z-d) + \int_0^{z-d} \phi_1(d+l,z) d_l F_d(l)\right) \\ &= 1 - \frac{H_1(z-w)}{H_1(z-d)} \left(F_d(0) + \int_0^{z-d} [1 - \phi_1(d+l,z)] d_l F_d(l)\right) \\ &= 1 - \frac{H_1(z-w)}{H_1(z-d)} \left(\frac{1}{H_2(d)} + \int_0^{z-d} [1 - \phi_1(d+l,z)] d_l F_d(l)\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

이 된다. 이 때,

$$\begin{aligned} F_d(0) &= \Pr\left[W_2\left(T_d(0,d)\right) \leq d\right] \\ &= \frac{H_2(0)}{H_2(d)} = \frac{1}{H_2(d)} \end{aligned}$$

이다.

정리 1. 확률과정 $\{W(t), t \geq 0\}$의 초기 작업량 w가 $d < w \leq z$인 경우, 작업량이 0에 도달하기 전에 z를 먼저 초과하는 과부하 확률은

$$\phi_1(w,z) = 1 - \frac{H_1(z-w)}{H_2(d)\left[H_1(z-d) - \int_0^{z-d} H_1(z-d-l) d_l F_d(l)\right]} \tag{3.6}$$

이다.

증명: $\Phi(w,z) := 1 - \phi_1(w,z)$로 두면 식 (3.5)는

$$\Phi(w,z) = \frac{H_1(z-w)}{H_1(z-d)}\left(\frac{1}{H_2(d)} + \int_0^{z-d} \Phi(d+l,z)d_lF_d(l)\right) \tag{3.7}$$

가 된다. 여기서 $z-d$와 d에 대한 함수 $A(z-d,d) := [1/H_2(d) + \int_0^{z-d} \Phi(d+l,z)d_lF_d(l)]/H_1(z-d)$를 이용하면, $\Phi(w,z)$는 $H_1(z-w)$와 $A(z-d,d)$의 곱으로 표현할 수 있다. 즉,

$$\Phi(w,z) = H_1(z-w)A(z-d,d) \tag{3.8}$$

이 된다. 식 (3.8)을 식 (3.7)에 대입하면

$$H_1(z-w)A(z-d,d) = \frac{H_1(z-w)}{H_1(z-d)}\left(\frac{1}{H_2(d)} + A(z-d,d)\int_0^{z-d} H_1(z-d-l)d_lF_d(l)\right)$$

을 만족하고, $A(z-d,d)$에 대해 정리하면

$$A(z-d,d) = \frac{1}{H_2(d)\left[H_1(z-d) - \int_0^{z-d} H_1(z-d-l)d_lF_d(l)\right]}$$

을 얻을 수 있다. 이 식을 식 (3.8)에 대입하면 식 (3.6)이 완성된다. □

3.2. 과부하 확률 $\phi_2(w,z)$

초기 작업량 w가 $0 < w \le d$이면, 서비스 제공자는 서비스율 p_2로 서비스를 시작하고, 시스템의 작업량이 d보다 커지면 서비스율을 p_1으로 바꿔 서비스를 제공한다. 확률과정 $\{W(t), t \ge 0\}$가 초기 작업량 w에서 시작해서 작업량이 0에 도달하기 전에 먼저 z보다 커지는 과부하가 발생하기 위해서는 w에서 시작한 확률과정이 0에 도달하기 전에 w보다 커지는 사건이 발생하고 그 때 w를 초과하는 양 $L(w)$에 따라 과부하의 발생 여부가 정해진다. 그리고 작업량이 w를 넘어서기 전까지는 확률과정 $\{W(t), t \ge 0\}$과 확률과정 $\{W_2(t), t \ge 0\}$은 일치한다. 따라서 식 (3.3)으로부터 $L(w)$의 분포함수를 구한 후, 총확률법칙을 적용하면 과부하 확률은

$$\phi_2(w,z) = 1 - F_w(z-w) + \int_{d-w}^{z-w} \phi_1(w+l,z)d_lF_w(l) + \int_0^{d-w} \phi_2(w+l,z)d_lF_w(l) \tag{3.9}$$

로 얻어진다.

정리 2. 확률과정 $\{W(t), t \ge 0\}$의 초기 작업량 w가 $0 < w \le d$인 경우, 작업량이 0에 도달하기 전에 z를 먼저 초과하는 과부하 확률은

$$\phi_2(w,z) = \int_0^{d-w} \eta(z-w-l, d-w-l, d)d_lR_w(l) + \eta(z-w, d-w, d)$$

이다. 단,

$$\eta(z-w, d-w, d) := 1 - F_w(z-w) + \int_{d-w}^{z-w} \phi_1(w+l,z)d_lF_w(l) \tag{3.10}$$

이고,

$$R_w(l) := \sum_{n=0}^{\infty} F_w^{*n}(l)$$

이다.

증명: 식 (3.6)의 $\phi_1(w,z)$는 $z-w$, $z-d$와 d에 의해 정해지므로 식 (3.10)의 우변은 $z-w$, $d-w$와 d의 함수이다. 따라서 식 (3.9)는

$$\phi_2(w,z) = \int_0^{d-w} \phi_2(w+l,z)d_lF_w(l) + \eta(z-w,d-w,d)$$

로 표현할 수 있다. 위 식으로부터 $\phi_2(w,z)$가 $z-w$, $d-w$와 d에 의해 결정되므로 초기 작업량 $0 < w \leq d$에서 시작한 작업량 과정이 0이 되기 전에 과부하가 발생할 확률을

$$\phi_2(w,z) := B(z-w,d-w,d)$$

으로 나타낼 수 있다. 따라서

$$B(z-w,d-w,d) = \int_0^{d-w} B(z-w-l,d-w-l,d)d_lF_w(l) + \eta(z-w,d-w,d)$$

를 만족한다. 이 식은 재생 방정식(renewal equation)의 한 형태로, Asmussen (2003)에 의하면 이 식의 해는

$$\begin{aligned} B(z-d+y,y,d) &= (R_w * \eta)(z-d+y,y,d) \\ &= \int_0^y \eta(z-d+y-l,y-l,d)d_lR_w(l) + \eta(z-d+y,y,d) \end{aligned}$$

와 같다. 따라서

$$\phi_2(w,z) = \int_0^{d-w} \eta(z-w-l,d-w-l,d)d_lR_w(l) + \eta(z-w,d-w,d)$$

가 된다. □

4. 목표 잉여금에 도달하기 전에 파산할 확률

목표값이 있는 이단계 보험요율의 복합 포아송 위험 모형에서 잉여금 $U(t)$가 목표 잉여금 τ에 도달하기 전에 파산이 발생할 확률 $\psi(u,\tau)$은 앞서 구한 이단계 서비스율의 $M/G/1$ 대기행렬 모형에서 작업량이 0에 도달하기 전에 과부하가 발생할 확률을 이용하여 구할 수 있다. 대기행렬 모형의 작업량 과정 $\{W(t), t \geq 0\}$에서 고객의 도착률은 위험 모형의 잉여금 과정 $\{U(t), t \geq 0\}$에서의 보험금 청구의 발생률과 연결된다. 또한 서비스 제공자의 서비스율은 보험요율에 대응되고, 각 고객들이 가지고 오는 작업량은 보험금 청구가 발생할 때 청구되는 보험금에 대응된다. 따라서 대기행렬 모형의 각 모수를 $z := \tau$, $w := \tau - u$, 그리고 $d := \tau - b$로 두면, 잉여금 과정 $U(t)$와 작업량 과정 $W(t)$ 사이에는

$$U(t) \equiv z - W(t)$$

이 성립한다. 즉, 이 모수들에서는

$$\psi(u,\tau) = \phi(w,z)$$

이 만족된다. 그러므로 초기값 $0 \le u < b$인 경우에 파산 확률은

$$\psi_1(u,\tau) = 1 - \frac{H_1(u)}{H_2(\tau-b)\left[H_1(b) - \int_0^b H_1(b-l)d_lF_{\tau-b}(l)\right]}$$

가 된다. 초기값 $b \le u < \tau$인 경우에는 파산 확률을

$$\psi_2(u,\tau) = \int_0^{u-b} \zeta(u-l, u-b-l, \tau-b)d_lR_{\tau-u}(l) + \zeta(u, u-b, \tau-b)$$

와 같이 구할 수 있고, 여기서

$$\zeta(u, u-b, \tau-b) = 1 - F_{\tau-u}(u) + \int_{u-b}^{u} \psi_1(u-l,\tau)d_lF_{\tau-u}(l)$$

이다.

4.1. 보험금 청구액이 지수분포를 따르는 경우

보험금 청구액이 평균 m인 지수분포(exponential distribution)를 따른다고 하자. 그러면 $i = 1, 2$에 대해,

$$H_i(x) = \frac{1+\theta_i - e^{-\gamma_i x}}{\theta_i}$$

가 되고, 여기서 $\gamma_i := \theta_i/\{m(1+\theta_i)\}$이다. 대응되는 작업량 확률과정 $\{W_2(t), t \ge 0\}$가 k에서 시작하여 0이 되기 전에 k를 넘어설 때 초과하는 양 $L(k)$의 분포함수는

$$F_k(l) = 1 - D(k)e^{-\frac{l}{m}}$$

이다. 단, $D(k) := (1-e^{-\gamma_2 k})/(1+\theta_2 - e^{-\gamma_2 k})$이다. 따라서 $\{U(t), t \ge 0\}$가 초기값 $0 \le u < b$에서 시작하여 목표값 τ에 도달하기 전에 파산할 확률은

$$\psi_1(u,\tau) = 1 - E_b(\tau)\left(1+\theta_1 - e^{-\gamma_1 u}\right), \quad 0 \le u < b$$

와 같이 구할 수 있다. 여기서 $E_b(\tau) := \theta_2/[(1+\theta_1)\theta_2 + (\theta_1 - \theta_2 - \theta_1 e^{-\gamma_2(\tau-b)})e^{-\gamma_1 b}]$이다.

또한 초기값 $b \le u < \tau$인 경우에는

$$R_{\tau-u}(l) = \frac{1 - D(\tau-u)e^{-\frac{l}{m}[1-D(\tau-u)]}}{1-D(\tau-u)}$$

이 되고,

$$\zeta(u, u-b, \tau-b) = D(\tau-u)\left[1 - (1+\theta_1)\left(1-e^{-\gamma_1 b}\right)E_b(\tau)\right]e^{-\frac{1}{m}(u-b)}$$

가 된다. 따라서 위의 두 식을 이용하여

$$\psi_2(u,\tau) = \zeta(u, u-b, \tau-b)\left[\frac{1}{m}\int_0^{u-b} D(\tau-u+l)e^{\frac{D(\tau-u)}{m}l}dl + 1\right], \quad b \le u < \tau$$

을 구할 수 있다.

예제 1. 목표 잉여금 τ가 ∞라고 가정하자. 그러면

$$E_b(\infty) = \frac{\theta_2}{(1+\theta_1)\theta_2 + (\theta_1-\theta_2)\,e^{-\gamma_1 b}}, \qquad D(\infty) = \frac{1}{1+\theta_2}$$

이고, 초기값 $0 \le u < b$에서

$$\psi_1(u,\infty) = 1 - \frac{\theta_2(1+\theta_1-e^{-\gamma_1 u})}{(1+\theta_1)\theta_2 + (\theta_1-\theta_2)\,e^{-\gamma_1 b}}$$

로 구할 수 있다. 그리고 초기값 $u \ge b$인 경우,

$$\begin{aligned}\zeta(u,u-b,\infty) &= D(\infty)\left[1-(1+\theta_1)\left(1-e^{-\gamma_1 b}\right)E_b(\infty)\right]e^{-\frac{1}{m}(u-b)}\\ &= \frac{\theta_1 e^{-\gamma_1 b}}{(1+\theta_1)\theta_2 + (\theta_1-\theta_2)e^{-\gamma_1 b}}e^{-\frac{1}{m}(u-b)}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\psi_2(u,\infty) &= \zeta(u,u-b,\infty)\left[\frac{1}{m}\int_0^{u-b} D(\infty)e^{\frac{D(\infty)}{m}l}dl + 1\right]\\ &= \frac{\theta_1 e^{-[\gamma_1 b+\gamma_2(u-b)]}}{(1+\theta_1)\theta_2 + (\theta_1-\theta_2)e^{-\gamma_1 b}}\end{aligned}$$

가 된다. 이것은 이단계 보험요율의 위험 모형에서 궁극적인 파산(ultimate ruin)이 일어날 확률로서 Lin과 Pavlova (2006)와 Song과 Lee (2010)에서 구한 결과와 일치한다.

부록: $M/G/1$ 대기행렬 모형

확률과정 $\{V(t), t \ge 0\}$를 한 명의 서비스 제공자가 서비스율 p로 서비스를 제공하는 $M/G/1$ 대기행렬 시스템의 작업량 과정이라고 하자. 고객들은 도착률 $\lambda > 0$인 포아송 과정을 따르며 도착하고, 고객들이 가지고 오는 작업량은 서로 독립이고 평균이 m인 동일한 일반 분포 G를 갖는 것으로 가정한다. 그러면 시스템의 교통밀도(traffic intensity, 이호우, 2006)는 $\rho := \lambda m/p$가 되며, 안정된(stable) 시스템을 고려하기 위해 $\rho < 1$로 가정한다. 임의의 $0 \le \alpha \le \beta$에 대해 확률변수 $T_v(\alpha,\beta)$를

$$T_v(\alpha,\beta) := \inf\{t \ge 0 \,|\, V(t) \notin (\alpha,\beta], V(0) = v\}, \quad 0 \le \alpha \le v \le \beta$$

로 정의하면, Bae 등 (2002)는 초기 작업량 v에서 시작하는 확률과정 $\{V(t), t \ge 0\}$가 0에 도달하기 전에 상태 β를 먼저 넘어갈 확률을

$$\Pr\left[V(T_v(0,\beta)) > \beta\right] = 1 - \frac{H(\beta-v)}{H(\beta)}, \quad 0 \le v \le \beta$$

로 구하였다. 여기서 $H(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n G_e^{*n}(x)$이고 $G_e(x) := (1/m)\int_0^x \{1 - G(s)\}ds$는 G의 평형 분포이고, $*n$는 n차 적률을 나타낸다. 위의 결과를 임의의 $0 \le \alpha \le \beta$에 대해 구간 $(\alpha, \beta]$로 일반화하면,

$$\Pr\left[V(T_v(\alpha,\beta)) > \beta\right] = 1 - \frac{H(\beta - v)}{H(\beta - \alpha)}, \quad 0 \le \alpha \le v \le \beta \tag{A.1}$$

가 된다. 또한, Bae 등 (2002)는 초기 작업량 v에서 시작한 확률과정 $\{V(t), t \ge 0\}$에 대해 0에 도달하기 전에 먼저 v를 넘어갈 때 v의 초과량에 대한 분포를

$$\Pr[V(T_v(0,v)) > v + l] = \frac{\rho(H * J_l)(v)}{H(v)}, \quad l \ge 0 \tag{A.2}$$

으로 얻었다. 여기서 $J_l(x) := G_e(x + l) - G_e(l)$이고 $(H * J_l)(x) = \int_{0-}^{x} J_l(x - s)\mathrm{d}H(s)$이다.

참고 문헌

이용주 (2003). 대재해 위험을 고려한 보험자의 파산확률모형, <경영논총>, **21**, 103–124.

이혜선, 최승경, 이의용 (2009). 보험 상품 파산 확률 근사 방법의 개선 연구, <응용통계연구>, **22**, 937–942.

이호우 (2006). <대기행렬이론: 확률과정론적 분석>, 3판, 시그마프레스, 서울.

한수희, 이의용 (2006). 브라운 운동을 이용한 보험 상품의 파산 모형 연구, <응용통계연구>, **19**, 579–585.

Asmussen, S. (2003). *Applied Probability and Queues*, 2nd ed., Springer, New York.

Asmussen, S. and Petersen, S. S. (1988). Ruin probabilities expressed in terms of storage processes, *Advances in Applied Probability,* **20**, 913–916.

Bae, J., Kim, S. and Lee, E. Y. (2002). A P_λ^M-policy for an $M/G/1$ queueing system, *Applied Mathematical Modeling,* **26**, 929–939.

Gerber, H. U. (1990). When does the surplus reach a given target?, *Insurance: Mathematics and Economics,* **9**, 115–119.

Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1998). On the time value of ruin, *North American Actuarial Journal,* **2**, 48–78.

Lee, J. (2007). First exit times for compound Poisson dams with a general release rule, *Mathematical Methods for Operations Research,* **65**, 169–178.

Lin, X. S. and Pavlova, K. P. (2006). The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy, *Insurance: Mathematics and Economics,* **38**, 57–80.

Lin, X. S. and Willmot, G. E. (1999). Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory, *Insurance: Mathematics and Economics,* **25**, 63–84.

Lin, X. S., Willmot, G. E. and Drekic, S. (2003). The classical risk model with a constant dividend barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function, *Insurance: Mathematics and Economics,* **33**, 551–566.

Oh, S. M., Jeong, M. and Lee, E. Y. (2007). A martingale approach to a ruin model with surplus following a compound Poisson process, *Journal of the Korean Statistical Society,* **36**, 229–235.

Park, H. S. (2010). Computing the ruin probability of Lévy insurance risk processes in non-Cramér models, *Communications of the Korean Statistical Society,* **17**, 483–491.

Song, M. J. and Lee, J. (2010). A compound Poisson risk model with a two-step premium rule (submitted).

2011년 2월 접수; 2011년 6월 채택

Ruin Probability in a Compound Poisson Risk Model with a Two-Step Premium Rule

Mi Jung Song[a], Jiyeon Lee[1,a]

[a]Department of Statistics, Yeungnam University

Abstract

We consider a compound Poisson risk model in which the premiums may depend on the state of the surplus process. By using the overflow probability of the workload process in the corresponding $M/G/1$ queueing model, we obtain the probability that the ruin occurs before the surplus reaches a given large value in the risk model. We also examplify the ruin probability in case of exponential claims.

Keywords: Ruin probability, compound Poisson risk model, two-step premium rule, $M/G/1$ queueing model, overflow probability.

[1] Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Yeungnam University, 214-1 Dae-Dong, Kyeongsan, Kyeongbuk 712-749, Korea. E-mail: leejy@yu.ac.kr