

비정렬격자계와 체적포착법을 사용한 표면장력이 지배적인 다상유동 수치해석

명 현 국*†

* 국민대학교 기계시스템공학부

Numerical Simulation of Surface Tension-Dominant Multiphase Flows by Using Volume-Capturing Method and Unstructured Grid System

Hyon Kook Myong*†

* School of Mechanical Engineering, Kookmin Univ.

(Received March 7, 2011 ; Revised May 1, 2011 ; Accepted May 2, 2011)

Key Words: Surface Tension(표면장력), Volume Capturing Method(체적포착법), Unstructured Grid System(비정렬격자계), Multiphase Flow(다상유동), Volume of Fluid(VOF), Numerical Simulation(수치해석), Free Surface(자유표면)

초록: 본 연구에서는 비정렬격자계와 체적포착법을 사용하여 표면장력이 지배적인 다상유동의 수치해석 방법을 제시하였다. 먼저 표면장력에 대한 CSF(Continuum Surface Force) 모델을 비정렬격자계에 적용할 수 있도록 수치해석 방법을 확립시켜 Myong(2009)이 개발한 비정렬격자계와 체적포착법을 사용한 수치해석코드에 삽입하였다. 테스트 문제로 오직 표면장력만이 존재하는 평형상태의 정적(static) 액적 및 비평형상태의 동적(dynamic) 액적 문제에 적용하여, 이 해석방법의 유용성과 정확도를 평가하였다. 연구결과, 매끄러운 곡률 계산을 위해 필요한 필터로 본 연구에서 제안한 Laplacian 필터와 함께 CSF 모델로는 밀도보정(density-scaled)한 CSF 모델이 예측성능이 우수한 것으로 나타났다. 또한 표면장력 계산을 위한 이 모델을 채용한 본 수치해석방법은 표면장력이 지배적인 다상유동인 평형상태의 정적 액적 및 비평형상태의 동적 액적 문제 모두에 대해 정확성과 유용성이 입증되었다.

Abstract: A numerical method of the CSF(Continuum Surface Force) model is presented for the calculation of the surface tension force and implemented in an in-house solution code(PowerCFD). The present method(code) employs an unstructured cell-centered method based on a conservative pressure-based finite-volume method with volume capturing method(CICSAM) in a volume of fluid(VOF) scheme for phase interface capturing. The application of the present method to a 2-D liquid drop problem is illustrated by an equilibrium and nonequilibrium oscillating drop calculation. It is found that the present method simulates efficiently and accurately surface tension-dominant multiphase flows.

1. 서론

현재 자유표면(free surface)을 갖는 복잡한 다상유동(multiphase flow) 현상들을 해석하기 위한 다양한 수치기법들이 제안되고 있다. 이중 계면포착법(interface capturing method)인 VOF(Volume Of Fluid) 방법⁽¹⁾은 셀(또는 검사체적)내에 액상 또는 기상의 체적비로 정의된 VOF 값 α 를 사용하여 상의 계면을 추적하며, 현재 대부분의 상용 CFD

코드에 도입되어 널리 사용되고 있다. 이것은 이 방법이 각 상의 체적이 잘 보존되는 장점 때문에 다상유동의 물리적인 현상을 왜곡 없이 표현할 수 있는 대표적인 방법으로 인식되기 때문이다. 이 VOF 방법은 검사체적 내 자유표면의 위치와 α 값을 직접적으로 추적하고 계산하는 체적추적법(volume tracking method)⁽¹⁻³⁾과, α 를 자유표면의 정확한 위치에 대한 정보가 필요 없는 함수형태로 표현하고 이를 이송하는 방정식을 HR도식(High Resolution differencing scheme)으로 풀어 경계면의 움직임을 포착하는 체적포착법(volume

† Corresponding Author, myong@kookmin.ac.kr

© 2011 The Korean Society of Mechanical Engineers

capturing method)⁽⁴⁻⁶⁾으로 다시 크게 구분되고 있다.

한편 VOF 방법과는 달리 계면에서 표면장력(surface tension) 효과에 대한 물리적 모델을 도입하는 방법은 아직 커다란 문제점으로 남아 있다. 현재 표면장력의 영향은 일반적으로 동등한 체적력으로 변환하는 Brackbill 등⁽⁷⁾이 제안한 CSF(Continuum Surface Force) 모델의 형태로 운동량 방정식에 삽입된다. 그런데 이 모델을 사용하기 위해서는 계면의 국부 곡률(local curvature)과 계면 수직 벡터를 정확히 계산하여야만 하나, 불연속적인 VOF 값들로 인해 통상적인 이산화 도식의 적용을 허용하지 않기 때문에, 매끄러운 곡률 계산을 위해 일반적으로 VOF 값들에 대한 다양한 형태의 필터링 과정을 거친다.^(7,8) 표면장력의 부정확한 계산은 잘 알려진 바와 같이 기생흐름(parasite current) 현상⁽⁸⁾을 초래할 수 있으며, 이것은 수치적 부정확도 라기보다는 VOF 방법의 한계이기 때문에 VOF 방법의 유용성에 대한 심각한 문제를 야기한다. 일반적으로 기생흐름 문제는 물속에서의 공기 기포 또는 공기 중의 물방울과 같이 밀도차이가 큰 다상유동을 고려할 때 발생하며, 이러한 문제에서 표면장력 효과는 종종 중요한 역할을 하기 때문에, 표준적인 표면장력에 대한 모델로는 접근하기 어렵다. 최근 기생흐름을 줄이기 위한 수치해석 방법을 시도한 많은 연구⁽⁹⁻¹²⁾가 보고되고 있으나, 이들이 사용한 수치해석방법은 대부분 정렬격자계에서 유한차분법 또는 체적포착법을 채택한 VOF 방법으로 국한되어 있다. 이것은 이들 방법들이 계면의 정확한 위치를 구할 수 있는 장점이 있기 때문이다. 그러나 이들 방법은 α 의 이류를 수치확산 없이 계산하기 위해 계산적으로 복잡한 상계면(phase interface) 재구성 과정을 거쳐야하며, 이때 사용되는 기하학적 재구성(geometric reconstruction) 도식은 비정렬격자계 및 3차원 문제인 경우 매우 복잡하게 된다. 이에 반해 체적포착법을 채택한 VOF 방법은 보다 적은 계산상의 노력으로 계면의 혼합 또는 분리와 같은 변화가 큰 문제를 해결할 수 있을 뿐만 아니라, 비정렬격자계 및 3차원 문제로의 확장도 용이한 장점을 가지고 있으나, 일반적으로 번짐(smearing)과 같은 계면의 비물리적인 변형 및 수치확산이 문제가 된다. 따라서 아직까지 체적포착법을 채택한 VOF 방법을

사용하여 표면장력이 지배적인 유동을 해석한 연구가 거의 보고되지 않고 있다.

최근 Myong and Kim⁽¹³⁾ 및 Myong^(14,15)은 다상 유동과 같이 자유표면이 존재하는 복잡한 유동현상들을 해석할 수 있는 비정렬격자계에 적합한 수치해석방법(PowerCFD 코드)을 개발하였다. 이 방법은 일반 상용 CFD 코드와 같이 비정렬 셀 중심방법을 채용하고 압력수정방법에 기반을 둔 3차원 유동해석방법^(16,17)에 체적포착법에서 크게 문제가 되는 번짐 현상과 같은 계면의 비물리적인 변형 및 수치확산 문제를 크게 개선한 것으로 알려진 HR도식인 CICSAM⁽⁵⁾(Compressive Interface Capturing Scheme for Arbitrary Meshes)을 도입하고, 또한 α 에 대한 이산화방정식을 음해법(implicit method)으로 풀고 있어 계산의 안정성도 도모할 수 있다.⁽¹³⁻¹⁵⁾

본 연구에서는 비정렬격자계와 체적포착법을 사용하여 표면장력이 지배적인 다상유동의 수치해석방법을 제안한다. 이를 위해 먼저 표면장력에 대한 CSF 모델을 비정렬격자계에 적용할 수 있도록 수치해석 방법을 확립시켜, Myong^(14,15)이 개발한 비정렬격자계와 체적포착법을 사용하는 수치해석코드(방법)에 삽입한다. 특히 매끄러운 곡률 계산을 위해 필요한 필터링에 관해 비정렬격자계에 용이하게 적용할 수 있도록 몇 가지 방법을 제안한다. 다음으로 중력과 다른 외력이 존재하지 않고 오직 표면장력에 의한 표준적인 테스트 문제인 평형상태의 정적(static) 액적 및 비평형상태의 동적(dynamic) 액적 문제에 적용한 해석 결과를 통해, 이 해석방법의 유용성과 정확도를 평가한다.

2. 수치해석방법

2.1 지배방정식

중력이 작용하지 않고 유동을 비압축성이라고 가정하면, 기상-액상 모든 영역에 적용되는 질량 보존, 운동량보존 및 VOF 값 α 에 대한 지배방정식은 다음과 같이 적분형태로 표현할 수 있다.

$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \vec{v}) dV + \int_S [\rho \vec{v} \otimes \vec{v}] \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\tau} \cdot d\vec{S} - \int_S p d\vec{S} + \int_V \vec{f}_{SV} dV \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha dV + \int_S \alpha \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3)$$

위 식에서 \vec{v} 는 속도 벡터, t 는 시간, p 는 압력, \vec{f}_{SV} 는 표면장력에 의한 단위 체적당 힘, $\vec{\tau}$ 는 점성응력 텐서를 각각 나타낸다. 그리고 국소 물성 값인 밀도 ρ 와 점성계수 μ 는 다음과 같이 계산한다.

$$\rho = \alpha\rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2 \quad (4)$$

$$\mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2 \quad (5)$$

여기서 아래첨자 1과 2는 다른 종류의 유체를 각각 나타내며, α 는 0과 1 사이의 값을 가진다.

2.2 비정렬격자계에서의 CSF 모델의 표현

식 (2)에 나타난 표면장력에 의한 단위 체적당 힘 \vec{f}_{SV} 는 표면장력계수 σ 가 일정한 경우 다음과 같이 주어진다.

$$\vec{f}_{SV} = \sigma \kappa \vec{n} \quad (6)$$

위 식에서 κ 는 경계면의 곡률, 그리고 \vec{n} 은 경계면에 수직인 벡터를 나타낸다. 본 연구에서와 같이 VOF 모델을 사용하는 경우, Blackbill 등⁽⁷⁾의 CSF 모델은 계면에 수직인 벡터를 계산하기 위해 다음과 같이 VOF 값의 매끄러운 장을 사용한다.

$$\vec{n} = \nabla \alpha \quad (7)$$

따라서 계면의 곡률은 다음과 같이 계면에 수직인 단위 벡터의 발산 향으로 표현할 수 있다.

$$\kappa = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \right) \quad (8)$$

이상의 결과를 결합시키면 표면장력에 의한 단위 체적당 힘 \vec{f}_{SV} 는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\vec{f}_{SV} = -\sigma \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \right) \nabla \alpha \quad (9)$$

식 (9)를 유한체적법을 사용하는 수치해석법에 도입하기 위해서 제어체적 중심에 위치한 격자점 P 로 다음과 같이 근사화 시킨다.

$$\begin{aligned} \vec{f}_{SV} &\approx \sigma \kappa_P (\nabla \alpha)_P \\ &= -\sigma \left[\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \right) \right]_P (\nabla \alpha)_P \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)에서 구배 $(\nabla \alpha)_P$ 는 비정렬격자계를 사용하는 수치해석방법에서 채택하고 있는 Gauss 정리로부터 다음과 같이 직접적으로 구해질 수 있으며,

$$(\nabla \alpha)_P \approx \frac{1}{V_P} \sum_{f=1}^n A_f \alpha_f \quad (11)$$

곡률 κ_P 는 유사한 방법으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \kappa_P &= -\left[\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \right) \right]_P \\ &\approx -\frac{1}{V_P} \sum_{f=1}^n A_f \cdot \left(\frac{(\nabla \alpha)_f}{|\nabla \alpha|_f} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

한편, CSF 모델은 계면을 포함한 셀 및 인접 셀들에 대해 매끄러운 곡률값을 요구하는데, 이산화된 격자계에서 VOF 값은 일반적으로 매끄러운 함수가 아니기 때문에 곡률계산을 위해서 이 값을 매끄럽게, 즉 필터링 할 필요가 있다^(7, 8). 그런데 이 필터링에 대한 대부분의 기존 연구⁽⁷⁻¹²⁾는 정렬 정규 격자계를 사용하였기 때문에 이 방법들은 비정렬격자계를 사용하는 수치해석방법에는 적용시키기 어렵다. 따라서 본 연구에서는 Lafaurie 등⁽⁸⁾이 제안한 것을 참고하여 비정렬격자계에 용이하게 적용할 수 있는 필터링 방법을 시도한다.

Lafaurie 등⁽⁸⁾은 정규 정방형 격자계에서 α 를 $\mathcal{J}(\alpha)$ 로 변환시키는 Laplacian 필터를 다음과 같이 정의하고,

$$\mathcal{J}(\alpha)_P = \alpha_P + \sum_{f=1}^n \frac{\alpha_f}{n} \quad (13)$$

필터의 적용은 매끄러운 VOF 장 $\bar{\alpha} = \mathcal{J}^{(m)}(\alpha)$ 이 얻어지도록 m 차례 반복되며, 필터링 수에 대한 추천값으로 $m = 2$ 를 제안하였다. 그러나 이 방법은 일반적으로 각 제어체적의 경계면 면적이 제각기 다른 비정렬격자계에 대해서는 그대로 적용할 수 없기 때문에, 본 연구에서는 Laplacian 필터 \mathcal{J} 를 다음과 같이 두 가지 경우로 정의한다.

$$\mathcal{J}(\alpha)_P = \alpha_P + \sum_{f=1}^n \alpha_f |A_f| / \sum_{f=1}^n |A_f| \quad (14)$$

$$\mathcal{J}(\alpha)_P = \sum_{f=1}^n \alpha_f |A_f| / \sum_{f=1}^n |A_f| \quad (15)$$

참고로 본 연구에서 제안한 식들은 Lafaurie 등⁽⁸⁾ 방법이 검사체적 각 표면에서의 값을 산술평균한 데 비해 검사체적 각 표면적의 크기에 따라 가중 값을 준 것으로 원래의 α 값 분포를 가능한 한 유지하며 매끄럽게 만드는 방법이며, 식 (14)는 식 (15)에 비해 중심에서의 값에 가중치를 더 준 형태이다. 참고로 본 연구에서는 예비적 테스트를 통해 필터링 수에 대한 값으로 $m = 2$ 를 사용한다.

한편, Blackbill 등⁽⁷⁾은 식 (9)로 나타내는 원래의 CSF 모델에 밀도에 대한 수정을 하는 것이 밀도비가 높은 유동에서 성능이 개선되는 것을 확인하고 다음과 같이 밀도보정(density-scaled)한 CSF 모델을 제안하였다.

$$\vec{f}_{SV} = -\frac{\rho}{\langle \rho \rangle} \sigma \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \right) \nabla \alpha \quad (16)$$

위 식에서 $\langle \rho \rangle$ 는 두 밀도의 산술평균값이다. 참고로 기존의 많은 연구⁽⁹⁻¹²⁾ 및 상용 CFD 코드에서는 원래의 CSF 모델 또는 밀도보정 CFD 모델이 사용되고 있으나, 이 두 CSF 모델의 비교는 제대로 이루어져 있지 않다.

2.3 수치해석방법

전술한 바와 같이 표면장력이 중요하게 작용하는 다상유동의 수치해석은 본 연구실에서 개발한 비정렬격자계 및 체적포착법을 사용하는 해석코드(PowerCFD)^(13,14)에 비정렬격자계에 적용할 수 있도록 제안된 식 (10) 형태의 표면장력에 대한 CSF 모델을 삽입하여 수행한다.

수치해석 방법은 각 시간스텝마다 먼저 식 (3)을 풀어 VOF 장(field)의 α 값들을 새롭게 구한다. 참고로 α 에 대한 이산화 방정식은 다음과 같이 구해진다. 식 (3)을 셀(체적 V_P)에 대해 이산화하고 시간변화 δt 가 충분히 작다면, 일반적으로 셀 면에서의 체적유량 Q_f 는 셀 면에서의 α_f 에 비해 무시할 정도의 미소변화량을 가지기 때문에 일정하다고 가정하면, α 에 대한 최종 이산화식은 다음과 같다.

$$\alpha_P^{t+\delta t} = \alpha_P^t + \frac{\delta t}{V_P} \sum_{f=1}^n \alpha_f^* Q_f \quad (17)$$

한편, 기존의 VOF 방법에서는 일정한 형태의 정렬격자에만 사용이 국한된 현시적 분할자(split operator)를 적용하고 있기 때문에, 새로운 시각에서의 α 를 나타내는 임의의 특정 셀 면을 통과한 체적비의 총합이 좌표축의 방향에 따른 전개(sweep)순서에 따라 다르게 나타나게 된다. 따라서 본 연구에서는 식 (16)에서 필요로 하는 셀 면에서의 α_f^* 값을 다음과 같이 2차 정확도를 가진 Crank-Nicholson 도식의 형태로 구하여,

$$\alpha_f^* = \frac{1}{2} (\alpha_f^t + \alpha_f^{t+\delta t}) \quad (18)$$

전개순서에 대한 의존성을 제거함으로써 비정렬격자계에도 용이하게 적용될 수 있으며, α 에 대한 이산화방정식을 음해법(implicit method)으로 풀고 있어 계산의 안정성도 도모할 수 있다⁽¹³⁻¹⁵⁾.

다음으로, 새롭게 얻어진 α 값들을 사용하여 식 (4) 및 식 (5)로부터 밀도와 점성계수 값을 계산한다. 이 값들을 사용하여 식 (1)과 식 (2)를 유동해석 코드를 사용하여 풀게 된다.

3. 계산결과 및 고찰

3.1 평형상태의 정지 액적(Static Drop in Equilibrium) 문제

비정렬격자계에서의 CSF 모델 표현식을 평가하기 위한 검증문제로 평형상태의 2차원 정지 액적(static drop in equilibrium) 문제를 테스트하였다. 이 문제의 경우 중력과 다른 외력이 존재하지 않고 비점성 유체로 가정하였기 때문에 표면장력만이 압력력과 균형을 이루며, 경계면을 가로질러 다음 식과 같이 잘 알려진 Laplace 방정식으로 주어지는 압력도약(pressure jump)이 생긴다.

$$p_{drop} = \sigma \kappa = \sigma / R \quad (19)$$

위 식에서 R 은 원형 액적의 반지름이다.

계산영역은 이전 연구⁽⁷⁾에서와 같이 2차원으로 0.06 m x 0.06 m이고, 격자계는 비정렬 등간격 사각형격자계로서 3600(60 x 60) 개의 제어체적을 사용하였다. 중심점이 (0.03, 0.03)에 위치하고, 반

Table 1 Comparison of several CSF model types with the result of Blackbill et al.⁽⁷⁾ using $\rho_1/\rho_g=2$

Model types	$\langle p \rangle / p_{drop}$	L_2	$ u_{max, 1} $	$ u_{max, 50} $
Density-scaled CSF model with Eq. (15)	0.985	7.999×10^{-2}	5.250×10^{-7}	2.673×10^{-5}
Density-scaled CSF model with Eq. (14)	1.016	1.159×10^{-1}	1.321×10^{-6}	6.584×10^{-5}
Original CSF model with Eq. (15)	0.928	9.191×10^{-2}	5.313×10^{-7}	2.724×10^{-5}
Original CSF model with Eq. (14)	0.895	1.357×10^{-1}	1.144×10^{-6}	5.666×10^{-5}
Blackbill et al. ⁽⁷⁾	1.016	2.82×10^{-2}	-	-

Table 2 Comparison of several CSF model types with $\rho_1/\rho_g=1000$

Model types	$\langle p \rangle / p_{drop}$	L_2	$ u_{max, 1} $	$ u_{max, 50} $
Density-scaled CSF model with Eq. (15)	1.060	1.721×10^{-1}	9.581×10^{-7}	4.771×10^{-5}
Density-scaled CSF model with Eq. (14)	1.210	3.189×10^{-1}	2.331×10^{-6}	1.164×10^{-4}
Original CSF model with Eq. (15)	0.880	1.395×10^{-1}	6.627×10^{-5}	3.395×10^{-3}
Original CSF model with Eq. (14)	0.770	2.627×10^{-1}	1.806×10^{-4}	8.591×10^{-3}

경 $R=0.02$ m인 원형 액적은 밀도 $\rho_1=1000$ kg/m³을 가지며, 밀도 $\rho_g=500$ kg/m³ 및 1 kg/m³을 가지는 배경 유체에 둘러싸여 있다. 표면장력 계수 σ 는 23.61×10^{-3} N/m이고, Laplace 방정식 (19)에 따르면 이론적인 압력도약은 1.1805 N/m²이다. 이 값이 다음 식과 같이 정의되는 CSF 모델로부터 계산되어 얻어진 수치해석 값의 평균 값과 비교된다.

$$\langle p \rangle = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} p_i \quad (20)$$

위 식에서 합은 밀도 $\rho \geq 0.99\rho_1$ 를 가지는 N_d 개의 셀에 대해 수행된다. 또한 이론 압력도약 값과 계산된 압력도약 값 사이의 상대적인 오차에 대한 다른 측정으로 다음과 같이 큰 오차 L_2 를 평가할 수 있다.

$$L_2 = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N_d} (p_i - p_{drop})^2}{N_d p_{drop}^2} \right]^{1/2} \quad (21)$$

한편, 평형상태의 정지 액적에서 압력장은 이상적으로는 액적 내에서 일정하고 경계면에서 표면장력과 정확하게 균형을 이루어야한다. 따라서 시간이 진전되어도 속도장은 모든 영역에서 영

로 되어야하나, 표면장력에 대한 CSF 모델의 수치해석 방법으로 인해 영이 아닌 속도장이 만들어지며, 이것은 기생흐름이라고 알려진 물리적으로 불합리한 수치적인 부산물이다. 이 기생흐름의 척도로 본 연구에서는 첫 번째와 50번째 시간 스텝을 진행한 후의 계산영역 내에서의 최대 속도 값으로 판정한다.

본 연구에서는 식 (9)의 원래의 CSF 모델과 식 (16)의 밀도 보정한 CSF 모델에 대해 Laplacian 필터로 식 (14)와 식 (15)를 사용한 경우에 대해 결과를 비교분석하였다.

먼저 배경 유체 $\rho_g=500$ kg/m³ (즉 밀도비 $\rho_1/\rho_g=2$)을 사용하여 Brackbill 등⁽⁷⁾에 의해 수행된 경우에 대해 계산한 결과를 Table 1에 요약하여 나타냈다. 참고로 Brackbill 등⁽⁷⁾의 값은 곡률에 대해서는 매끄럽게 필터링한 밀도장을, 계면 수직벡터에 대해서는 밀도장 그 자체를 각각 사용해서 얻어진 가장 좋은 결과이다.

먼저 압력도약 예측 값에 대한 결과를 보면 Laplacian 필터의 종류에 관계없이 밀도보정한 CSF 모델이 원래의 CSF 모델보다 우수한 것으로 나타났다. 또한 이론 압력도약 값과 계산된 압력도약 값 사이의 상대적인 오차에 대한 큰 오차 L_2 에서는 Laplacian 필터로 식 (15)를 사용하는 방법이 보다 우수한 것으로 나타났다. 이와 함께 기생흐름의 척

도를 판단하는 첫 번째와 50번째 시간 스텝에서의 계산영역 내에서의 최대 속도에서도 Laplacian 필터로 식 (15)를 사용하는 방법이 우수한 것으로 나타났다. 이상의 결과로부터 Laplacian 필터로 식 (15)를 사용하는 밀도보정한 CSF 모델이 전체적으로 가장 예측성능이 우수함을 알 수 있다. 또한 비정렬격자계와 VOF 방법으로 체적포착법을 사용하는 본 수치 해석 결과는 유한차분법으로 계산한 Brackbill 등⁽⁷⁾의 결과와도 동등한 정도의 예측성능을 나타내고 있어, 본 해석방법의 적합성을 확인시켜주고 있다.

Table 2에는 밀도비 $\rho_l/\rho_g=1000$ 인 경우에 대한 결과를 나타내고 있다. 결과를 보면 밀도차이가 클수록 기생흐름의 크기가 커지며 예측성능도 다소 떨어지고, 시간 경과와 함께 표에 나타낸 모든 평가 값들의 진동폭도 커짐을 확인할 수 있었다. 또한 Laplacian 필터로는 식 (15)를 사용하는 방법이 보다 예측성능이 우수한 것으로 나타났다. 그러나 압력도 약 예측 값에서는 밀도보정한 CSF 모델이 우수한 것으로 나타났으나, 큰 오차 결과에서는 원래의 CSF 모델이 다소 우수한 것으로 나타났다. 이것은 밀도비가 작은 경우와는 다른 결과로 향후 이러한 현상을 규명하기 위한 연구가 필요하다고 사료되나, 전체적으로는 Laplacian 필터로 식 (15)를 사용하는 밀도보정한 CSF 모델이 예측성능이 우수하다고 판단된다. 따라서 이후 연구에서는 CSF 모델로 밀도보정한 CSF 모델을 사용하기로 한다.

참고로 Table 1과 Table 2는 시간스텝 $\Delta t=10^{-6}$ s을 사용하여 얻어진 결과로, 시간스텝을 100 배 크게 하여도 모든 CSF 모델 형태에 대해서 $\langle p \rangle / p_{drop}$ 및 L_2 값에는 미미한 정도의 차이만 나타나나, 계산영역 내에서의 기생흐름의 최대 속도 값은 시간스텝에 거의 비례하여 커짐을 확인하였다. 이것은 압력장은 시간스텝에 그다지 의존하지 않고 CSF 모델형태에만 크게 의존하며, 기생흐름은 시간이 경과함에 따라 그 크기가 증가함을 의미하고 있다.

3.2 비평형상태의 동적 액적(Dynamic Drop in Nonequilibrium) 문제

계면에 작용하는 표면장력은 작은 기포나 액적을 구형으로 만든다. 이 현상을 보여주는 수치적 테스트로 Brackbill 등⁽⁷⁾이 보고한 초기에 정사각형 액적에 표면장력을 적용하는 2차원 유동 문제가 있다. 이 경우 계면에서의 곡률의 비균일 분

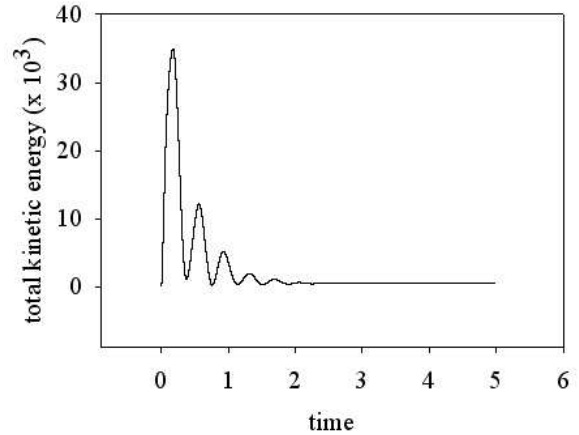


Fig. 1 Time evolution of total kinetic energy for initially square-shaped drop

포로 인해 액적이 평형을 이루지 못하는 비평형 상태에서 시간이 진행됨에 따라 정사각형 액적이 원형 액적으로 동적으로 변화되게 한다. 또한 일반적으로 원형 액적이 변형될 때 액적표면을 평형상태 주위로 진동하게 만드는 모세관 파(capillary wave)가 야기되며, 수치계산에서는 시간의 경과와 함께 이 진동이 수치적 소산에 의해 감쇄된다.

이 문제의 경우 중력과 다른 외력이 존재하지 않고 표면장력만 존재하고, 점성 유체로 가정하였다. 계산영역은 정적 액적에서와 같이 2차원으로 $0.06 \text{ m} \times 0.06 \text{ m}$ 이고, 격자계는 비정렬 등간격 사각형격자계로서 $900(30 \times 30)$ 개의 제어체적을 사용하였다. Fig. 1(a)에 나타낸 바와 같이 중심점이 $(0.03, 0.03)$ 에 위치하고, 정사각형의 면적은 $1.296 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ 로 반경 $R \approx 2.031 \times 10^{-2} \text{ m}$ 인 원의 면적과 동등하다. 초기에 정사각형 액적의 밀도 $\rho_l=1000 \text{ kg/m}^3$ 을 가지며 밀도 $\rho_g=500 \text{ kg/m}^3$ 을 가지는 배경 유체에 둘러싸여 있다. 본 연구에서 사용한 표면장력 계수 σ 는 $23.61 \times 10^{-3} \text{ N/m}$, 점성계수 μ 는 0.023 kg/ms 이며, 시간스텝 $\Delta t=2 \times 10^{-3} \text{ s}$ 이다.

Fig. 1에는 시간전개에 따른 계산영역 내 단위 체적당 전체 운동에너지(total kinetic energy)의 변화를 나타냈다. 단위체적당 운동에너지 TKE는 다음 식으로 정의된다.

$$\text{TKE} = \frac{1}{V} \int \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV \quad (22)$$

결과에서 보는 바와 같이 전체 운동에너지는

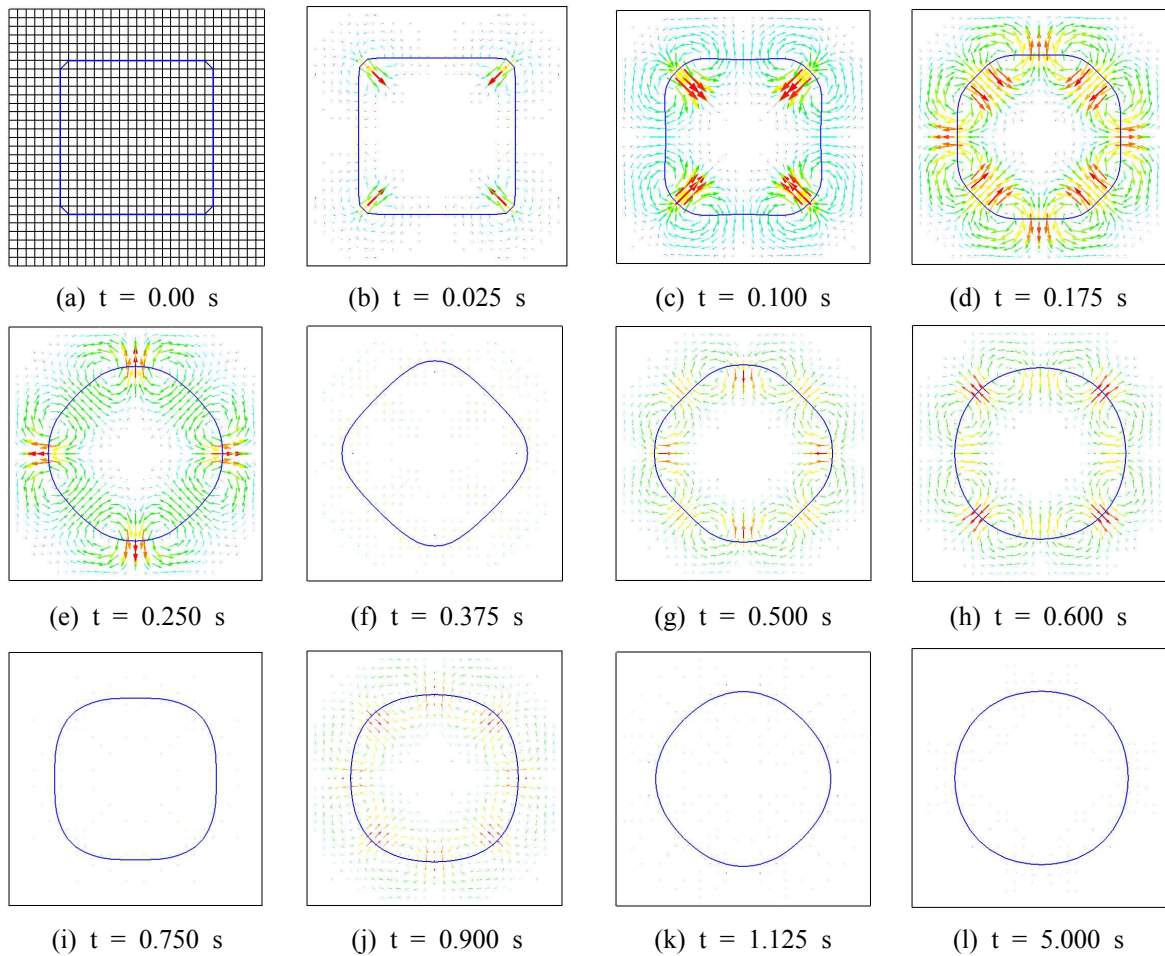


Fig. 2 Time evolution of interface change($\alpha=0.5$) and velocity profiles for initially square-shaped drop subjected to surface tension forces

주기적으로 모세관 파에 의해 야기된 진동을 하면서 운동량방정식의 확산항의 존재로 점차 감쇄되어 감을 알 수 있으며, 진동주기가 약 0.75 s임을 확인시켜 주고 있다. 또한 평형상태에 도달하였을 때도 운동에너지는 최대값의 약 1.3%로 일정한 값을 유지하는데 이것은 기생흐름의 영향이다.

Fig. 2에는 시간 전개에 따른 속도장 및 계면($\alpha=0.5$)의 변화를 나타낸다. 그림에서 속도는 모든 시간에 대해 동일한 크기로 스케일링되어 있다. 결과를 보면 초기에 곡률이 최대가 되는 정사각형의 모서리에서 생성되는 높은 표면장력에 의해 이 위치에서 대각선의 안쪽으로 향하는 큰 속도가 발생한다(Fig. 2(b)). 이 큰 속도는 계면의 표면적을 최소화하기 위해 유동영역의 대각선상으로는 안쪽으로 당기고 계면의 다른 부분에서는

바깥쪽으로 당기는 4쌍의 와동을 형성(Fig. 2(c))하며, 시간의 경과와 함께 사각형 모서리 부분의 급격한 곡률이 점차 완화되면서 대각선상의 큰 속도는 점차 작아지고, 상대적으로 상하, 좌우 방향의 속도성분은 커져 8각형 형상(Fig. 2(d))으로 되었다가, 상하, 좌우 방향의 속도성분이 상대적으로 커지며 마름모 형태(Fig. 2(e))로 변화되나, 상하, 좌우 방향의 곡률도 점차 커지게 되어 이 영역의 표면장력이 점차 강해져 결과적으로 유동을 감속시키게 되어 속도장은 아주 미약해지면서 일시적으로 평형상태에 도달한 것 같은 양상(Fig. 2(f))을 보인다. 그러나 상하, 좌우 방향의 큰 곡률로 인해 생기는 표면장력에 의해 이 영역에서의 속도성분이 이전과 반대방향으로 점차 커지며 유동영역의 속도 벡터도 이전과 반대 방향으로 변하는 4쌍의 와동을 형성(Fig. 2(g))하다가, 대각

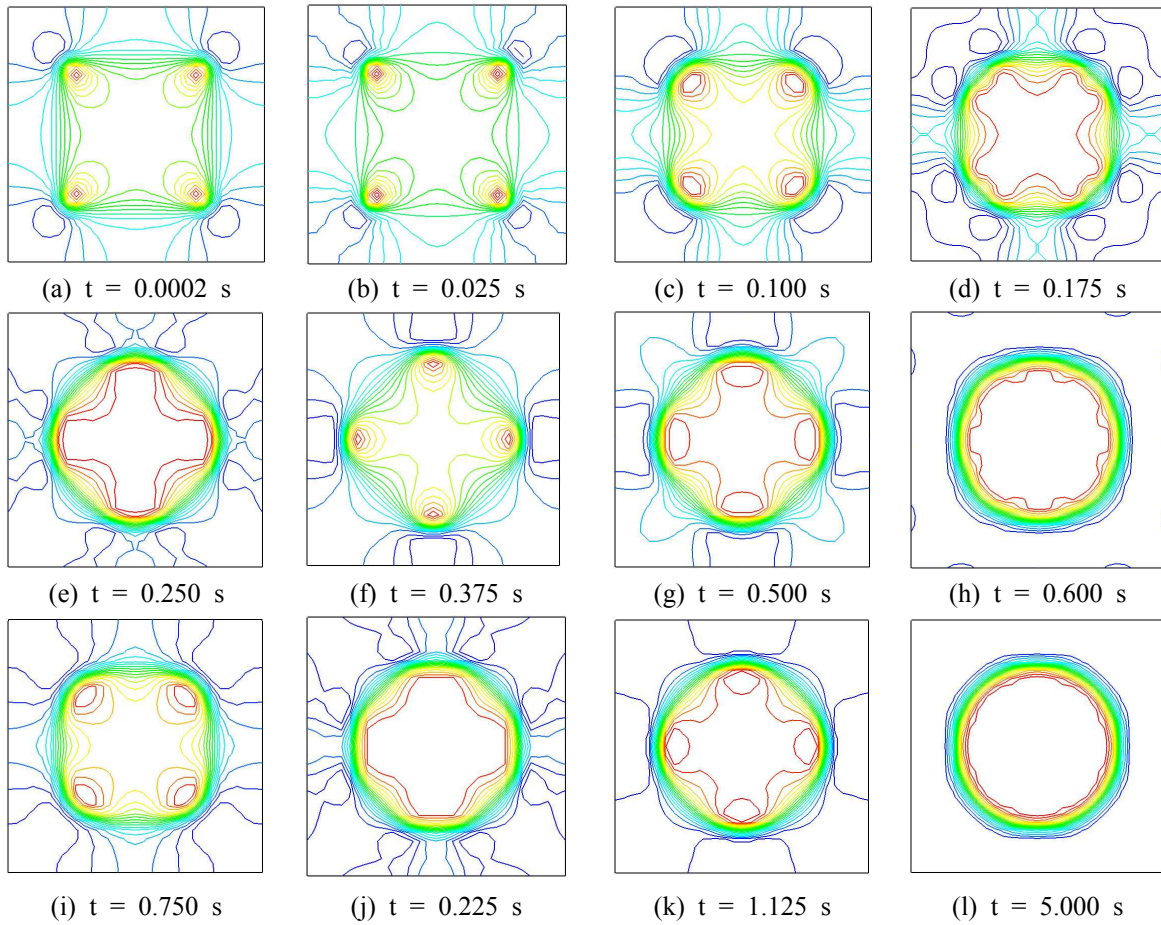


Fig. 3 Time evolution of pressure contours for initially square-shaped drop subjected to surface tension forces

선 방향의 속도가 상대적으로 커지는 형상(Fig. 2(h))으로 변화하다, 다시 속도 벡터의 크기가 작아져 속도장은 아주 미약해지면서 모서리가 둥근 사각형 형상(Fig. 2(i))으로 회귀한다. 이것은 잘 알려진 원형 액적이 변형되었을 때 액적표면이 그것의 평형형태 주위로 진동시키는 모세관 파가 야기된다는 사실을 매우 잘 입증하고 있으며, 본 계산에서는 진동주기가 약 0.75 s임을 다시 한 번 확인할 수 있다. 이 진동은 운동량방정식의 확산 항의 존재로 점차 감쇄되며, 속도장은 주기적으로 Fig. 2(b-i)와 같은 양상을 나타내며 변화(Fig. 2(j-k))하여, 모든 속도가 거의 감쇄되어 계면이 원형을 나타내는 평형상태(Fig. 2(l))에 이른다.

Fig. 3에는 Fig. 2에 보인 속도장과 대응하는 시간전개에 따른 압력장의 변화를 20개의 등고선으로 나타낸다. 결과를 보면 초기에 곡률이 최대가 되는 정사각형의 모서리에서 생성되는 높은 표면

장력에 의해 이 위치에서 높은 값과 급격한 기울기를 가지는 압력장이 국부적으로 형성된다(Fig. 3(a, b)). 시간전개와 함께 이 큰 압력과 급격한 압력구배를 가지는 영역이 점차 모서리 부분에서 영역을 넓히는 양상(Fig. 3(c))을 나타내며, 액적의 내부에 대한 압력장의 균질화 경향으로 대각선 및 상하, 좌우 방향으로 급격한 압력 기울기가 형성된다(Fig. 3(d)). 그런 다음 사각형 중심의 상하, 좌우 방향의 압력이 상대적으로 커지며 압력구배도 이 방향으로 밀집되는 마름모 형태(Fig. 3(e))로 변화되다, 압력장 분포는 초기형태와 45도 각도 회전된 형태(Fig. 3(f))로 되며, 이 상태에서 속도장은 아주 미약해지면서 일시적으로 평형상태에 도달한 것 같이 보인다. 그러나 초기 사각형 형태와 같은 압력장으로 인해 시간전개와 함께 이 큰 압력과 급격한 압력구배를 가지는 영역이 점차 상하, 좌우 부분에서 영역을

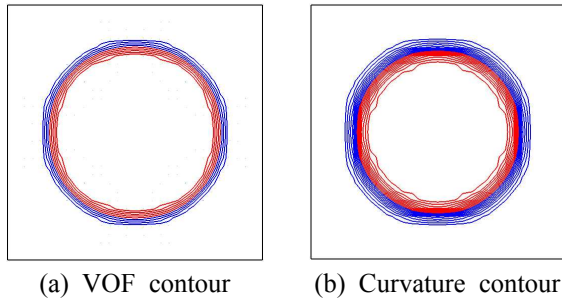


Fig. 4 Pressure jump induced by surface tension: (a) VOF contours of a circle with radius 2 cm, (b) the curvature contours predicted with the CSF model.

넓히는 양상(Fig. 3(g))을 나타내며, 액적의 내부에 대한 압력장의 균질화 경향으로 평형상태와 유사한 압력장이 형성(Fig. 3(h))되다, 초기 상태보다는 모서리가 둥근 사각형으로 회귀한다(Fig. 3(i)). 이러한 과정을 몇 차례 겪으며 압력장은 Fig. 3(l)에 나타낸 것처럼 모든 방향으로 거의 동일한 압력 기울기를 형성하게 되어 압력 등고선이 원형을 나타내게 된다.

Fig. 4(a)는 Fig. 2에서 얻어진 원형 액적과 결합된 0과 1사이의 20개의 VOF 값 등고선을, Fig. 4(b)는 CSF 모델로 예측된 이 원형 액적의 곡률에 대한 등고선을 나타내고 있다. Fig. 2(l)에 나타낸 원과 결합된 예측된 평균 곡률 값은 47.77 m^{-1} 로 이론 곡률 값인 $\kappa \approx 49.23 \text{ m}^{-1}$ 와 약 3% 내에서 잘 일치하고 있다. 그러나 국부적인 점들에서는 이산화 오차가 발생하고 있는데 이것은 Brackbill 등⁽⁷⁾의 결과와도 상응한다. 또한 Fig. 3(l)에 나타낸 압력장에 대해 식 (18)로 예측된 압력도약 값은 1.1279 N/m^2 로 Laplace 방정식 (17)에 의한 이론 압력도약 값 1.1624 N/m^2 과 약 3%의 오차를 나타내고 있으며, Blackbill 등⁽⁷⁾이 보고한 1%-5%의 범위 내에 있다.

Fig. 5는 VOF 방법에 CSF 모델을 사용하였을 경우 필연적으로 발생하는 기생흐름에 미치는 표면장력 계수와 점성계수의 상대적인 크기에 대한 결과를 보여주고 있다. 모든 그림에서 속도 스케일은 동일하다 Fig. 5(a)는 Fig. 2(l)과 동일한 것으로 계면 주위로 아주 미약한 기생흐름을 보여주고 있다. 반면 Fig. 5(b)에 나타낸 바와 같이 표면장력 계수만을 10배로 높여 동일한 계산을 수행하여 얻어진 결과는 원래의 속도 벡터보다 약 10배 정도 크기가 커진 기생흐름을 나타내고 있

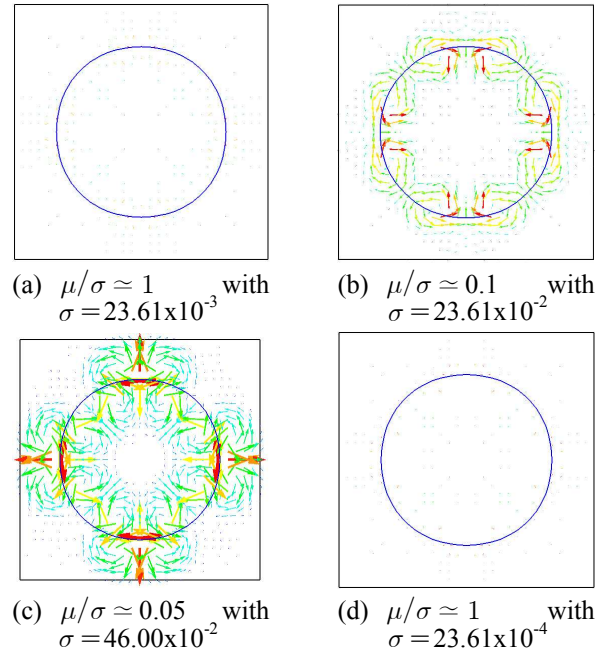


Fig. 5 Parasite currents at the surface of a circle with radius 2 cm for different surface tension coefficients and viscosity values.

다. 또한 표면장력 계수만을 50배로 높여 얻어진 결과는 Fig. 5(c)에서 보는 바와 같이 원래의 속도 벡터보다 약 50배 정도 크기가 커진 기생흐름을 보여준다. 그러나 표면장력 계수와 점성계수를 똑같이 1/10로 줄여 얻어진 결과는 Fig. 5(d)에서 보는 바와 같이 Fig. 5(a)의 원래의 속도 벡터와 비슷한 정도의 미약한 기생흐름을 나타내고 있다. 기생흐름의 크기가 μ/σ 비와 대체적으로 반비례하고 있음을 나타내고 있는 본 예측결과는 Lafaurie 등⁽⁸⁾이 보고한 결과와 유사한 경향을 나타내고 있다. 즉, Lafaurie 등⁽⁸⁾은 기생흐름의 크기를 예측하는데 유용한 $u_{\max}\mu/\sigma$ 로 정의하는 무차원 수 K 가 일정하다고 보고하였다.

4. 결론

본 연구에서는 비정렬격자계와 체적포착법을 채택한 VOF 방법을 사용하여 표면장력이 지배적인 다상유동의 수치해석방법을 제안하였다. 이를 위해 먼저 표면장력에 대한 CSF 모델을 비정렬격자계에 적용할 수 있도록 수치해석 방법을 확립시켜 Myong^(14,15)이 개발한 수치해석코드에 삽입하였다. 이 수치해석코드는 일반 상용 CFD 코드와 같이 비정렬 셀 중심방법을 채용하고 압력

수정방법에 기반을 둔 3차원 유동해석방법^(16,17)에 체적포착법에서 문제가 되는 번짐 현상과 같은 경계면의 비물리적인 변형 및 수치확산 문제를 크게 개선한 것으로 알려진 HR도식인 CICSAM⁽⁵⁾을 도입하고, 시간차분에 대해 계산의 안정성을 위해 음해법을 채택한 것이다.

본 연구에서 제시한 해석방법의 유용성과 정확도를 평가하기 위해 중력과 다른 외력이 존재하지 않고 오직 표면장력에 의한 표준적인 테스트 문제인 평형상태의 정적 액적 및 비평형상태의 동적 액적 문제에 적용한 해석 결과를 제시하였다. 특히 정적 액적 문제를 통해 매끄러운 곡률 계산을 위해 필요한 필터링에 관해 비정렬격자계에 용이하게 적용할 수 있도록 제안된 몇 가지 방법 및 CSF 모델 형태에 따른 유용성 및 정확도를 평가하였다.

연구결과, 매끄러운 곡률 계산을 위해 필요한 필터로 식 (15)를 사용하는 Laplacian 필터와 함께 CSF 모델로는 식 (16)의 밀도보정한 CSF 모델이 가장 예측성능이 우수한 것으로 나타났다. 또한 기생흐름의 크기는 대체적으로 점성계수/표면장력계수 비와 반비례함을 나타냈다. 이와 함께 본 연구에서 제시한 표면장력 계산을 위한 모델과 함께 비정렬격자계와 체적포착법을 채택한 VOF 방법을 사용하는 본 수치해석방법은 표면장력이 지배적인 다상유동인 평형상태의 정적 액적 및 비평형상태의 동적 액적 문제 모두에 대해 정확성과 유용성이 입증되었다.

후 기

본 연구는 2010년도 국민대학교 교내연구비를 지원받아 수행된 연구이다.

참고문헌

- (1) Hirt, C. W. and Nicholls, B. D., 1981, "Volume of Fluid(VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201~225.
- (2) Rider, W. J. and Kothe, D. B., 1998, "Reconstruction Volume Tracking," *J. Comput. Phys.*, Vol. 141, pp. 112~152.
- (3) Puckett, E. G., Almgren, A. S., Bell, J. B., Marcus, D. L. and Rider, W. J., 1997, "A High-Order Projection Method for Tracking Fluid Interfaces in Variable Density Incompressible Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 130, pp. 269~282.
- (4) Muzaferija, S. and Peric, M., 1999, "Computation of Free Surface Flows using Interface Tracking and Interface Capturing Methods," Chap. 2, in Mahrenholtz, O. and Markewicz, M., *Nonlinear Water Wave Interaction*, Comput. Mech. Publications.
- (5) Ubbink, O., 1997, "Numerical Prediction of Two Fluid Systems with Sharp Interface," PhD Thesis, University of London.
- (6) Zhao, Y., Tan, H. H. and Zhang, B., 2002, "A High-Resolution Characteristics-based Implicit Dual Time-Stepping VOF Method for Free Surface Flow Simulation on Unstructured Grids," *J. Comput. Phys.*, Vol. 183, pp. 233~273.
- (7) Blackbill, J. U., Kothe, C. and Zamach, C., 1992, "A Continuum Method for Modeling Surface Tension," *J. Comput. Phys.*, Vol. 100, pp. 335~354.
- (8) Lafaurie, B., Nardone, R., Scardovelli, S., Zaleski, G. and Zanetti, G., 1994, "Modeling Merging and Fragmentation in Multiphase Flows with SURFER," *J. Comput. Phys.*, Vol. 113, pp. 134~147.
- (9) Francois, M. M., Cummins, S. J., Dendy, E. D., Kothe, D. B., Sicilian, J. M. and Williams, M. W., 2006, "A Balanced-Force Algorithm for Continuous and Sharp Interfacial Surface Tension Models within a Volume Tracking Framework," *J. Comput. Phys.*, Vol. 213, pp. 141~173.
- (10) Tong, A. Y. and Wang, Z., 2007, "A Numerical Method for Capillarity-Dominant Free Surface Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 221, pp. 506~523.
- (11) Seifollahi, M., Shirani, E. and Ashgriz, N., 2008, "An Improved Method for Calculation of Interface Pressure Force in PLIC-VOF Methods," *European J. of Mechanics B/Fluids*, Vol. 27, pp. 1~23.
- (12) Gerlach, D., Tomar, G., Biswas, G. and Durst, F., 2006, "Comparison of Volume-of-Fluid Methods for Surface Tension-Dominant Two-Phase Flows," *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, pp.

- 740~754.
- (13) Myong, H. K. and Kim, J. E., 2006, "A Study on an Interface Capturing Method Applicable to Unstructured Meshes for the Analysis of Free Surface Flow," *KSCFE J. of Computational Fluids Engineering*, Vol. 11, No. 4, pp.14~19.
- (14) Myong, H. K., 2009, "Numerical Simulation of Multiphase Flows with Material Interface due to Density Difference by Interface Capturing Method," *Trans. of the KSME(B)*, Vol. 33, No. 6, pp. 443~453.
- (15) Myong, H. K., 2008, "Comparative Study on High Resolution Schemes in Interface Capturing Method Suitable for Unstructured Meshes," *Trans. of the KSME(B)*, Vol. 32, No. 1, pp. 23~29.
- (16) Myong, H. K. and Kim, J., 2005, "Development of 3D Flow Analysis Code using Unstructured Grid System(1st Report, Numerical Method)," *Trans. of the KSME(B)*, Vol. 29, No. 9, pp. 1049~1056.
- (17) Myong, H. K. and Kim, J., 2006, "Development of a Flow Analysis Code using an Unstructured Grid with the Cell-Centered Method," *J. of Mechanical Science and Technology (KSME Int. J.)*, Vol. 20, No. 12, pp. 2218~2229.