영재교육연구 제 21 권 제 2 호
Journal of Gifted/Talented Education
2011. Vol 21. No 2, pp. 269~286

수학영재학생들의 유추를 통한 이차곡면의 탐구활동 분석

양 기 열
순천대학교

이 의 진
순천대학교

유추는 수학을 탐구하는 중요한 방법 중의 하나로 이전 경험 또는 지식에 대한 반성적 사고를 통해 새로운 지식을 구성하는 도구이며, 낯설고 새로운 영역을 유사한 친숙한 영역을 바탕으로 추론해서 이해하는 과정이다. 본 연구는 수학영재학생들이 유추를 실제 수학문제에 적용해 보는 활동으로 이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선)에서 유추를 통해 이차곡면을 탐구해 보고, 그 과정에서 나타나는 어려움과 이를 극복하는데 Cabri 3D가 미치는 영향을 살펴보고자 한다.

주제어: 유추, 이차곡면, Cabri 3D

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

Polya는 수학교육의 목적은 수학적으로 사고하는 것을 가르치는 것에 있다고 주장하면서 문제해결과정이 그 목적을 달성하기위한 수단이며, 그 과정 중에서 계획수립단계와 반성의 단계에서 유추의 역할을 강조하였다. 즉, 유추는 수학적 힘을 기르는데 중요한 역할을 한다. 유추는 이전 경험 또는 지식에 대한 반성적 사고를 통해 새로운 지식을 구성하는 도구이며, 낯설고 새로운 영역을 유사한 친숙한 영역을 바탕으로 추론해서 이해하는 과정이다.

국내외의 교육과정 문서를 살펴보면 수학적 사고교육은 학교수학의 중요한 목표 중 하나로 강조되어 왔으나(교육부, 1997; 교육인적자원부, 2007; NCTM, 1989, 2000) 수학적 사고교육을 논할 때, 유추적 사고가 명시적으로 다루어지는 경우는 거의 없다. 또한, English (2004)는 수학적 사고 중 유추가 교육적으로 매우 큰 잠재성을 가진 사고방법임에도 불구하고 학교수학에서 충분히 다루어지지 않았다고 주장한다. 대개 중등학교 수업에서는 유추를 이용하여 문제를 해결하는 활동도 빈약하고, 설령 그러한 활동이 있다 하더라도 문제의 해결에 초점이 맞춰지고 유추적 사고에 대해서는 관심을 기울이지 않고 있

교신저자: 양기열(gyyang@sunchon.ac.kr)

다. 국내에서 아직은 유추적 사고를 활용한 수학교육에 대한 연구가 부족한 상황이다.

수학과 교육과정(2007)에서는 수준별 수업을 지원하기 위해 포함시켰던 심화학습 내용을 삭제함으로써 학습량 감축효과 및 난이수준의 적정화를 추구하였다. 하지만 이는 우수한 학생들의 사고능력과 잠재력 계발을 오히려 저하시킴으로서 교육목표에 역행하는 비효율적인 문제를 안고 있다. 이러한 문제를 개선하기 위해서는 학생들의 능력에 따른 적절한 교육내용이 정해지고 학생들의 관심분야에 대한 다양한 지도가 요구된다. 이를 위해서 발전적으로 학습할 수 있는 내용으로서 다른 수학적 개념 학습에 결손요인이 되지 않는 개념 또는 고도의 사고력과 문제해결력을 필요로 하는 우수 집단에 대한 심화과정으로의 지도는 매우 중요하다. 하지만 우수 집단을 대상으로 한 교육 자료에서 유추적 사고를 활용한 예는 현재까지 많지 않은 편이다.

한편, 기하교육은 논리적 사고능력을 발달시키고 실세계의 공간에 대한 직관력을 발달시키기 위한 것으로서(Geddes & Forthunato, 1993), 수학적 사고력을 길러주는데 가장 중요한 역할을 해왔다. 1980년 ICMI 보고서에서는 수학교육의 목표의 하나로서 공간능력이 개발되어야 한다고 주장했다. 그러나 현행 중등학교 수학교육과정에서는 입체도형에 대한 내용이 부족하고 일선 학교현장에서도 논리적 사고력을 기르는데 강력한 도구인 공간기하 논증단원을 소홀히 다루고 있다. 이러한 상황 때문에 학생들은 3차원 공간에서의 도형을 잘 인식하지 못한다. 이러한 공간도형에 대한 어려움을 해결하기 위해서 탐구형 소프트웨어 Cabri 3D를 활용하면 3차원 화면을 바탕으로 공간상의 기하모델을 직관적으로 생각했던 부분들을 실제적으로 시각화를 가능하게 한다. 그로인해 공간에서의 도형에 관한 추론능력을 더 향상시킬 수 있다. 이러한 공학적 도구는 사고력을 도모하기 위한 환경을 조성하는데 효과적이며, 이러한 활동은 자신의 사고와 행동을 다시 한 번 반성해 봄으로써 더 높은 사고수준으로의 발달을 모색하는 반영적 추상화 활동에 기여하고 수학적 사고력을 향상시킨다.

따라서 본 연구는 이차곡면을 학습한 경험이 없는 지방 중소도시인 S시의 대학 부설 과학영재교육원 사사과정에 참여하고 있는 중학교 3학년들을 대상으로 유추를 통한 이차곡면의 탐구과정에서 어떠한 어려움을 겪고 있는지를 살펴보고, Cabri 3D의 활용이 학생들의 유추활동에 어떠한 영향을 미치는지를 알아보는데 그 목적을 두고 있다.

II. 이론적 배경

1. 유추

가. 유추의 의미

유추는 실세계에서 수학적 대상 및 관계들을 탐구하는 아주 오래된 강력한 인지조작들 중의 하나로써, 수학적 대상들 사이의 유사점들에 근거하여 새로운 결론을 유도하는 추론의 강력한 도구이다. 또한, 유추는 새로운 수학적 규칙성을 밝히는 과정에서 매우 주요한 역할을 한다.

유추의 사전적 의미(2002)를 살펴보면 유사한 점에 의해 다른 사물을 미루어 추측하는 것, 또는 간접추리의 하나로 두 개의 특수한 사물로부터 다수의 본질이 일치하는 데에 기초하여 다른 속성도 유사하다고 하는 추론으로 비슷한 점을 통한 비교추리이다. 이용률, 성현경(1991)은 유추는 엄밀하지는 않지만 한 대상이 어떤 성질을 지닐 때 이와 유사한 다른 대상에도 그 성질이 있으리라고 추측하는 것이라 하였다.

유추의 의미를 종합하여보면 유추는 어떤 개념이나 문제를 해결하는데 그와 유사한 성질이나 관계로부터 개념을 이해하거나 문제를 해결하는 과정이다. 두 대상 사이에 공통적으로 성립하는 어떤 성질이나 관계가 있다면 그것을 활용하여 여러 상황에 적용하여 해결하는 과정이 바로 유추의 활용 또는 유추의 과정이 될 것이다.

유추는 수학과 과학의 발견, 단어의 형성, 예술적 표현, 일상회화, 문제해결 등에서 매우 다양하게 사용된다. 또한 낯선 경험에서 이미 존재하는 지식과의 유사성을 찾아냄으로써 새로운 경험을 이해하고 해석하는 매일의 사고와 표현에서 일어나고 있을 뿐 아니라, 학교현장 및 학습상황에서 기존의 경험이나 지식과 새로운 경험 및 지식과의 관계를 파악함으로써 제 3의 문제를 해결하는데 작용하는 중요한 사고기능으로서 특정내용 영역에 국한하지 않는 전이가 높은 능력이라고 할 수 있다(최종근, 1999).

나. 유추의 종류

유추는 현대 수학교육에서 추리의 중요한 방법으로 사용되고 있다. 이는 대상 A, B 사이에 존재하는 유사성에 근거한다. 이 때, 대상 A, B의 종류에 따라 개념유추와 방법(증명방법, 풀이방법)유추로 나눌 수 있다. 대상 A와 B가 개념이며 대상 A의 어떤 속성을 대상 B로 유추하면, 이것을 개념유추라 한다. 한편, 대상 A와 B가 수학문제(증명문제 또는 풀이문제)이며 문제 A의 증명방법 또는 풀이방법을 문제 B로 유추하면, 이것을 방법유추라 한다.

1) 개념유추

대상 A로부터 대상 B로의 개념유추에서 두 개념(대상) A, B는 유사한 속성들 $a_1, a_2, \cdots, a_n$을 가지며, 개념 A의 어떤 속성 x을 개념 B가 가진다고 추리한다. 이 때 대상 A, B로는 특정한 도형이나 수를 포함하는 모든 수학적 개념이 가능하다.

2) 방법유추

Polya의『How to solve it』에 보면, ‘전에 유사한 문제를 풀어 본 적이 있는가?’라는 발견술적 질문이 제시되어 있다. 이 질문은 ‘이전에 풀었던 유사한 문제의 풀이방법을 지금 풀어야 하는 문제의 풀이에 사용하라’는 의미를 담고 있다. 이것은 방법유추의 본질을 잘 설명하고 있다. 방법유추에서 유추의 대상 A, B는 수학문제이며, 유추되는 것은 증명방법 또는 풀이방법이다.

다. 수학학습에서의 유추

1) 수학학습에서 유추의 중요성

학문하는 과정에 있어서 새로운 지식이나 개념들은 이전 것들로부터 고립되어 존재하

는 것이 아니다. 그렇기 때문에 새로운 지식과 개념들이 이전 것들과 비교를 통해 유사한 혹은 차별되는 속성이 확인되면서 도입될 때, 학습자는 이를 효과적으로 이해하고 받아들일 수 있을 것이다. 이러한 학습방법은 다른 과목들뿐만 아니라 수학을 배우는 과정에서도 매우 유익하다. 다시 말해서 유추는 수학적 개념들을 병립시키거나 대립시키도록 돕는 구실을 하므로, 새로운 수학적 개념을 습득하는데 유추의 사용은 매우 유용하다.

엄밀하게 전개된 결과적 지식으로서의 수학은 체계적인 연역적 과학이지만, 발견 · 발명 과정의 수학은 실험적인 귀납적 과학이다. 연역적 추론은 수학의 논리적 전개에 두드러진 사고방법이며, 그러한 기성수학의 학습에서 강조된다. 귀납적 추론은 어떤 결론을 발견 · 발명하는 학습에 필연적으로 요구되는 사고방법이다. 학교수학은 먼저 귀납추론에 의해 어떤 결론을 발견한 다음 그 결론의 타당성은 연역적 증명에 의해 확인되어야 함을 지도해야 할 것이다. 즉, 유추를 사용하여 얻어진 결론은 귀납으로 시작되지만 연역에 의해 종결되는데 이런 과정을 통해 수학하는 힘을 기를 수 있다.

수학은 논리적 추론을 학습하는데 매우 뛰어난 기회를 제공해 왔음은 부정할 수 없으나, 학교수학은 지금까지 귀납추론을 학습하는데 적절한 기회를 제공하지 못하였다.

추론하는 실제적인 사고방법을 가르치기 위해서는 그러한 사고방법을 실제로 구사하는 경험을 시켜야 하며, 무엇보다도 먼저 학생들에게 발견을 용이하게 하는 적절한 예를 연구하여 제시해 주어야 한다. 다음에는 학생들을 도와 의도된 추측에 이르도록 적절한 도움을 주어야하는데, 이를 위해 교사는 적절한 질문과 권고를 통해 아동들의 사고를 자극함으로써 의도된 추측에 이르도록 안내해야 한다. 이러한 지도는 당면한 내용의 의미 있는 지도를 가능하게 할 뿐만 아니라 바람직한 수학적 사고능력과 태도를 개발하게 할 것이다(우정호, 1998).

2) 유추를 통한 수학적 탐구의 필요성

유추는 새로운 수학적 개념, 명제, 문제해결의 방법을 발명하는데 중요한 역할을 하는 추리방법으로, 특수한 사례(개별적 대상)의 속성으로부터 특수한 사례(개별적 대상)의 속성을 도출하는 추리로, 도출된 개별적 대상(하위개념)의 속성이 상위개념에서도 성립하는 경우가 있는데, 이 때 하위개념의 속성은 상위개념으로 일반화된다(한인기 & 에르든예프, 2005).

수학의 역사를 살펴보면, 이미 그리스 시대부터 아리스토텔레스, 아르키메데스, 피타고라스 등을 비롯한 많은 수학자들이 수학적 연구에 유추를 사용하였으며 오일러가 삼각함수와 지수함수의 관계를 발명한 것도 탁월한 유추의 결과였다. 이렇듯 유추는 새로운 학술적 연구를 위한 출발점이 되므로, 유추를 통해 학생들이 창의적인 수학적 활동을 할 수 있도록 지도되어야 한다. 즉, 수학적 발명을 수학자들의 몫이고 학생들은 수학자들이 만들어 놓은 것들을 수동적으로 받아들이는 입장이라고만 생각해서는 안 되며, 학생 스스로가 새로운 것을 찾아내고 발명하여, 해결할 수 있는 교육과정이 마련되어야 한다. 이를 위해 교사는 학생들에게 대상들을 비교하고 이들의 속성들을 비교하는 습관을 길러주며, 유추를 시도할 수 있도록 격려해주어야 한다.

교과서에 연역적인 형태로 제시되어 있는 증명을 여러 차례 반복하는 것보다 분석, 탐색, 시행착오의 결과로 얻어진 증명을 제시하는 경우에, 학생들은 정리의 증명을 훨씬 견고하게 이해한다. 그리고 이러한 작업이 유추와 결합되어 학생 스스로가 수학적인 발명을 수행하며, 유추에 의한 추론을 수행하며, 유추에 의한 추론을 확인하는 과정에서 정리의 증명이 얻어진다면, 그 증명은 교육적으로 훨씬 의미 있을 것이다.

3) 유추에 의한 오류

유추는 새로운 진리를 발견하는 도구이지만 얻어진 명제의 타당성을 보장하지는 못한다. 이러한 유추의 상반된 본질로 인하여, 종종 유추방법에 대한 평가가 엇갈리기도 한다. 학생들은 유추가 잘못된 결과를 가져온 이유는 유추에 의한 판단이 가지고 있는 '개연적 속성'을 학생들이 간과했기 때문이다. 유추를 통해서는 단지 결과를 가정할 수 있으며, 유추에 의한 추론의 결과는 그 타당성이 입증되거나 기각되어야 한다. 교사는 이러한 오류들에 대해 옳지 않다고 그냥 줄을 그어 버릴 것이 아니라, 이들의 타당성을 조사하고 확인하는 것이 바람직하다. 타당하지 않은 유추를 기각하기 위해서는, 한 가지의 반례를 제시하는 것만으로도 충분하다.

2. 이차곡면

x, y, z에 관한 이차방정식

$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$으로 표시되는 곡면을 이차곡면(quadratic surface)라 하고, 이 곡면을 임의의 평면으로 자른 단면은 원추곡선(원, 포물선, 타원, 쌍곡선)이다.

가. 타원면(ellipsoid)

방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$이 표시하는 곡면을 타원면이라 하고, 원점을 그 중심이라 한다. 특히, $a=b=c\neq 0$이면 방정식은 반경이 a인 구면을 표시하고, $a=b\neq c$일 때 회전타원면이라 한다.

나. 쌍곡면(hyperboloid)

1) 일엽쌍곡면(hyperboloid of one sheet)

방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$이 표시하는 곡면을 일엽쌍곡면이라 하고, 원점을 그 중심이라 한다. 이 곡면은 각 좌표면, 원점에 관해서 대칭이고, 각 좌표면과의 교선은 각 좌표면 위에 있는 이차곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$이 되므로 각각 타원 및 쌍곡선을 표시한다.

2) 이엽쌍곡면(hyperboloid of two sheets)

방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$이 표시하는 곡면을 이엽쌍곡면이라 하고, 그 중심은 원점이 된다. 이 곡면은 각 좌표면 및 원점에 관해서 대칭이며, xy평면, zx평면과의 교선은 각각 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$이다.

다. 포물면(paraboloid)

1) 타원포물면(elliptic paraboloid)

방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$가 표시하는 곡면을 타원포물면이라 한다. 이 곡면은 평면 $x=0$, $y=0$에 관해서 대칭이고, 방정식에서 $z \geq 0$임을 알 수 있다. 평면 $y=0$과 평면 $x=0$의 교선은 각각 포물선 $x^2=a^2z$, $y^2=b^2z$이다.

또, 평면 $z=k(k>0)$와의 교선은 타원 $\frac{x^2}{a^2k}+\frac{y^2}{b^2k}=1$이다.

2) 쌍곡포물면(hyperbolic paraboloid)

방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$가 표시하는 곡면을 쌍곡포물면이라 한다. 평면 $x=0$와 평면 $y=0$의 교선은 각각 포물선 $y^2=-b^2z$, $x^2=a^2z$이고, 평면 $z=k(k\neq 0)$와의 교선은 $\frac{x^2}{a^2k}-\frac{y^2}{b^2k}=1$으로 쌍곡선이다. 또 평면 $z=0$과의 교선은 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$. 즉, 원점에서 만나는 두 직선 $y=\pm\frac{b}{a}x$이다.

3. Cabri 3D

Cabri 3D는 지금까지 2차원으로 구형해야만했던 기하모델들을 3차원으로 활용하게 하는 탐구형 소프트웨어로써, 기하모델(점, 직선, 선분, 반경, 벡터, 원과 원추곡선, 평면, 삼각형, 다면체, 구 원주, 추 정다면체)과, 변환(점, 직선, 평면, 변환, 회전 등), 입체도형 및 다면체 등을 3차원 공간에서 완벽하게 모델링하여 구성할 수 있게 해준다. 그러므로 평면상에서 공간을 다루고, 입체도형을 평면도형으로 다루어야 했던 학생들의 공간에 대한 이해, 공간시각화 및 추론능력을 향상시키고 흥미유발에 도움을 줄 것이다.

학생들이 도구메뉴를 활용하기 쉬워 어떤 도형이든지 작도가능하며, 소프트웨어 학습이 간단하며 단기간 내에 마스터 할 수 있다. 입체도형을 다양하게 절단해 봄으로써 평면에서 할 수 없었고 머릿속에서만 머물러 있던 절단 단면을 확인할 수 있다. 또한 어떤 도형이든지 360° 회전이 가능하므로 기하모델을 다양하게 관찰할 수 있고, 동시에 여러 창을 활용하여 입체도형의 변화를 살펴볼 수 있다.

4. 선행연구

유추와 관련된 선행연구들을 살펴보면, 강시중(1987)과 Polya (2003)는 주어진 대상에 대한 새로운 추측을 제기하는 중요한 인지활동으로 유추의 역할을 강조하였으며, 우정호(2005)도 유추가 패턴이나 법칙을 다루는 수학학습에 매우 필요한 강력한 사고수단이며, 수학학습-지도의 기본 바탕이 된다고 주장하였다.

한편 한인기(2001)는 유추를 통해 삼각형의 성질을 볼록 다각형으로 일반화시키는 것과 관련된 수학적 활동을 연구하였으며, 성필용(2004)은 이를 바탕으로 삼각형에서 성립하는 성질들 중에서 유추활동을 통해 사면체에서 성립하는 것을 찾아보고 이를 증명하였다. 한인기, 에르든예프(2005)는 이를 정리하고 한 단계 더 나아가 수학을 탐구하는 중요한 방법 중 하나인 유추를 소개하고 이를 통해 창의적으로 문제를 해결하는 과정을 설명하였다. 실제 학생들을 지도하는데 도움이 되도록 구체적인 예제를 제시했으며, 각 예제들이 큰 흐름 속에서 유기적으로 연결되도록 구성했다.

이승우, 우정호(2002)는 학교수학에서 유추는 수학의 새로운 개념을 이해하고, 이미 알고 있는 수학개념을 확장시키며 문제를 해결하는 중요한 도구로서 수학적 사고능력개발에 중요한 역할을 한다고 하였다. 또한 중학교 수학교과서에 제시된 예를 유추, 은유적 표현, 환유로 나누어 분석 정리하였다.

신은아(2004)는 7차 교육과정 수학교과서에 실린 내용을 귀납적 추론 사례 내용과 유추 내용으로 나누었다. 귀납적 추론과 유추의 사례 분석을 통해 교사는 수학학습 지도 시 학생들에게 스스로 탐구하고 여러 가지 방법으로 수학적 원리를 생각해 볼 수 있는 기회를 줄 수 있다고 하였다. 이종희, 김진화, 김선희(2003)는 중학생을 대상으로 한 수학 문장제 해결과 유추 연구를 통해 유추에 의한 문장제 해결과정을 분석하였다. 유추에 의한 추론과정은 표상 형성, 인출, 사상, 적합, 도식 형성을 거치며 이 때 바탕영역의 지식, 대상 유사성과 관계 유사성이 문제해결에 영향을 준다고 하였다.

이경화(2009)는 영재아들을 대상으로 한 수업에서 유추적 사고를 적극적으로 강조하였을 때, 학생들이 어떤 반응을 보이며, 실제로 유추적 사고가 이들의 수학적 발견을 어떤 방식으로 돕는지 알아보았다. 유추적 사고는 이미 알고 있던 개념을 재해석하고, 새로운 관점으로 변형하게 하는 역할을 하였으며, 새로운 지식의 발견에 도움을 주는 것으로 나타났다.

따라서 본 연구는 수학영재 학생들이 유추를 활용하여 이차곡면을 탐구하는 과정에서 겪는 어려움은 무엇인지, 그리고 탐구형 소프트웨어인 Cabri 3D의 활용이 학생들의 유추활동에 어떠한 영향을 미치는지를 중심으로 알아본다는 점에서 선행연구와 차별성을 갖는다고 하겠다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 방법

연구목적을 달성하기 위해 영재교육원 사사과정에 참여하고 있는 중학교 3학년 2명을 대상으로 이차곡선과 유추에 대한 선행학습을 실시하였다. 학생들은 어느 정도 선수학습을 한 상태였기 때문에 이차곡선을 학습하는데 무리가 없었으며, 여기서 이차곡선은 교과서에 나오는 정도만 다루었다. 또한 유추에 관해서는 학생들이 영재교육원 심화과정에서 학습하였기 때문에 간단히 설명하고 넘어갔다. 그 후 본 연구에서 학생들은 유추를 통해 이차곡면을 탐구하고, 그 과정에 Cabri 3D를 활용하도록 하였다.

본 연구는 영재교육원 사사과정 수업 중에 나타나는 학생들의 탐구활동 결과를 분석하는 형태로 이루어지며, 학생 2명을 대상으로 관찰, 발문, 대화, 그리고 면담을 통해 자료를 수집하고 질적 사례연구를 실시하였다.

2. 연구 대상

유추를 통한 이차곡면의 탐구활동에서 겪는 어려움과 Cabri 3D 활용의 영향에 대해 알아보기 위하여 지방 중소도시인 S시의 대학 부설 과학영재교육원 사사과정에 참여하고 있는 중학교 3학년 2명을 대상으로 연구를 진행하였다. 각 학생들의 특성은 다음과 같다.

가. 학생 A

학생 A는 평소에는 산만한 편이지만 수업 중에는 집중을 잘하는 편이다. 성격은 활발하고 친구들과의 관계도 원만하며 장난도 잘 치는 학생이다. 성적은 상위권이며 수학은 거의 100점을 받는다.

수학공부를 하는 이유는 어려운 문제를 풀고 난 뒤의 희열에 있다고 하였다. 풀리지 않는 문제를 해결하기 위해 노력하면 대개 성공할 수 있는데 이 과정을 통해 기쁨을 얻고, 더욱이 수학적 실력이 향상된다고 했다. 또한 수학사에 나오는 풀리지 않은 문제에 대해서도 관심이 많으며 언젠가는 꼭 해결하고 싶다고 했다.

그리고 어릴 때부터 수학 공부를 하면서 지겨웠던 적도 있었지만 그 시간들이 쌓여 본인의 수학적 능력이 많이 향상되었다고 했다. 초등학교 고학년 때부터는 여러 경시대회에 참가해 상도 받았으며 그러한 경험으로 인해 수학을 더 열심히 해야겠다는 열정이 생겨났다고 했다.

나. 학생 B

학생 B는 평소 수업태도가 바르고 집중을 잘하는 편이다. 성격은 바르고 진중하며 조용한 편이지만 친구들과 함께 있을 때에는 장난도 치고 이야기도 많이 하는 학생이다.

수학을 공부하는 이유에 대해서 머리가 좋아지기 때문이라고 했다. 문제를 해결하는 과정에서 수학적으로 사고하게 되고, 이러한 사고가 논리적으로 생각할 수 있도록 도와준다

고 했다. 또한 이러한 수학적 힘은 수학 과목뿐 아니라 다른 과목을 학습하는데도 도움을 준다고 하였다. 특히 복합한 문제 상황에서 요점을 파악해내는 능력이 향상되었다고 했다. 여러 대회에 나가서 상도 받고, 높은 수학 성적으로 인해서 수학에 대한 자신감을 가질 수 있었으며, 이러한 자신감으로 인해서 어려운 문제라 할지라도 도전하고, 해결할 수 있다는 마음이 생겼다고 했다.

3. 자료 수집

본 연구에서 사용한 분석을 위한 주된 자료는 학생들이 기록한 활동지이며, 그들이 기록한 내용 중 용어나 표현 등에 대해 정확한 확인이 필요한 경우에는 수업 후 면담을 실시하였다. 학생들의 유추를 통한 이차곡면의 탐구활동에 직접적인 영향을 미치지 않도록 수업하는 것이 중요하였기 때문에, 수업은 전체 학급을 대상으로 하는 설명보다는 개별 활동을 중심으로 진행되었다. 그러므로 학생들의 개별 활동지에 나타난 사고과정 관련 자료와 수업 중과, 끝난 후의 면담 자료는 이 연구에서 가장 핵심적인 것이다.

연구를 실시하는 동안 학생들의 유추활동을 관찰하고, 그러한 과정을 기록한 자료를 분석하였다. 이러한 활동을 통해서 학생들이 어느 부분에서 어려움을 겪는지 알아보았다. 그리고 학생들이 어려움을 겪고 있을 때 적절한 발문을 제시하였으며, 이러한 발문을 통해서 학생들이 어떻게 어려움을 해결해 가는지, 학생들의 유추활동에 어떠한 영향을 미치는지 알아보았다. 다만 학생들이 내용을 유추할 수 있도록 충분한 시간을 주어야 하며, 스스로 이차곡면을 유추할 수 있도록 발문을 선택해야 한다.

그리고 연구가 진행되는 동안이나 종료된 이후에 자연스러운 대화 형식의 면담을 실시하였는데 이러한 면담을 통해서 학습하는 동안 겪은 어려움이나 Cabri 3D의 활용에 대한 영향을 알아보았다. 모든 탐구활동이 종료한 후에는 연구에 대한 전반적인 학생들의 생각과 소감을 들어볼 수 있었다. 면담은 유추를 통해 이차곡면을 탐구하는데 겪는 어려움이 무엇인지, Cabri 3D의 활용이 유추에 어떠한 영향을 미치는지 알아보기 위한 내용으로 연구 참여자의 동의를 얻어 녹음기를 사용하였다.

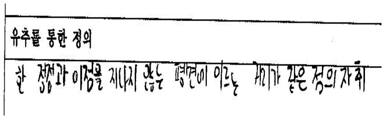
IV. 연구 결과 및 분석

학생들이 이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선)의 정의, 그래프, 식을 입체도형인 이차곡면으로 유추하는 활동을 관찰해본 결과 연구문제에 대해 다음과 같은 내용을 확인해 볼 수 있었다.

1. 유추를 활용하여 이차곡면을 탐구하는 과정에서 겪는 어려움은 무엇인가?

이차곡면을 유추하는 탐구과정에서 학생들은 가장 먼저 개념유추를 활용하여 정의를 유추하려고 시도하였다. 학생들은 이 과정을 어려움 없이 해 나갔는데 이는 아래 학생B의 그림을 보면 알 수 있듯이 이차곡면의 정의를 유추하는데 있어서 수정해야 할 부분이 어

디인지 정확히 알고 있었다는 것을 확인해 볼 수 있다. 이는 학생A 역시 마찬가지이다.



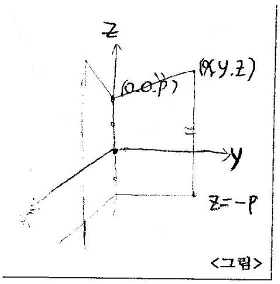
유추를 통한 정의

한 정점과 이 점을 지나지 않는 평면에 이르는 거리가 같은 점의 자취

[그림 1] 학생B의 이차곡면(포물면) 정의 유추과정

유추한 정의를 바탕으로 그래프와 식을 유추하려고 하였는데 이 과정에서 학생들은 이차곡면의 식 보다 그래프를 먼저 유추하려고 하였다.

먼저 3차원 좌표축을 잡고, 그 위에 초점 $(0,0,p)$과 평면 $z=-p$을 그리고 난 뒤, 초점과 이 점을 지나지 않는 임의의 평면에 이르는 거리가 같은 점들을 그리기 시작하였다.



[그림 2] 학생B의 이차곡면(포물면) 그래프 유추과정

여기서 학생이 $z=-p$를 평면의 형태로 나타냈다는 것을 알 수 있는데, 이는 학생이 $z=-p$를 평면으로 인식하고 있다는 것으로 이것은 학생들의 공간에 대한 이해수준이 어느 정도는 된다는 것을 의미한다. 하지만 두 학생 모두 이차곡면의 그래프를 위 그림 정도밖에 유추해 내지 못했고, 더 이상 어떻게 해야 할 것인지 생각해내지 못했다. 즉, 학생들은 3차원 좌표 상에서 초점과 이 점을 지나지 않는 임의의 평면까지의 거리가 같은 점들을 몇 개 찍기는 했지만, 이차곡면의 그래프를 완벽하게 유추해 내지는 못했다. 이는 간단한 입체도형을 보기만 했을 뿐 직접 정의를 바탕으로 그려보는 경험이 없었기 때문에 학생들은 이차곡면의 그래프를 유추하는데 어려움을 겪은 것으로 보인다.

이차곡면의 식을 유추하는 과정은 이차곡선에서 식을 유도하는 과정과 거의 유사하다. 학생들은 방법유추를 활용하여 식을 전개해 나갔지만 이차곡면의 표준형이 어떤 형태인지 모르기 때문에 마지막에 식을 정리하는데 어려움을 겪었다.

연구자: 그래? 그럼 정리하는 과정에서 어려웠던 부분은 뭐야?

학생B: 처음에는 이차곡선의 식 유도과정대로 이차곡면의 식을 유추 했는데요…. 그렇게 식을 전개하다 보니까 복잡해져서 마지막에 식을 어떻게 정리해야 할지 잘 모르겠어요.

연구자: 그랬구나. 그럼 마지막에 식을 어떻게 정리했어?

학생B: 아무래도 이차곡선과 비슷한 형태로 정리하는 게 가장 나을 거 같아서…

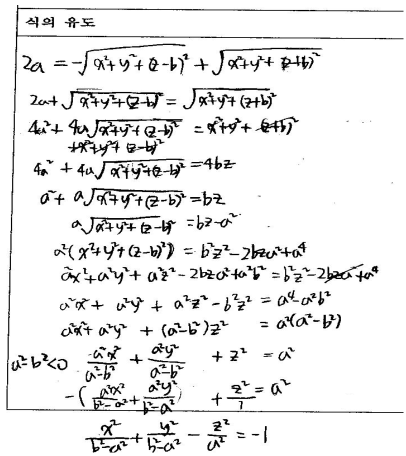
연구자: 이차곡선이랑 비슷한 형태?

학생B: 네. 이차곡면이니까 이차곡선이랑 비슷하게 나오지 않을까 생각했거든요.

연구자: 그랬구나. 그럼 이차곡선과 비슷한 형태로 정리하는 건 어땠어?

학생B: 이차곡면의 식을 모르니까 최대한 이차곡선의 식이랑 비슷하게 하려고 했는데 어렵더라고요. 또 맞게 한건지도 잘 모르겠고…

면담을 통해서 학생B가 이차곡면(쌍곡면)의 식을 유추하는 과정에서 마지막에 식을 어떻게 정리해야 할지, 그리고 이차곡선의 표준형과 비슷한 형태로 표현하는데 어려움을 겪었다는 것을 알 수 있다. 학생은 이차곡면의 표준형에 대해서 모르기 때문에 자신이 유추한 식이 옳은지, 아닌지에 대해서도 확신할 수 없었다. 즉, 학생은 이차곡면의 식을 표준형으로 표현하려고 시도하는 과정에서 어려움을 겪었다.



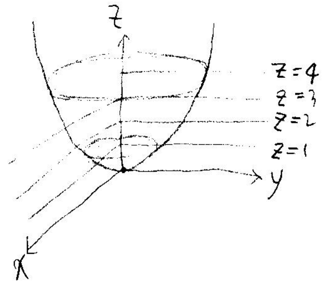
[그림 3] 학생A의 이차곡면(쌍곡면) 식 유추과정

위의 그림에서 우리는 마지막 식에서 우변을 -1로 정리한 것을 확인할 수 있다. 타원면에서는 1로 정리를 했는데, 쌍곡면에서는 -1로 정리한 이유를 분석해 보면 일반적으로 식을 정리할 때 첫 항에 음수가 오는 경우는 거의 없기 때문으로 보인다.

우리는 이차곡선을 토대로 유추한 이차곡면의 내용이 반드시 참이라고 주장할 수 없다는 것을 알고 있다. 왜냐하면 유추는 새로운 진리를 발견하는 도구이지, 얻어진 명제의 타당성을 보장하지는 못하기 때문이다. 유추를 통해서는 단지 가정을 할 수 있을 뿐이다. 유추에 의한 추론의 내용은 그 타당성이 입증되거나 기각되어야 한다. 그렇기 때문에 우리는 유추한 이차곡면의 타당성에 대해서 반드시 확인과정을 거쳐야 한다.

학생들은 유추한 이차곡면의 식을 그래프로 표현하는 과정을 통해서 유추한 이차곡면을 확인하려고 하였다. 이는 가장 간단한 확인방법으로, 학생들은 유추한 이차곡면의 식

에 $z=0,1,2\cdots$을 대입하여 개략적인 그래프를 표현하려고 시도하였다.



[그림 4] 학생A의 이차곡면(포물면) 확인과정

또한 학생들은 유추한 이차곡면의 초점을 포함하고 xy 평면에 수직인 임의의 평면과 이차곡면의 교선의 식을 찾아보는 과정을 통해서 확인하려고 하였다.

$x=0$ (yz평면)으로 잘랐을때의 교선이

$\frac{y^2}{4p}=z$

$y^2=4pz$로 포물선이 된다.

[그림 5] 학생B의 이차곡면(포물면) 확인과정

이러한 과정을 통해서 구한 교선이 이차곡선의 형태라는 것을 확인할 수 있으며, 이를 통해서 본인이 유추한 이차곡면의 내용이 틀리지 않았음을 확인할 수 있다.

특히, 학생들은 기존에 알려진 이차곡면과의 비교를 통해서 본인이 유추한 이차곡면이 기존에 알려진 이차곡면의 특수한 형태라는 사실을 알아냈고, 이러한 차이점이 발생하게 된 원인이 무엇인지에 대해서 알아내는데 어려움을 겪었다.

예를 들면, 기존에 알려진 타원면의 식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$인데 반해, 학생들이 유추한 타원면의 식은 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$이었다. 두 타원면의 식에 각각 xy평면과 평행한 평면 $z=0$을 대입해보았다. 기존에 알려진 타원면과 평면 $z=0$의 교선은 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$인데 반해, 본인들이 유추한 타원면과 평면 $z=0$의 교선은 원 $x^2+y^2=b^2$이라는 것을 확인할 수 있었다. 학생들은 유추과정이 잘못된 것은 아닌지 다시 검토하였지만, 잘못된 점을 찾지 못했다. 면담에서 학생B는 이차곡면의 식을 유추할 때 초점을 특정한 좌표 $(0,0,p)$에 놓아서 이러한 차이점이 발생했다고 생각했다. 그래서 임의의 좌표 (a,b,c)에 초점을 놓고 다시 이차곡면을 유추를 해보았지만 그래프의 위치나 폭만 바뀔 뿐, 기존에 알려진 이차곡면의 형태로 유추되지는 않았다.

이처럼 학생들은 본인이 유추한 이차곡면이 왜 기존에 알려진 이차곡면에 비해서 특수

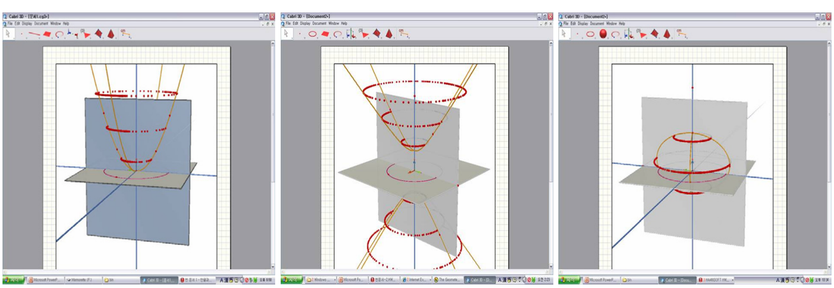
한 형태인지 알아내지 못했고, 더욱이 유추를 통해서 기존에 알려진 이차곡면의 형태가 나올 수 있는지 없는지에 대해서 확인하지 못했다. 하지만 학생들은 유추한 이차곡면을 확인하는 과정을 통해서 이차곡면에 대해 보다 자세히 이해할 수 있었으며 기존에 알려진 이차곡면의 형태를 유추하려고 시도하는 과정을 통해서 유추 자체에 대해 깊이 사고할 수 있는 기회를 갖게 되었다.

유추를 통한 이차곡면의 탐구과정을 모두 마치고 난 뒤, 면담을 통해서 연구에 대한 학생들의 전반적인 소감을 들어볼 수 있었다. 본 연구에 들어가기 전에 학생들은 영재교육원 심화과정에서 유추에 대해서 즉, 개념유추와 방법유추에 대해서 학습한 다음 간단한 예를 살펴봄으로써 유추의 정의와 종류에 대해서 이해하였고, 그 후 유추를 실제 수학문제에 적용해 보았다. 이 과정에서 학생들은 어려움을 겪었지만 이러한 어려움은 유추에 대해서 보다 확실히 이해하고, 유추를 실제 수학문제에 적용해보는 탐구활동을 통해서 극복해 나갈 수 있을 것으로 보인다.

2. Cabri 3D의 활용이 학생들의 유추활동에 어떠한 영향을 미치는가?

학생들은 유추과정에서 생각해내지 못한 이차곡면의 그래프를 Cabri 3D를 활용하여 그릴 수 있지 않을까 생각했다. Cabri 3D에는 이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선)을 표현할 수 있는 단축버튼은 있지만 이차곡면을 표현할 수 있는 단축버튼이 없다. 즉, Cabri 3D가 이차곡면의 그래프를 한 번에 표현해주지 못하기 때문에 학생들은 이차곡선의 그래프를 어떻게 활용해야 할지 스스로 찾아야 한다. 학생들은 Cabri 3D 화면상에서 3차원 좌표축을 잡고, yz 평면에 이차곡선의 그래프를 표현했지만 더 이상 어떻게 해야 할지 생각해내지 못했다.

Cabri 3D를 활용하여 이차곡면의 그래프를 표현하는 것은 중학교 1학년 때 배운 회전체를 활용하면 가능하다. 하지만 학생들은 회전체에 대해서 쉽게 생각해 내지 못했기 때문에 이차곡선과 이차곡면의 관계와 유사한 원과 구의 관계에 대해서 생각해 보도록 하였고 학생들은 Cabri 3D 화면상에 표현된 이차곡선의 그래프를 회전이동 시켜 이차곡면의 그래프를 표현하고자 하였다. 이렇듯 아이디어를 찾아내는데 어려움을 겪었지만 두 학생 모두 회전체를 이용하여 이차곡면을 그래프로 표현하였다.



[그림 6] 학생B의 Cabri 3D를 활용한 이차곡면 그래프 작도과정

위의 그림과 같이, Cabri 3D를 활용하여 완성된 그래프는 이차곡면을 완벽하게 표현하지는 못하지만 학생들은 기존에 알고 있는 회전체와 이차곡선의 그래프를 이용하여 이차곡면의 그래프를 표현할 수 있기 때문에 생각해내기 쉽지 않았던 이차곡면의 그래프를 유추하는데 도움이 되었다.

이러한 활동을 마치고 난 뒤, 학생들은 유추한 이차곡면을 확인하는 과정, 특히 유추한 이차곡면의 초점을 포함하고 xy 평면에 수직인 임의의 평면과 이차곡면의 교선을 찾아보는 과정에서 이를 활용할 수 있지 않을까 생각했다. 물론 학생들은 이 과정을 이미 식으로 확인했지만, 그림을 통해서도 확인할 수 있다면 본인이 유추한 이차곡면의 내용에 대해 더 확신을 가질 수 있을 것이다.

학생들은 이차곡면의 그래프가 표현되어 있는 Cabri 3D 화면상에 이차곡면의 초점을 포함하고 xy 평면에 수직인 임의의 평면을 그렸다. 그 후 임의의 평면과 이차곡면의 교선을 구하려고 하지만 Cabri 3D를 활용하여 표현된 이차곡면의 그래프가 면의 형태가 아니라 평면과의 교선을 확인할 수 없었다. 이는 Cabri 3D를 활용하여 표현된 이차곡면의 그래프가 완벽한 형태가 아니라, 자취남기기로 표현이 되었기 때문이다. 결국, 학생들은 Cabri 3D를 활용하여 유추한 이차곡면을 확인하지 못했지만, 이러한 과정을 통해서 학생들은 소프트웨어에 대해서 생각해보는 기회를 갖게 되었다. 즉, Cabri 3D 자체에 이차곡면을 표현할 수 있는 단축버튼이 없고, 또 다른 표현방법을 알지 못하기 때문에 이차곡면의 그래프를 완벽한 형태로 표현하기 어렵다. 그렇기 때문에 이차곡면의 그래프가 어떤 형태인지 확인하는 것 이상의 내용을 Cabri 3D를 활용하여 알아내기는 힘들다. 그래서 Cabri 3D의 활용이 유추한 이차곡면을 확인하는 과정에서는 도움이 된다고 보기 어렵다고 할 것이다.

V. 결론 및 제언

본 연구의 목적은 유추를 통한 이차곡면의 탐구과정에서 학생들이 겪는 어려움과 이러한 유추활동에 Cabri 3D가 미치는 영향을 조사하는 것이다. 연구결과로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, 학생들은 이차곡면의 그래프를 생각하는데 어려워했다. 학생들은 먼저 이차곡면의 정의에 대한 유추는 별 어려움 없이 해냈다. 그 후 학생들은 유추한 이차곡면의 정의를 바탕으로 이차곡면을 그래프로 표현하려고 하였다. 포물면의 경우 3차원 공간상에서 초점과 평면까지의 거리가 같은 점들이 무수히 많기 때문에 어디에 위치하는지 찾기 어려워 학생들은 그래프가 어떤 형태인지 생각해내지 못했다. 즉, 학생들은 2차원이 아닌 3차원에서 그래프를 생각하는 것에 익숙하지 않기 때문에 이차곡면의 그래프를 유추하는데 어려움을 겪은 것으로 보인다.

둘째, 학생들은 이차곡면을 유추하는 과정에서 구한 식을 표준형으로 표현하는데 어려워했다. 이차곡면의 식을 유추하는 과정은 방법유추를 활용하면 이차곡선의 식을 유도하

는 과정과 거의 유사하기 때문에 식의 전개과정을 거치면서 이차곡선의 표준형과 비슷한 형태로 정리하려고 하였다. 하지만 학생들은 본인이 유추한 식이 옳은지, 아닌지에 대해서도 확신할 수 없었고 이차곡면의 표준형에 대해서 모르기 때문에 식을 정리하는데 약간의 어려움을 겪은 것으로 나타났다.

셋째, 학생들은 유추한 이차곡면이 일반적인 이차곡면의 특수한 형태임을 확인하는 과정을 어려워했다. 학생들은 유추한 이차곡면의 식을 그래프로 표현해보기도 하고, 유추한 이차곡면의 초점을 포함하고 xy 평면에 수직인 임의의 평면과 이차곡면의 교선을 찾아보는 과정을 통해서 확인하였다. 또한 학생들은 기존에 알려진 이차곡면과의 비교를 통해서 본인이 유추한 이차곡면이 기존에 알려진 이차곡면의 특수한 형태라는 사실을 알아냈고, 학생들은 이러한 차이점이 발생한 원인이 무엇인지 찾으려고 시도했지만, 그에 대해서는 명확하게 밝히지 못했다. 본 연구에서는 유추하는 과정에서 이차곡면의 정의, 그래프, 식의 내용만 다루었고 이러한 탐구과정에서도 학생들은 어려움을 겪었지만, 이러한 어려움은 유추를 실제 수학문제에 적용해보는 활동을 통해서 극복해 나갈 수 있을 것으로 여겨진다.

넷째, Cabri 3D의 활용은 학생들이 이차곡면의 그래프를 생각하는데 도움이 되지만 유추한 이차곡면을 확인하는 과정에는 도움이 된다고 보기 어렵다. Cabri 3D에는 이차곡면을 표현할 수 있는 단축버튼은 없기 때문에 이차곡선의 그래프를 활용하여 이차곡면의 그래프를 어떻게 표현하느냐 하는 것이 문제이다. 학생들은 Cabri 3D를 활용하여 이차곡면의 그래프를 표현하는데 처음에는 어려움을 겪었지만 회전체와 이차곡선의 그래프를 이용하여 이차곡면의 그래프를 표현할 수 있기 때문에 생각해내기 쉽지 않았던 이차곡면의 그래프를 유추하는데 도움이 되었다. 그렇지만 학생들은 유추한 이차곡면을 확인하는 과정에서 Cabri 3D를 활용하여 이차곡면의 초점을 포함하고 xy 평면에 수직인 임의의 평면과 이차곡면의 교선을 찾으려 했지만 그러지 못했다. 학생들은 이러한 결과에 대해 쉽게 이해하지 못했지만 이러한 과정을 통해서 Cabri 3D의 기능에 대해서 생각해보는 기회를 갖게 되었다.

이상의 결과에서 보듯이 전혀 사전지식이 없는 이차곡면을 유추하는 과정은 학생들에게 그리 쉽지만은 않았다. 유추를 통해 직접 정의를 구성해보고, 주어진 그래프를 보는 것이 아니라 직접 그래프로 표현해보고, 주어진 표준형에 조건들을 대입해서 식을 찾는 것이 아니라 처음부터 표준형이 어떻게 되는지를 찾아보는 경험을 하도록 하였다. 이러한 수업은 시간이 많이 소요될 뿐만 아니라, 대다수의 학생들에게 어려움이 있겠지만 교사는 그러한 어려움을 극복하는 과정 즉, 수학하는 활동을 통해서 보다 수준 높은 사고를 경험할 수 있는 기회를 제공하여 학생들이 수학적 힘을 기를 수 있도록 힘써야 할 것이다. 또한 창의적으로 문제를 해결하는 과정을 통해 수학에 흥미를 느낄 수 있도록 수학을 탐구하는 중요한 방법 중 하나인 유추를 이용한 교수-학습방법에도 많은 관심을 가져야 할 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

강시중 (1987). **수학교육론.** 서울: 교육출판사.

고은성, 이경화, 송상헌 (2008). 수학영재 학생들의 정다면체 정의 구성 활동 분석. **영재교육연구, 18**(1), 53-77.

교육인적자원부 (1998). **수학과 교육과정.** 교육부 고시 제 1997-15호. 서울: 대한교과서(주).

교육인적자원부 (2007). **수학과 교육과정.** 교육부 고시 제 2007-79호. 서울: 대한교과서(주).

김남희 (2006). 문제해결력 신장을 위한 Cabri 3D의 교육적 활용. **수학교육학연구, 16**(4), 345-366.

박상국 (2006). **탐구형 소프트웨어를 활용한 '삼수선의 정리'의 지도 및 효과분석.** 석사학위논문. 한국교원대학교.

성필용 (2004). **삼각형과 사면체 사이의 유추에 관한 연구.** 석사학위논문. 경상대학교.

송순정 (2003). **유추를 활용한 문제해결 지도에 관한 연구.** 석사학위논문. 인천교육대학교.

신동선, 류희찬 (1996). **수학교육과 컴퓨터.** 서울: 경문사.

신은아 (2004). **귀납적 추론과 유추의 교과서 사례분석.** 석사학위논문. 경북대학교.

우정호 (1998). **학교수학의 교육적 기초.** 서울: 서울대학교 출판부.

우정호 (2005). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울: 서울대학교 출판부.

이경화 (2009). 수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할. **수학교육학연구, 19**(3), 355-369.

이경화 (2009). 영재아들의 세 유형의 유추 과제 해결. **수학교육학연구, 19**(1), 45-61.

이승우, 우정호 (2002). 학교수학에서의 유추와 은유. **수학교육학연구, 12**(4), 523-542.

이신자 (2009). **초등학교 4학년 학생의 수학문제해결에서 나타나는 유추적 사고과정 분석.** 석사학위논문. 경인교육대학교.

이용률, 성현경 (1991). **수학교육론.** 서울: 교학연구사

이종희, 김진화, 김선희 (2003). 중학생을 대상으로 한 대수 문장제 해결에서의 유추적 전이. **한국수학교육학회지시리즈A, 42**(3), 353-368.

장혜원, 이남숙 (2003). 공간적 능력 요인을 반영한 기하학적 사고수준 측정 문항 개발의 가능성 검토. **대한수학교육학회 제 24회 추계 학술대회 논문집.**

정유정 (2008). **중등 수학교과서에서 나타난 유추 사례 분석.** 석사학위논문. 성균관대학교.

채지연 (2007). **조작활동과 유추를 통한 분수 나눗셈 프로그램 개발 및 적용 효과 분석.** 석사학위논문. 광주교육대학교.

최대호 (1998). **해석기하학과 사영기하학.** 서울: 교우사

최종근 (1999). **학습자 특성에 따른 인지과정 요소의 차이 분석: 언어 유추 문제해결 과정을 중심으로.** 석사학위논문. 서울대학교.

한인기 (2001). 유추를 활용한 무게중심 탐구에 관한 연구. **경상대 중등교육연구원 중등교육연구, 13,** 205-215.

한인기, 에르든예프 P. M (2005). **유추를 통한 수학탐구.** 서울: 승산.

芮庸臺 (1998). **공간도형의 해석기하학적 연구.** 석사학위논문. 경북대학교.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). *Ethnography and Qualitative design in educational research.* Orlando, FL: Academic Press.

English, L. D. (1997). (Ed.). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images.* Mahwah. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. D. (2004). (Ed.). *Mathematical and Analogical reasoning of young learners.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Geddes, D., & Forthunato, I. (1993). Geometry: Research and Classroom Activity. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics.* NewYork: Macmillian.

Genter, D. (1983). Structure mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive science, 7*(2), 155-170.

Goetz, J. P., & LeComptc, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research.* Orlando, FL: Academic Press.

NCTM (1989). **학교 수학의 교육과정과 평가 규준.** 서울: 경문사.

NCTM (2000). **학교수학의 원리와 규준.** 서울: 경문사.

Polya, G. (2003). **수학과 개연추론(1).** 서울: 교우사.

Polya, G. (2005). **어떻게 문제를 풀 것인가.** 서울: 교우사.

Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets a process of abstraction: The case of Ben. *Journal of Mathematical Behavior, 21,* 1-23.

= Abstract =

An Analysis on the Inquiry Activities of Quadratic Surface throughout Mathematically Gifted Students' Analogical Inference

Ki Yeol Yang
Sunchon National University
Ui Jin Lee
Sunchon National University

The purpose of this thesis is to examine difficulties students face in the inquiry activities of quadratic surface throughout mathematically gifted students' analogical inference and the influence of Cabri 3D in students' inquiry activities. For this examination, students' inquiry activities were observed, data of inferring quadratic surface process was analyzed, and students were interviewed in the middle of and at the end of their activities. The result of this thesis is as following: First, students had difficulties to come up with quadratic surfaced graph in the inquiry activity of quadratic surface and express the standard type equation. Secondly, students had difficulties confirming the process of inferred quadratic surface. Especially, students struggled finding out the difference between the inferred quadratic surface and the existing quadratic surface and the cause of it. Thirdly, applying Cabri 3D helped students to think of quadratic surface graph, however, since it could not express the quadratic surface graph in a perfect form, it is hard to say that Cabri 3D is helpful in the process of confirming students' inferred quadratic surface.

Key Words: Analogical Inference, Quadratic Surface, Cabri 3D

1차 원고접수: 2011년 3월 25일
수정원고접수: 2011년 5월 30일
최종게재결정: 2011년 6월 7일