

통계적 변이성 설명과 제어 과정에서 나타나는 초등·중학교 학생들의 사고 수준 연구

고 은 성* · 이 경 화**

본 연구에서는 초등학교 5학년과 중학교 2학년 학생들이 측정상황과 우연상황에서 통계적 변이성을 설명하고 제어할 때 나타나는 사고 수준을 살펴본다. 연구결과, 측정상황에서 변이성을 설명할 때는, 원인 설명에 대한 이해가 부족한 수준, 원인 인식이 미흡한 수준, 물리적 원인을 제시하는 수준, 설명되지 않는 원인을 변이성의 근원으로 인식하는 수준, 설명되지 않는 원인을 의사-우연변이성으로 간주하는 수준이 확인되었다. 우연상황에서 변이성을 설명할 때는, 원인 설명에 대한 이해가 부족한 수준, 원인 인식이 미흡한 수준, 물리적 원인을 제시하는 수준, 우연변이성을 인식하는 수준, 분포의 원인을 인식하는 수준이 확인되었다. 변이성을 제어할 때는, 측정상황과 우연상황 모두에서 변이성 제어에 대한 인식이 미흡한 수준, 물리적 제어 방법을 고려하지 않으며 또한 통계적 방법 역시 부적절하게 적용하는 수준, 물리적 제어 방법은 고려하지 않지만 통계적 방법을 적절하게 적용하는 수준, 물리적 제어 방법은 제시하지만 통계적 방법을 부적절하게 적용하는 수준, 물리적 제어 방법을 고려하며 또한 통계적 방법을 적절하게 적용하는 수준이 확인되었다.

1. 서론

100개의 검은 공이 들어있는 상자에서 10개의 공을 10회 복원 추출하는 상황과 검은 공 30개와 흰 공 70개가 들어 있는 상자에서 10개의 공을 10회 복원 추출하는 상황을 비교해 보자. 전자에서는 10회에 걸쳐 꺼내진 결과가 모두 동일하지만 후자에서는 10회에 걸쳐 꺼내진 결과들 사이에 차이가 존재한다. 즉 후자의 상황에서는 자료집합 안에 변이성이 존재한다. 그래서 상자 안에 들어있는 검은 공과 흰 공의 비율을 예측하기 위해, 또는 다음 시행에서 나타날 결과를 예측하기 위해 통계적 사고를 하게 된다(고은성·이경화, 2010a). 변이성은 변화하는 실체의 특징으로(Reading & Shaughnessy,

2004, pp.201-202), 통계학은 역사적으로 사회적 현상과 과학적 현상에 존재하는 변이성을 인식하고, 인정하고, 관찰하고, 설명하려 노력했던 사람들에게 의해 그 토대를 마련할 수 있었으며 발전할 수 있었다(Pfannkuch & Wild, 2004; Stigler, 2002). 변이성은 통계가 존재하는 근본적인 이유로 통계적 사고에 있어 가장 핵심적인 아이디어 중의 하나이다(Watson, 2006, p.21; Wild & Pfannkuch, 1999, p. 235). 이러한 이유로 많은 선행 연구들은 학생들의 통계적 사고를 개발하고 향상시키기 위한 수단으로 변이성에 주목하고 변이성에 대한 추론을 지도할 것을 제안해 왔다. 특히 Wild와 Pfannkuch(1999)는 통계적 변이성에 대한 사고는 변이성을 인식하고 인정하기, 예측, 설명, 통제를 목적으로 변이성을 측정하고 모델링하기, 변이성을 설명하

* 서울대학교 대학원, kes-7402@hanmail.net
** 서울대학교, khmath@snu.ac.kr

고 제어하기, 변이성을 엄두하고 조사전략 이용하기와 같은 요소를 포함한다고 주장한다.

변이성과 변이 추론에 대한 통계교육 연구는 Wild와 Pfannkuch의 이러한 주장을 지지하면서 이들의 연구를 바탕으로 학생들의 변이 추론의 특징, 변이 추론의 위계, 변이 추론의 발달을 도울 수 있는 방법 등에 대한 연구를 진행해 왔다(Reading & Reid, 2004, 2006; Reading & Shaughnessy, 2004; Reid & Reading, 2008; Torok & Watson, 2000; Watson, Kelly, Callingham, & Shaughnessy, 2003). 그러나 대부분의 선행연구들은 통계적 변이성에 대한 여러 사고 요소 중 변이성의 측정과 모델링 부분에 초점을 두고 이루어졌다.

변이성을 설명하고 제어하는 사고 역시 통계적 문제해결에서 중요한 요소이다. 변이성을 설명하려는 사고는 변이성의 원인을 탐색하는 사고로 나타나는데, 이는 통계적 활동에 적극적으로 참여하도록 하는 동기부여가 된다(Ko & Lee, 2011). 그리고 변이성을 제어하려는 사고는 통계적 문제해결 과정에서 변이성을 예측하고 통제할 수 있는 토대를 제공해 준다(Wild & Pfannkuch, 1999). 그러나 변이성을 설명하고 제어하는 사고는 그 동안 통계교육에서 주목받아 오지 못했다. 이는 통계가 수학교육과정에서 다루어지고 있는 것과 무관하지 않다(Watson, 2006). 즉 변이성의 설명과 제어에 대한 사고는 평균이나 분산과 같이 숫자를 사용한 요약치와는 다르며, 또한 그래프를 다루는데 초점을 두고 있지 않아 수학교육과정에서의 적절한 학습 요소로 주목받지 못했다. 그러나 변이성의 설명과 제어에 대한 사고는 통계적 문제해결 전반에 영향을 미치는 것으로 통계적 사고를 지도하고, 통계적 추론 능력을 향상시키기 위한 지도에서 중요하게 다루어져야 할 부분이다(Wild & Pfannkuch, 1999; Watson,

2006). 본 연구에서는 통계적 변이성 관련 과제를 해결하는 과정에서 나타나는 초등·중학교 학생들의 변이성 설명과 제어에 대한 사고 수준은 어떠한지, 또한 각 수준별 특징은 어떠한지 분석한다. 이를 토대로 통계교육에서 통계적 변이성에 대한 학생들의 사고를 발달시키기 위한 시사점을 살펴본다. 학생들의 반응을 병렬적으로 범주화하는 것이 아니라 위계를 고려하여 수준을 구분하는 것은 학습 위계에 대한 유용한 정보를 제공한다는 점에서 교육적인 의미를 찾을 수 있다(Reading & Reid, 2006).

II. 선행연구 검토

1. 변이성 설명

Wild와 Pfannkuch(1999)에 따르면 변이성은 모든 체계에 고유하게 내재해 있기도 하며, 또한 측정과 표집 등 자료 수집 과정에서 발생하기도 한다. 그리고 우연에 의해 발생하기도 한다. 즉 변이성의 근원은 매우 다양하다(p.235). 변이성의 원인에 대한 설명은 통계 과정에서 변이성을 예측하고 통제할 수 있는 토대를 제공해 주며, 자료 분석에 대한 올바른 해석을 가능하게 해 준다. 특히 우연을 변이성의 근원으로 인식하는 사고는 확률과 통계 학습에 있어 매우 중요하며, Pfannkuch(2008)는 현재의 우리 지식으로 설명할 수 없는 변이성이 존재함을 인정하고 이것을 의사-우연(quasi-chance) 변이성으로 간주할 수 있도록 지도하는 것이 통계 교육에 반영되어야 한다고 주장한다. 우연 변이성에 대한 이해는 무작위성 개념에 대한 이해로 이어지는데, 무작위성 개념은 자연현상, 사회현상을 수학적 안목에서 이해하도록 하며, 이들 현상에 대한 합리적인 해석에 기초하

여 판단한다는 것이 무엇을 의미하는지 이해하는 토대가 된다(고은성 · 이경화, 2010b).

Ko와 Lee(2010), Reading과 Shaughnessy(2004), 그리고 Ben-Zvi(2004)의 연구는 변이성의 원인을 조사하는 활동을 통해 학생들은 자발적으로 변이성을 인지할 수 있으며, 또한 이후 통계적 활동에 적극적으로 참여하도록 하는데 동기부여가 될 수 있음을 시사한다. [그림 II-1]은 Ko와 Lee(2011)의 연구에서 학생들의 변이성에 대한 사고를 조사하기 위해 사용한 문제이다. 9개의 값으로 구성된 자료집합 내에 변이성이 존재한다. 물체의 무게를 가능한 정확하게 추정하기 위해 자료집합 내에 존재하는 변이성을 적절하게 제어해야 하는데, 이를 위해 자료가 어떻게 산출되었는지를 고려하여 변이성을 적절하게 다루어야 한다. 이 경우 동일한 물체를 9명의 학생이 각자 측정하여 9개의 값을 얻었다. 그리고 단위량이 상당히 적으므로 15.3에 의해 발생하는 변이성의 원인이 잘못된 측정에 의한 것임을 파악하고 변이성을 제어할 때 이를 고려해야 한다.

Ko와 Lee(2011)의 연구결과에 따르면 변이성의 근원을 조사하고 적절하게 파악한 학생은 타당한 방법으로 물체의 무게를 구한 반면, 그렇지 못한 학생은 타당하지 못한 값을 물체의 무게로 제시하였다. 예를 들면, 어떤 학생은 다른 값들과 차이가 크게 나는 15.3의 원인을 잘못된 측정으로 적절하게 판단함으로써 물체의

무게를 구하는 과정에서 극단적인 값 15.3을 제외하고 참값에 가까운 평균을 구할 수 있었다. 반면 어떤 학생은 값이 서로 다르기 때문에 정확한 값을 알기 위해 평균을 구해야 한다고 생각하였는데, 변이성의 원인을 고려하지 않아 극단적인 값 15.3을 포함해 9개 자료에 대한 평균을 구하였다. 즉 타당하지 못한 값을 물체의 무게로 제시하였다. 이렇게 변이성의 원인에 대한 고려는 이후 자료를 해석하거나 평균을 구하는 것과 같은 통계적 활동에 주요한 영향을 미친다.

Reading과 Shaughnessy (2004, pp.217-221)는 학생들에게 노란 사탕 20개, 빨간 사탕 50개, 파란 사탕 30개가 들어있는 상자에서 10개의 사탕을 무작위로 꺼냈을 때 빨간 사탕이 몇 개 나올지 결과를 예측하고, 그렇게 예측한 이유를 설명해 보도록 하였다. 그리고 학생들의 반응을 토대로 변이성의 근원에 대한 학생들의 인식 수준을 4수준으로 구분하였다. 1수준의 학생들은 변이성의 근원을 외부로부터 찾았는데, 주로 빨간색 사탕이 가운데에 많이 몰려 있었다거나 중앙이 아닌 곳에 퍼져있었다거나 등과 같이 물리적 측면에 주목하였다. 2수준의 학생들은 변이성의 근원으로 색깔의 빈도를 고려했으나 모집단에서의 색깔의 구성비를 충분히 반영하지 못하였다. 3수준의 학생들 역시 변이성의 근원으로 색깔의 비율을 고려했는데, 모집단에 들어있는 빨간 사탕의 비율이 표본에

과학 시간에 9명의 학생이 동일한 물체를 저울로 측정하여 다음과 같은 측정값을 얻었다고 한다.(단위: g)

6.3 6.0 6.0 15.3 6.1 6.3 6.2 6.15 6.3

이 물체의 무게는 얼마라고 생각하는가? 왜 그렇게 생각하는지 그 이유도 함께 설명하십시오.

[그림 II-1] Ko와 Lee(2011)의 연구에서 학생들에게 제시한 문제

들어있는 빨간 사탕의 수에 영향을 미친다는 것을 인식하고 있었다. 4수준의 학생들은 예측 결과에 대한 자신의 생각을 설명할 때 비율과 우연(chance)을 모두 고려하였다. 예를 들면, “약 절반 정도 기대할 수 있지만, 얼마의 우연이 작용할 수도 있어요.”와 같이 모집단의 비율을 참조하여 추출되는 빨간 사탕의 개수를 예측했지만 표본 내의 변이성을 설명하기 위해 우연을 고려하였다. 이렇듯 변이 추론을 하는 상황에서 통계적으로 얼마나 타당한 추론을 도출하는지는 변이성의 근원을 고려하는지 여부에 영향을 받는다.

Ko와 Lee(2011), 그리고 Ben-Zvi(2004)의 연구는 통계적 활동에서 변이성의 원인을 조사하고 설명하는 활동이 중요함을 제시하고 있지만 변이성 설명과 관련하여 학생들로부터 어떤 수준이 나타나는지에 대한 풍부한 정보는 제공하지 못하고 있다. 그리고 Reading과 Shaughnessy(2004)의 연구는 표집 상황에 국한하여 사고 수준을 조사하고 있다. 본 연구에서는 학교수학에서 주로 접하는 측정상황과 우연상황에서 학생들이 변이성을 설명할 때 보이는 사고 수준을 조사한다.

2. 변이성 제어

정확한 예측과 판단을 위해서는 변이성을 제어할 수 있어야 한다(Wild & Pfannkuch, 1999). 변이성에 대한 제어는 연구를 설계하고 자료를 산출하는 과정에서(Reading & Reid, 2004, p.38), 그리고 자료를 요약하는 과정에서 이루어진다(Ko & Lee, 2011). 연구를 설계하는 과정에서 상황을 좀 더 원하는 방향으로 이끌고자 변이성을 제어하고자 하며, 변이성을 요약하는 과정에서 우리는 정확한 예측과 판단을 위해 통계적으로 변이성을 제어하고자 한다. 예를 들

면 측정상황에서 극단적인 값이 나왔을 경우 이러한 변이성을 제어하기 위해 연구의 설계 과정에서 측정방법에 대한 향상을 시도할 수 있으며, 변이성을 요약하는 과정에서 최빈값을 사용하거나 극단적인 값을 제외하고 평균을 구하는 방법을 택할 수 있다. [그림 II-1]의 문제 상황에서 물체의 무게에 대한 정확한 예측과 판단을 위해 15.3과 같은 극단적인 값을 제어하기 위해 자료를 산출하는 과정에서 정교한 도구를 이용하거나, 정확성을 향상시킨 측정방법으로 다시 자료를 얻는 방법으로 변이성을 제어할 수 있게 된다. 그리고 극단적인 값을 제외하고 평균을 구하거나 최빈값을 물체의 무게로 채택하는 등 자료를 요약하는 과정에서 통계적으로 변이성을 제어할 수 있다. 변이성을 제어하는 사고의 중요성에 대해서는 통계학자들과 통계교육 연구자들에 의해 계속적으로 제시되어 왔지만(고은성 · 이경화, 2010a; Ko & Lee, 2011; Snee, 1990; Wild & Pfannkuch, 1999), 변이성을 제어하는 과정에서 학생들이 보이는 사고 수준에 대한 실증적 연구는 매우 부족한 실정이다.

III. 연구 방법

1. 연구 참여자

<표 III-1>은 연구 참여자에 대한 요약이다. 초등학교 5학년의 수학영재학생은 청주시 소재 대학부설 과학영재교육원의 교육생이며 일반학생은 청주시 소재 초등학교에서 선정된 1개 학급의 학생들이다. 중학교 2학년의 수학영재학생은 초등학교 5학년과 동일한 과학영재교육원의 교육생 17명과 서울시 소재 대학부설 과학영재교육원의 교육생 12명으로 구성되어 있다.

중학교 2학년의 일반학생들은 서울시 강남구 소재 중학교에서 선정된 1개 학급의 학생들이다. 이 연구의 목적은 통계적 변이성을 설명하고 제어함에 있어 다양한 수준이 존재한다는 것을 구체적인 사례에 근거하여 확인하여 체계화하는 것이므로, 가능한 다양한 수준의 참여자 집단을 선정해야 한다. 그러나 연구 목적에 완전히 부합되는 정도로 다양한 수준의 참여자 집단을 선정하는 것은 현실적으로 어려움이 야기되어, 초등학교 5학년과 중학교 2학년의 일반학생과 수학영재학생을 연구 대상으로 선정하였다. 이들 집단은 선행학습량, 수학적 사고 수준, 표현 수준 등에서 다양하므로, 통계적 변이성을 설명하고 제어함에 있어 어떤 수준이 나타나는지 확인하는 데 유용한 정보를 제공할 것으로 가정하였다.

<표 III-1> 연구 참여자

구분	초 5	중 2	합계
일반학생	34명	36명	70명
수학영재학생	31명	29명	60명
합계	65명	65명	130명

2. 연구절차 및 과제

문헌분석과 전문가 검토를 통해 문항을 개발한 후 4명의 초등학생과 3명의 중학생을 대상으로 예비 실험을 실시하였다. 예비 실험에서는 7명의 학생 모두에 대해 문항조사와 면담조사가 실시되었는데 다음의 두 가지 사항에 초점을 두고 진행하였다. 첫째, 조사 문항이 변이성에 대한 사고 특징을 평가하는데 적절한지 조사하였다. 즉 조사 문항이 변이성에 대한 사

고를 자극할 수 있는지, 그리고 다양한 범주의 반응을 유도할 수 있는지 조사하였다. 둘째, 문항에서 제시하는 문제 상황과 문항의 형태가 학생들의 수준에 적절한지, 그리고 문항에 사용된 언어가 학생들에게 적절하지 조사하였다. 예비조사 결과를 통해 문항을 수정·보완하였다. [그림 III-1]은 본 연구에 사용된 과제이다. 문제 1-(1)과 문제 2-(1)은 각각 측정상황과 우연상황)에서 학생들이 변이성을 설명하는데 어떠한 사고 특징을 보이는지 조사하기 위해 개발된 것이며, 문제 1-(2)와 (3), 그리고 문제 2-(2)와 (3)은 각각 측정상황과 우연상황에서 학생들이 변이성을 제어하는데 어떠한 사고 특징을 보이는지 조사하기 위해 개발된 것이다.

3. 자료수집 및 분석

먼저 학생들에게 조사 문항을 제시하고 자신의 의견을 기술하도록 하였다. 이때 제시한 학생들의 반응을 토대로 1차 분석을 실시하였다. 1차 분석 결과를 이용해 학생들의 사고 특징을 예비적으로 범주화하고, 또한 면담을 실시할 학생을 선정하였다. 문항에 기술한 학생들의 반응만으로는 어느 범주에 속하는지 구별이 어려운 학생들과 각 범주를 대표하는 전형적인 반응을 보인 학생들이 면담 대상으로 선정되었다. 문항에 대한 학생들의 모든 반응 내용은 워크시트에 정리하였으며, 면담 과정은 모두 녹화 또는 녹음한 후 그 내용을 전사하였다. 학생들의 문항에 대한 반응 내용과 면담을 전사한 내용이 분석 자료로 활용되었다.

자료 분석은 두 단계의 과정을 통해 이루어졌다. 우선 첫 번째 단계에서 학생들이 사용한 용어나 표현을 바탕으로 학생들의 반응을 범주

1) Franklin과 Garfield (2006)는 학교수학에서 경험하고 학습해야하는 변이성을 그 특성에 따라 측정변이성, 고유변이성, 유도변이성, 우연변이성, 표집변이성으로 구분한다. 측정변이성, 고유변이성, 유도변이성의 주된 근원은 물리적 원인으로 이를 대표하여 측정상황에서, 우연변이성, 표집변이성의 주된 근원은 비물리적 원인으로 이를 대표하여 우연상황에서 학생들의 사고를 조사하였다.

화 하였다. 이때의 범주들은 기존의 틀을 사용한 것이 아니라 학생들의 반응을 토대로 귀납적인 과정으로 얻어진 결과들이다(Denzin & Lincoln, 1994; Goetz & LeCompte, 1984). 두 번째 단계에서는 다른 연구자와 함께 인지 발달 모델인 SOLO(Biggs & Collis, 1982)를 사용하여 첫 번째 단계에서 얻어진 범주들을 재범주화하

였다. 학생들 각각의 사고 수준 조사 결과의 신뢰도를 높이기 위해 2인의 연구자가 채점자간 신뢰도(inter-coder reliability) 검사를 실시하였다(성태제, 2002). 사고 수준 조사 결과 변이성 설명에서는 Kappa 계수²⁾가 .880으로, 변이성 제어에서는 .857로 나타났다.

[문제 1] 과학 시간에 9명의 학생이 건전지로 이동하는 하나의 조립 자동차를 이용해 100m 가는데 걸리는 시간을 측정한 결과 다음과 같은 값을 얻었다고 합니다. 다음 물음에 답하십시오.

61 60 63 102 62 61 60 61 60 (단위: 초)

- (1) 9명 학생의 측정 결과가 다양합니다. 왜 이런 결과가 나왔다고 생각하는지 다음에서 모두 고르고, 그 이유를 설명하십시오.
 - ① 도착하는 순간에 정확하게 초시계를 읽는 것이 어렵기 때문이다
 - ② 측정은 운에 영향을 받기 때문이다
 - ③ 다양한 이유 중 설명을 할 수 없는 이유가 존재한다
 - ④ 기타: _____
- (2) 위 자동차의 빠르기를 좀 더 정확하게 구할 수 있는 방법에는 어떠한 것이 있는지 자신의 의견을 쓰시오.
- (3) 위 조립 자동차의 빠르기는 얼마라고 생각합니까? 왜 그렇게 생각하는지 자신의 의견을 쓰시오.

[문제 2] 쉬는 시간에 영희는 친구들과 윷가락 던지기 놀이를 하였습니다. 다음은 10명의 학생이 그림과 같은 윷가락 1개를 각각 20회씩 던진 후 등 부분이 위로 올라온 횟수를 조사한 것입니다.

8 13 15 13 14 14 15 12 14 11

- (1) 10명의 결과가 다양합니다. 왜 이런 결과가 나왔다고 생각하는지 다음에서 모두 고르고, 그 이유를 설명하십시오.
 - ① 학생들마다 윷을 던지는 힘, 던진 높이가 다르기 때문이다.
 - ② 윷을 던지는 것은 운에 영향을 받기 때문이다.
 - ③ 다양한 이유 중 설명을 할 수 없는 이유가 존재한다.
 - ④ 기타: _____
- (2) 등 부분이 올라올 확률을 좀 더 정확하게 구할 수 있는 방법에는 어떠한 것이 있는지 자신의 의견을 쓰시오.
- (3) 자신이 이 윷을 20번 던진다면 등 부분이 몇 번 위로 올라올 것이라 생각하는가? 그렇게 생각하는 이유를 쓰시오.

[그림 III-1] 변이성의 설명과 제어에 대한 사고 조사 과제

2) Kappa 계수는 우연에 의해 두 채점자의 결과가 일치하는 확률을 제거한 것으로, .40~.60이면 '채점자간 신뢰도가 있다', .60~.75이면 '채점자간 신뢰도가 높다', .75 이상이면 '채점자간 신뢰도가 매우 높다'로 분류된다(Fleiss, 1981). 성태제(2002)는 채점자간 신뢰도 추정으로 채점자료에 대한 신뢰성을 인정하는 절대적 기준은 없으나 채점결과가 범주로 부여될 때 Kappa 계수 .75 이상을 제한한다(p.162).

IV. 연구 결과

1. 변이성 설명에 대한 사고 분석

가. 변이성 설명에 대한 사고 특징 분석

문제 1-(1)과 문제 2-(1)에 대한 학생들의 반응을 토대로 측정상황과 우연상황에서 변이성의 원인을 탐색하는 과정에서 나타나는 학생들의 사고 특징은 어떠한지, 이들의 위계는 어떠한지 분석하였다. 분석 결과 측정상황에서 학생들의 반응은 원인 설명에 대한 이해가 부족한 경우, 원인 인식이 미흡한 경우, 물리적 원인을 제시하는 경우, 설명되지 않는 원인을 변이성의 근원으로 인식하는 경우, 설명되지 않는 원인을 의사-우연 변이성으로 간주하는 경우로 특징지을 수 있었으며, 우연상황에서는 원인 설명에 대한 이해가 부족한 경우, 원인 인식이 미흡한 경우, 물리적 원인을 제시하는 경우, 우연변이성을 인식하는 경우, 분포의 원인에 대한 설명까지 확장하는 경우로 특징지을 수 있었다. <표 IV-1>은 각 수준에 속하는 학생

들의 사고 특징을 요약한 것이다.

0수준의 학생들은 변이성의 원인을 설명하는 것이 무엇을 의미하는지 이해하지 못하거나 변이성의 원인을 설명할 필요성을 인식하지 못하였다. 자료들이 서로 다르다는 결과에만 주목하고 왜 그러한 결과가 나타나는지 그 원인에 대해서는 관심을 두지 않았다. 측정상황에서 학생들은 자동차의 빠르기를 측정하면 다른 결과가 나오며, 그렇지만 그 결과는 거의 비슷할 것이라고 설명하는 등 결과가 다양하다는 사실에만 주목하고 무엇 때문에 다양한 결과가 나오는지에 대해서는 고려하지 않았다. 우연상황에서 학생들은 옳은 던지면 둥근 부분이 나오는 경우가 더 많다고 설명하는 등 결과에만 주목하고 왜 그러한 결과가 나오는지에 대해서는 거의 사고하지 않았다. 다음은 0수준에 속하는 학생들 반응의 예이다.

초등학생인 ES06³⁾은 문제 1-(1)에서 ④번을 선택하고 그에 대한 이유를 [그림 IV-1]과 같이 제시하고 있다. 이어지는 면담은 이에 대한 설명이다. 이 학생의 경우 “자동차가 빨리 달릴

<표 IV-1> 변이성 설명에 대한 사고 수준

수준	각 수준에서의 특징	
	측정상황	우연상황
0	원인 설명에 대한 이해 부족: 변이성의 원인을 설명하는 것이 무엇을 의미하는지에 대한 이해가 부족함	
1	원인 인식이 미흡: 주어진 조건이 어떻게 변이성의 원인으로 작용하는지 명확하게 인식하지 못하거나, 적절하지 않은 원인을 변이성의 근원으로 제시함	
2	물리적 원인 제시: 가시적인 물리적 원인을 변이성의 근원으로 제시함.	
3	설명되지 않는 원인을 변이성의 근원으로 인식: 자료에 영향을 미치는 원인들 중 설명이 불가능한 원인이 존재함을 인식함.	우연변이성 인식: 우연(chance)을 변이성의 근원으로 인식함
4	설명되지 않는 원인을 의사-우연 변이성으로 간주: 설명되지 않는 원인으로 인한 변이성을 우연변이성과 유사한 것으로 간주함.	분포의 원인에 대한 설명까지 확장: 표본공간의 특징을 고려하여 변이성의 근원을 설명함으로써 분포의 원인에 대한 설명까지 확장함

3) ES는 초등학생을, MS는 중학생을 나타내며, 숫자는 각 그룹에서 학생을 구분하기 위한 번호를 나타낸다.

때도 있고 느리게 달릴 때도 있어서요.”라고 자동차의 빠르기가 다를 수 있음을 인식하며, 또한 그 차이가 그렇게 크지는 않을 것임을 인식하고 있다. 그러나 자동차의 빠르기에 대한 결과적인 측면에만 주목하고, 자동차의 빠르기가 서로 다르게 나타나는 이유나 원인에 대해서는 고려하고 있지 않다.

자동차의 속력이 차이는 그리 큰 변형이 생긴 않다.

[그림 IV-1] 문제 1-(1)에서 ES06의 반응

연구자: 이게 무슨 뜻인지 좀 더 설명을 해줄 수 있을까?

ES06: 초가 모두 다른데.. 차이는 나지만 많이는 안나고 거의 비슷해요.

연구자: 그러면 이렇게 차이가 나는 것은 왜 그렇다고 생각해?

ES06: 자동차가 빨리 달릴 때도 있고 느리게 달릴 때도 있어서요.

초등학교생인 ES16은 10명의 친구가 옷을 20회씩 던진 후 등근 부분이 나온 횟수를 조사했을 때 그 결과가 다양하게 나오는 이유를 설명하도록 하는 문제 2-(1)에서 ④번을 선택하고 그에 대한 이유를 [그림 IV-2]와 같이 제시하고 있다. 이 학생 역시 옷을 던지면 등근 부분이 나오는 경우가 많다는 결과에만 주목하고 있으며, 이러한 이유가 나오는 원인에 대해서는 고려하고 있지 않음을 알 수 있다.

옷기각을 던질 때 등근이 위로 올라오는 경우가 많기 때문에

[그림 IV-2] 문제 2-(1)에서 ES16의 반응

1수준의 학생들은 주어진 조건이 어떻게 변이성의 원인으로 작용하는지 명확하게 인식하

지 못하거나, 적절하지 않은 원인을 변이성의 근원으로 제시하였다. 측정상황에서 학생들은 운에 의해 자동차가 빨리 도착할 수도 있고 늦게 도착할 수도 있다고 설명하고 있는데, 운은 측정상황에서 적절한 변이성의 원인으로 간주되지 않는다. 우연상황에서 학생들은 옷을 던지는 사람의 몸무게나 키 등을 변이성의 원인으로 제시하고 있는데, 이러한 조건들이 던지는 힘이나 높이, 던지는 각도 등에 영향을 준다는 것을 명확하게 인식하지 못하였다. 다음은 1수준에 속하는 학생들 반응의 예이다.

중학생인 MS09는 측정을 할 때 운이 작용하여 자동차가 더 느려질 수도 있고 빨라질 수도 있다고 생각하였다([그림 IV-3]). 초등학교생인 ES11([그림 IV-4])과 ES08([그림 IV-5])은 각각 옷을 던지는 학생의 체형과 운을 우연상황에서 발생하는 변이성의 근원으로 제시하고 있다.

측정을 할때에 운에 영향을 받아서 더 느려질수도 있고, 빨라질수도있고, 같아질수도 있기 때문이다.

[그림 IV-3] 문제 1-(1)에서 MS09의 반응

그렇게 생각하는 이유는 학생들이다. 키도 다르고 몸집도 다르고 키도 다르고 때문임바.

[그림 IV-4] 문제 2-(1)에서 ES11의 반응

옷을 던질 때 해서 옷이 위로 올라와서

[그림 IV-5] 문제 2-(1)에서 ES08의 반응

2수준의 학생들은 가시적인 물리적 원인을 변이성의 근원으로 제시하였다. 측정상황에서 학생들은 초시계를 읽을 때 발생하는 시간 차이, 건전지의 소모 정도 등 자동차의 속력을 측정하는 상황에서 대표적으로 발생할 수 있는

원인을 변이성의 근원으로 제시하였다. 우연상황에서 학생들은 옷을 던지는 높이, 각도 등과 같이 외부의 물리적 측면을 변이성의 근원으로 제시하였다. 다음은 2수준에 속하는 학생들 반응의 예이다.

초등학생인 ES04는 자동차가 들어오는 시점에 정확하게 초시계를 읽는 것이 어렵다는 점을 변이성의 근원으로 제시하고 있다.

연구자: ○○는 뭐라고 그랬지? 한번 설명해 볼까?

ES04: 진짜 제가 꺾어본 일인데요. 합기도에서도 축구 경기를 했는데요 관장님이 7분에 딱 멈추라 그랬는데요 다 재봤는데 경기가 끝나면 거의 7분 한 3초 2초 1초쯤일 거 같고, 초시계를 (그때 정확하게) 멈추기가 그렇게... 정확한 시간에 멈추기가 어려워서 이렇게 다르게 나오더라고요.

연구자: 음.. 비슷한 경험을 해봤구나. 그것 말고 다른 이유는 없을까?

ES04: (한동안 생각을 한다) 글썄요.. 그것 밖에는 생각나는 게 없어요.

[그림 IV-6]은 초등학생인 ES43이 문제 2-(2)에서 제시한 내용이다. 이 학생의 경우 외부의 물리적인 측면에서 변이성의 원인을 찾고 있다. 즉 옷을 던지는 힘, 높이, 각도 등을 변이성의 원인으로 제시하고 있다.

[그림 IV-6] 문제 2-(1)에서 ES43의 반응

측정상황에서 3수준의 학생들은 자료에 영향을 미치는 원인들 중 설명이 불가능한 원인이 존재함을 인식하였다. 예를 들면, 자동차의 빠르기에 영향을 미치는 원인은 다양하며 이러한 원인들 모두를 설명할 수는 없다고 생각하였

다. 즉 설명이 불가능한 원인이 존재함을 인식하였다. 그러나 이것을 우연상황에 내재해 있는 우연변이성과 유사한 의사-우연변이성으로 간주하는 사고는 보이지 않았다. 다음은 측정상황의 3수준에 속하는 학생 반응의 예이다.

중학생인 MS40의 경우 설명할 수 없는 원인이 존재함을 인식했지만, 이것을 우연변이성과 유사한 성격을 갖는 것으로 인식하기보다는 너무 다양한 원인이 존재해서 모든 것을 다 설명하는 것이 불가능한 것으로 생각하고 있었다.

연구자: 다양한 이유 중에 설명할 수 없는 이유가 존재한다 그랬어 그치? 설명할 수 없는 이유가 뭘 말하는 건지 좀 더 설명을 해줄 수 있을까?

MS40: 다양한 이유가 많은데 그것을 다 설명할 수는 없을 것 같아요.

연구자: 너무 많은 이유가 있어서? 모두 설명을 할 수가 없다고?

MS40: 네. 너무 다양하니까 그걸 다 설명하기가..

연구자: 그럼 그러한 이유들이 옷을 던지는 상황에서 나타나는 이유와 비슷한 것들이야?

MS40: 그거랑은 조금 다른데요.

연구자: 옷의 결과에 영향을 미치는 이유가 있다고 했잖아. 그것과 지금 여기에서 말하는 설명할 수 없는 이유가 비슷하다고 생각을 하고 ③번[다양한 이유 중 설명할 수 없는 이유가 존재하기 때문이다]을 선택한 거야?

MS40: 아니요. 옷에서의 이유랑은 달라요.

우연상황에서 3수준의 학생들은 옷의 실험에서 나타나는 결과가 우연에 영향을 받는다는 것을 인식하였다. 중학생인 MS49는 우연상황의 3수준에 속하는 전형적인 반응을 보인 학생이다. 이 학생의 경우 운, 확률, 우연이라는 용어를 혼용하여 사용하고 있지만, 옷을 던졌을 때의 결과는 옷을 던지는 힘이나 기술과는 다른 우연에 영향을 받는다고 생각하였다.

연구자: 옷을 던지는 것은 순수하게 운과 확률의 영향을 받는다 그랬거든. 여기서 운하고 확률이 좀 다른거야?

MS49: 똑같은 거예요

연구자: 똑같은 말이야?

MS49: 네

연구자: 그럼 확률의 영향을 받는다는 말은 무슨 말이지?

MS49: 던지는 힘이나 그런 것 보다는요, 기술 이런 거 말고, 이 나오는 것은, 반드시 배가 나오거나 등이 나오거나 그러는데 그것은 우연에 의한 것으로... 확률적인 것으로 나와요.

연구자: 확률적인 것으로 나온다? 던지는 힘이나 높이에 상관없이?

MS49: 네

측정상황에서 4수준의 학생들은 설명되지 않는 원인에 의한 변이성을 우연변이성과 유사한 것으로 간주하였다. 예를 들면, 설명되지 않는 원인이 자동차에 영향을 미치는데 이것은 옷의 등근 부분과 평평한 부분이 우연에 의해 결정되는 것과 유사한 원리라고 생각하였다. 중학생인 MS47은 측정상황의 4수준에 속하는 전형적인 반응을 보인 학생이다. 이 학생의 경우 측정상황에서 결과에 영향을 미치는 다양한 원인 중 과학적으로 설명을 할 수 없는 이유가 존재하며, 이것을 옷을 던지는 실험에서 발생하는 상황과 유사한 것으로 생각하고 있다.

연구자: 지금 다양한 이유 중에서 설명할 수 없는 이유가 존재하기 때문이다 그랬어. 그럼 여기에서 설명할 수 없는 이유가 존재한다는 것은 그것이 옷에서 말하면 어떤 운에 가까운 그런 것을 말하는 거야 아니면 좀 다른 걸 머리 속에 염두하고..

MS47: 운에 가까운 거 뭐... 예를 들어서 옷이 어디가 나올지는 아무도 모르잖아요. 어떻게 할 수가 없잖아요. 속도 같은 거는 과학적으로 설명하기 힘들잖아요, 조금 더 빠르고 조금 더 느리고 그런거는...

연구자: 과학적으로 설명하기 힘든 거?

MS47: 네

연구자: 옷에서 운이나 우연 같은 거?

MS47: 네 거의.

우연상황에서 4수준에 속하는 학생들은 표본 공간의 특징을 고려하여 변이성의 근원을 설명함으로써 분포의 원인에 대한 설명까지 확장할 수 있었다. 예를 들면, 중학생인 MS55는 우연상황의 4수준에 속하는 전형적인 반응을 보인 학생이다. 이 학생의 경우 옷은 등근 부분과 평평한 부분 이렇게 두 종류의 표본 공간을 갖는데, 주사위와 달리 등근 부분과 평평한 부분이 대칭을 이루지 않으며 경험에 비추어 봤을 때 등근 부분이 더 많이 나오기 때문에 등 부분이 나온 횟수가 10보다 더 많은데, 등 부분이 나오는 횟수는 항상 일정한 것이 아니라 예를 들어 12를 중심으로 변화가 있을 수 있다고 설명하고 있다. 즉 자료집합의 변이성에 대한 원인을 고려하면서 왜 자료가 그러한 분포를 형성하는지에 대한 원인까지 확장하여 사고하고 있다. [그림 IV-7]은 MS55가 문제 2-(1)에서 학생이 제시한 내용이며, 이어지는 면담은 이에 대한 설명이다.

[그림 IV-7] 문제 2-(1)에서 MS55의 반응

연구자: 여기 ‘매번 같게 나올 수는 없다’라는 게 무슨 뜻인지 설명해 줄 수 있을까?

MS55: 등 부분과 배 부분의 모양이 다르기 때문에 정확하게 확률이 같다고 할 수는 없잖아요. 주사위는 6면이 모두 같으니까 확률이 1/6로 같지만요. 그렇다고 해서 항상 등 부분이 12번, 예를 들어 등 부분이 나올 확률이 12번이라고 하면 항상 12번이 나오는데 아니고 더 많이 나올 수도 있고 더 조금 나올 수도 있고 그렇잖아요.

나. 변이성 설명에 대한 사고 수준 분석
 <표 IV-2>는 각 수준에 속하는 학생들의 빈도를 나타낸 것이다. 측정상황에서 초등학생과 중학생 모두 물리적 원인을 제시하는 2수준의 사고에 가장 많은 학생들이 속하는 것으로 나타났다. 그 다음으로 설명되지 않는 원인을 변이성의 근원으로 인식하는 3수준의 사고에 속하는 학생들의 빈도가 가장 높았는데, 초등학생들의 32.3%가 3수준에 속하는 반면, 중학생들의 경우 15.4%의 학생들만이 3수준에 속하는 것으로 나타났다. 그리고 중학생의 6.2%, 초등학생의 1.5%가 설명되지 않는 원인을 의사-우연변이성으로 인식하는 4수준의 사고에 속하는 것으로 나타났다.

우연상황에서도 측정상황에서와 마찬가지로 초등학생과 중학생 모두 물리적 원인을 제시하는 2수준의 사고에 가장 많은 학생들이 속하는 것으로 나타났다. 그 다음으로 우연변이성을 인식하는 3수준의 사고에 속하는 학생들의

빈도가 가장 높았는데, 초등학생들의 30.8%, 중학생들의 38.5%가 3수준에 속하는 것으로 나타났다. 그리고 중학생의 6.2%만이 분포의 원인에 대한 설명까지 확장하는 4수준의 사고에 속하는 것으로 나타났다.

2. 변이성 제어에 대한 사고 분석

가. 변이성 제어에 대한 사고 특징 분석

문제 1-(2)와 (3), 그리고 문제 2-(2)와 (3)에 대한 학생들의 반응을 토대로 측정상황과 우연상황에서 변이성을 제어하는 과정에서 나타나는 사고 특징은 어떠한지, 이들의 위계는 어떠한지 분석하였다. 분석 결과 학생들의 반응은 변이성 제어의 필요성에 대한 인식이 미흡한 경우, 물리적 제어 방법을 고려하지 않으며 또한 통계적 방법 역시 부적절하게 적용하는 경우, 물리적 제어 방법은 고려하지 않지만 통계적 방법을 적절하게 적용하는 경우, 물리적 제

<표 IV-2> 변이성 설명에 대한 사고 수준의 빈도 요약

수준	측정상황		우연상황	
	초등	중등	초등	중등
0수준: 원인 설명에 대한 이해 부족	4 (6.2)	1 (1.5)	0 (0.0)	1 (1.5)
1수준: 원인 인식 미흡	1 (1.5)	4 (6.2)	10 (15.4)	2 (3.1)
2수준: 물리적 원인 제시	38 (58.5)	46 (70.8)	35 (53.8)	33 (50.8)
3수준: (측정)설명되지 않는 원인을 변이성의 근원으로 인식/(우연)우연변이성 인식	21 (32.3)	10 (15.4)	20 (30.8)	25 (38.5)
4수준: (측정)설명되지 않는 원인을 의사-우연변이성으로 간주/(우연)분포의 원인에 대한 설명까지 확장	1 (1.5)	4 (6.2)	0 (0.0)	4 (6.2)
합계	65 (100.0)	65 (100.0)	65 (100.0)	65 (100.0)
M	2.20	2.20	2.15	2.45
SD	.795	.712	.667	.730

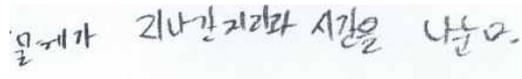
어 방법은 고려하지만 통계적 방법을 부적절하게 적용하는 경우, 물리적 제어 방법을 고려하며 또한 통계적 방법을 적절하게 적용하는 경우로 특징지을 수 있었다. <표 IV-3>은 각 수준에 속하는 학생들의 사고 특징을 요약한 것이다.

0수준의 학생들은 변이성을 제어하는 것에 대한 이해가 부족하였다. 측정상황에서 학생들은 물체가 움직인 거리를 시간으로 나누거나, 정확한 계산을 위해 계산기를 사용하는 등 주어진 자료집합을 정확하게 이용할 수 있는 방법을 제시하거나 변이성을 거부하였다. 우연상황에서 학생들은 원하는 결과를 얻기 위해 우연을 배제할 수 있는 실험 방법을 제안하거나 옷의 둥근 부분과 평평한 부분의 면적의 비율 이용하고자 하였다. 다음은 0수준에 속하는 학생들 반응의 예이다.

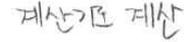
문제 1-(2)에서 초등학생인 ES09는 자동차의 빠르기 구하는 공식을 제시하고 있으며([그림 IV-8]), 중학생인 MS37은 계산을 정확하게 하는 것이 자동차의 빠르기를 정확하게 구하는 방법이라 생각하였다([그림 IV-9]).

[그림 IV-10]은 초등학생인 ES25가 문제1-(2)에서 제시한 내용이며, 이어지는 면담은 이에 대한 설명이다. 이 학생의 경우 측정을 통해 얻은 자료집합에 변이성이 존재하는 것을 거부

<표 IV-3> 변이성 제어에 대한 사고 수준

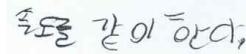


[그림 IV-8] 문제 1-(2)에서 ES09의 반응



[그림 IV-9] 문제 1-(2)에서 MS37의 반응

하고 있다. 변이성이 존재하지 않도록 하기 위해 같은 속도의 자동차를 이용할 것을 제안하고 있다.



[그림 IV-10] 문제 1-(2)에서 ES25의 반응

연구자: 자동차의 빠르기를 정확하게 구할 수 있는 방법에는 어떤 것이 있습니까? 이렇게 물었더니 ○○은 속도를 같이 한다 그랬어. 이게 무슨 뜻인지 좀 더 설명해줄 수 있을까?

ES25: 만약에 속도가 하나는 느리고 하나가 빠르면 요 빠르기는요 좀 더 정확하게 잴 수 없을 것 같아요. 그래서 속도를 같은 것을 가지고.

연구자: 그래서 이에 속도를 같은 것으로 하면 정확할 것 같아서?

ES25: 네

ES09, MS37, ES25 모두 측정상황에 내재해 있는 변이성을 자료 수집 단계에서 물리적으로

수준	각 수준에서의 특징
0	변이성 제어에 대한 인식 부족: 변이성을 제어하는 것이 무엇인지에 대한 이해가 부족함.
1	물리적 제어 방법 미고려 & 통계적 방법의 부적절한 적용: 자료 수집 과정에서 시도할 수 있는 물리적 제어 방법에 대한 고려가 없으며, 또한 자료 요약 과정에서 통계적 방법을 부적절하게 적용함
2	물리적 제어 방법 미고려 & 통계적 방법의 적절한 적용: 자료 수집 과정에서 시도할 수 있는 물리적 제어 방법에 대한 고려는 없었으나 자료 요약 과정에서 통계적 방법을 적절하게 적용함
3	물리적 제어 방법 고려 & 통계적 방법의 부적절한 적용: 자료 수집 과정에서 시도할 수 있는 물리적 제어 방법을 제시하지만, 자료 요약 과정에서 통계적 방법을 부적절하게 적용함
4	물리적 제어 방법 고려 & 통계적 방법의 적절한 적용: 자료 수집 과정에서 시도할 수 있는 물리적 제어 방법을 제시하며, 또한 자료 요약 과정에서 통계적 방법을 적절하게 적용함

또는 자료 요약 단계에서 통계적으로 제어하여 정확한 측정 결과를 얻는다는 것이 무엇인지에 대한 이해가 부족한 것으로 보인다.

다음은 문제 2-(2)에서 중학생인 MS24가 제시한 내용과 이에 대한 면담 내용이다. 이 학생의 경우 ‘등 부분이 나올 확률을 정확하게 구할 수 있는 방법’을 ‘시행에서 등 부분이 나오는 것을 알아맞힐 가능성을 높이는 방법’으로 잘못 이해하고 있다. 이것은 확률이란 용어의 의미를 정확하게 이해하지 못하는데 그 원인이 있는 것으로 보인다.

면담 때 등부분을 위로 향하게 한 뒤
던질 때 높이를 낮게, 가볍게 던짐

[그림 IV-11] 문제 2-(2)에서 MS24의 반응

연구자: 여기에서 높이를 낮게, 가볍게 던진다고 했는데, 왜?

MS24: 만약에 등 부분을 위로 하고 낮은데서 살짝 던지면 등 부분이 나올거고, 배 부분을 위로 하고 던지면 배 부분이 나올 가능성이 더 크잖아요.

연구자: 여기에서 등 부분이 나올 확률을 좀 더 정확하게 구할 수 있는 방법을 물었는데...

MS24: 그러니까 등 부분을 위로 향하게 한 뒤....

[그림 IV-12]는 중학생인 MS57이 문제 2-(2)에서 제시한 내용이다. 이 학생의 경우 옷의 둥근 부분과 평평한 부분의 면적의 비로 확률을 계산할 수 있다고 보고 있다. 수학적인 계산에 의해 확률을 구하는 활동은 학교수학에서 강조되어 온 바이며, 변이성을 설명하고 제어함에 있어서는 장애요인이 된다. 예를 들면, 주사위 1개를 5명이 60회씩 던졌을 때 각 학생으로부터 1의 눈이 몇 번 나오겠는가라고 질문했을 때 많은 학생들이 10회, 10회, 10회, 10회, 10회를 답으로 제시한다는 신보미(2007)의 연구도 동일한 문제를 지적하고 있다. 즉 수학적

확률을 참조하여 8~12회(또는 7~13회) 정도로 분포되게 답을 제시하는 것이 아니라 수학적 확률로 변이성을 대체하는 것이다.

옷의 둥과 배부분의 넓이를 측정후
 $\frac{\text{배}}{\text{둥+배}}$ 른 확률로 갖다.

[그림 IV-12] 문제 2-(2)에서 MS57의 반응

1수준의 학생들은 자료 수집 과정에서 실행할 수 있는 물리적 제어 방법에 대해 고려하지 않았으며, 또한 자료 요약 과정에서 변이성을 제어할 때 통계적 방법을 적절하게 적용하지 못했다. 측정상황에서 학생들은 문제 1-(2)에서 평균을 구한다거나 최빈값을 자동차의 빠르기로 한다는 등 통계적 제어 방법만 제시하고 자료 수집 과정에서의 물리적 제어 방법에 대해서는 고려하지 않았다. 그리고 문제 1-(3)에서 자료를 요약할 때 극단적인 값을 고려하지 않아 9개 전체의 평균을 구하는 등 통계적 방법을 적절하게 적용하지 못하였다. 이와 유사하게 우연상황에서도 문제 2-(2)에서 등 부분이 올라올 확률을 정확하게 구하기 위해 평균이나 최빈값을 이용할 것을 제시하지만, 자료 수집 과정에서의 변이성 제어 방법에 대해서는 고려하지 않고 있다. 그리고 문제 2-(3)에서 주어진 자료를 이용해 등 부분이 올라오는 가능한 횟수를 구할 때 극단적인 값인 8을 고려하지 않는 등 통계적 방법을 적절하게 적용하지 못하고 있다. 다음은 1수준에 속하는 학생들의 예이다.

[그림 IV-13]과 [그림 IV-14]는 각각 초등학생인 ES02가 문제 1-(2)와 1-(3)에서 제시한 내용이며, [그림 IV-15]과 [그림 IV-16]은 각각 초등학생인 ES20이 문제 2-(2)와 2-(3)에서 제시한 내용이다. 두 학생 모두 평균 또는 최빈값을

변이성을 제어하기 위한 적절한 방법으로 제시하고 있지만, 자료 수집 과정에서의 물리적 제어 방법은 고려하고 있지 않다. 그리고 주어진 자료를 요약할 때는 변이성을 제어하는데 방해가 되는 극단적인 값을 고려하지 않고 9개의 평균을 구한다거나 최빈값을 적용시키지 않는 등 이미 제시한 통계적 방법을 적절하게 적용하지 못하고 있다.

평균을 구한다

[그림 IV-13] 문제 1-(2)에서 ES02의 반응

65초 평균을 일의자리까지만 구하면 65가 나옴 때문이다.

[그림 IV-14] 문제 1-(3)에서 ES02의 반응

정확한 결과만 알 수는 없지만 많은 숫자가 더 많은 확률로 나온 것이지 때문에 많이 나온 숫자를 구한다

[그림 IV-15] 문제 2-(2)에서 ES20의 반응

알 수 없다. 속도 구해처럼 운으로 나온 것이지 때문에

[그림 IV-16] 문제 2-(3)에서 ES20의 반응

2수준의 학생들은 자료 수집 과정에서 실행할 수 있는 물리적 제어 방법에 대해 고려하지 않았지만 자료 요약 과정에서 변이성을 제어할 때 통계적 방법을 적절하게 적용하였다. 측정 상황에서 학생들은 문제 1-(2)에서 평균을 구한다거나 최빈값을 자동차의 빠르기로 한다는 등 통계적 제어 방법만 제시하고 자료 수집 과정에서의 물리적 제어 방법에 대해서는 고려하지 않았다. 그리고 문제 1-(3)에서 자료를 요약할 때 극단적인 값인 102초를 제외하고 8개 자료에 대한 평균을 구해 자동차의 빠르기를 적절하게 제시하였다. 이와 유사하게 우연상황에서도 문제 2-(2)에서 등 부분이 올라올 확률을 정

확하게 구하기 위해 평균이나 최빈값을 이용할 것을 제시하지만, 자료 수집 과정에서의 변이성 제어 방법에 대해서는 고려하지 않고 있다. 그리고 문제 2-(3)에서 주어진 자료를 이용해 등 부분이 올라오는 가능한 횟수를 구할 때 최빈값을 제시하거나 극단적인 값인 8을 제외한 9개의 자료에 대한 평균을 제시하였다.

3수준의 학생들은 2수준의 학생들과 달리 문제 1-(2)와 문제 2-(2)에서 자료 수집 과정에서의 물리적 제어 방법과 자료를 요약할 때 통계적 제어 방법을 모두 고려하였다. 그러나 문제 1-(3)과 문제 2-(3)에서 통계적 방법을 적절하게 적용하지 못하였다. 측정 상황에서 학생들은 문제 1-(2)에서 새 건전지를 이용한다거나 새 자동차를 이용하는 등 자료 수집 과정에서 변이성을 제어할 수 있는 물리적 방법을 제시하였다. 그러나 실제로 주어진 자료를 이용해 통계적으로 변이성을 제어할 때 통계적 방법을 적절하게 적용하지 못하였다. 예를 들면, 문제 1-(3)에서 극단적인 값인 102초를 고려하지 않고, 9개 자료 전체에 대한 평균을 구하였다. 그리고 우연상황에서 학생들은 통계적으로 변이성을 제어할 때 문제 2-(3)에서 극단적인 값인 8을 고려하지 않거나 수학적 확률로 접근하였다. 다음은 3수준에 속하는 학생들 반응의 예이다.

[그림 IV-17]과 [그림 IV-18]은 초등학생인 ES40이 문제 1-(2)와 문제 1-(3)에서 각각 제시한 내용이다. 이 학생은 문제 1-(2)에서 자료 수집 과정에서 변이성을 제어할 수 있는 방법과 통계적 제어 방법을 모두 제시하고 있다. 그러나 문제 1-(3)에서 통계적 방법을 적절하게 적용하지 못하고 있다. 즉 극단적인 값인 102초를 고려하지 않고 자동차의 빠르기를 구하는데 이 값을 포함하여 평균을 구함으로써 정확한 자동차의 빠르기를 제시하지 못하고 있다.

한 번 실험할 때마다 새 자동차, 새 건전지들이 이용
해서 여러 번 실험 반복 평균값은 7한

[그림 IV-17] 문제 1-(2)에서 ES40의 반응

$(61 + 60 + 63 + 102 + 65 + 61 + 60 + 61 + 60) : 9 = 65.555...$

[그림 IV-18] 문제 1-(3)에서 ES40의 반응

다음은 문제 2-(2)에 대해 초등학생인 ES05와의 면담 내용이며 [그림 IV-19]는 이 학생이 문제 2-(3)에서 제시한 내용이다. 이 학생의 경우 물리적 제어 방법과 통계적 제어 방법 모두를 제시하지만 실험을 통해 얻어진 자료집합을 이용해 옷의 확률을 구할 때 이 방법을 적용하지 않고 수학적 확률로 접근하고 있다.

ES05: 그냥 높이고 신체조건을 일정하게 해가지고, 똑같은 사람이 계속하는 거.. 다른 사람이 하면 많이 다르게 나올 것 같아서..
 연구자: 그렇게 하면 많이 다르지 않아서 좀 더 정확하게 구할 수 있어?
 ES05: 그렇게 여러 번 던져서 평균 아니면 가장 많이 나온 수로 하면 정확할 것 같아요.

4수준의 학생들은 자료 수집 과정에서 물리적 제어 방법을 제시하며, 또한 통계적으로도 적절하게 변이성을 제어하였다. 측정상황에서

10번정도, 직접 던져봐야 알겠지만
20번의 반인 10번이 나옴것 같다

[그림 IV-19] 문제 2-(3)에서 ES05의 반응

학생들은 통계적으로 변이성을 제어할 때 문제 1-(3)에서 극단적인 값인 102를 고려하여 최빈값을 구하거나 102를 제외하고 평균을 구하였다. 그리고 우연상황에서 학생들은 통계적으로 변이성을 제어할 때 문제 2-(3)에서 극단적인 값인 8을 고려하여 최빈값을 구하거나 8을 제

외하고 평균을 구하였다. 다음은 4수준에 속하는 학생들 반응의 예이다.

[그림 IV-20]과 [그림 IV-21]은 각각 중학생인 MS58이 문제 1-(2)와 문제 1-(3)에서 제시한 내용이다. 이 학생의 경우 문제 1-(2)에서 ‘평평하고 매끈한 트랙을 이용, 센서를 이용한 정확한 시간 측정’ 이렇게 설계과정에서 변이성을 제어할 수 있는 방법을 제시하고 있으며, 또한 ‘여러 번 실험한다.’와 같이 통계적으로 변이성을 제어할 수 있는 방법도 함께 고려하고 있다. 그리고 문제 1-(3)에 대한 반응에서 알 수 있듯이 극단적인 값인 102를 타당한 관찰값으로 간주하지 않으면서 변이성을 적절하게 제어하고 있다. 즉 자료집합에 내재한 변이성을 고려하여 통계적 방법을 적절하게 적용하고 있다.

평평하고 매끈한 트랙 만들고 센서를 이용하여 정확한 시간 측정을 한다.
여러 번 실험한다

[그림 IV-20] 문제 1-(2)에서 MS58의 반응

60초
대체적으로 60초에서 3초 이상의 오차가 없게 나왔고,
102초같이 타당치없는 결과는 배제한다

[그림 IV-21] 문제 1-(3)에서 MS58의 반응

[그림 IV-22]와 [그림 IV-23]은 각각 중학생인 MS37이 문제 2-(2)과 문제 2-(3)에서 제시한 내용이다. 이 학생의 경우 문제 2-(2)에서 ‘높이, 동작 등의 같은 방법을 규정’하는 등 설계과정에서 변이성을 제어할 수 있는 방법을 제시하고 있으며, 또한 ‘많은 횟수로 하고’와 같이 통계적으로 변이성을 제어할 수 있는 방법도 함께 고려하고 있다. 그리고 문제 2-(3)에 대한 반응에서 알 수 있듯이 극단적인 값인 8을 타당한 측정값으로 간주하지 않으면서 변이성을 적절하게 제어하고 있다. 즉 자료집합에 내재

한 변이성을 고려하여 통계적 방법을 적절하게 적용하고 있다.

많은 학생은 하위, 물리 방법을 규정하는 (초, 중, 고)

[그림 IV-22] 문제 2-(2)에서 MS37의 반응

이 3~5번 정도

평균은 3~5번 정도 (초, 중, 고)의 2~3번 정도는 이 정도

[그림 IV-23] 문제 2-(3)에서 MS37의 반응

나. 변이성 제어에 대한 사고 수준 분석

<표 IV-4>는 각 수준에 속하는 학생들의 빈도를 나타낸 것이다. 측정상황에서 초등학교의 경우 물리적 제어 방법을 제시하지만 통계적 제어 방법을 부적절하게 적용하는 3수준에 가장 많은 학생들이 속한 반면, 중학교의 경우 물리적 제어 방법을 제시하며, 또한 통계적 제어 방법을 적절하게 적용하는 4수준에 가장 많은 학생들이 속하는 것으로 나타났다. 그 다음으로 초등학교의 경우 물리적 제어 방법을

제공하며, 또한 통계적 방법을 적절하게 적용하는 4수준의 사고에 많은 학생들이 분포되었으며, 중학교의 경우 물리적 제어 방법을 제시했지만 통계적 방법을 부적절하게 적용하는 3수준에 많은 학생들이 분포되어 있는 것으로 나타났다.

우연상황의 경우 측정상황과 달리 초등학교와 중학교 모두 변이성 제어에 대한 인식이 부족한 0수준에 가장 많은 학생들이 속하는 것으로 나타났다. 그 다음으로 초등학교의 경우 물리적 제어 방법을 제시하지 않으며, 또한 통계적 방법을 부적절하게 적용하는 1수준에 많은 학생들이 분포되었으며, 중학교의 경우 1~3수준에 모두 16.9%씩 균일하게 분포되어 있는 것으로 나타났다. 그리고 측정상황과 달리 소수의 초등학교(9.2%)와 중학교(12.3%)만이 4수준에 속하는 것으로 나타났다.

V. 논의 및 결론

<표 IV-4> 변이성 제어에 대한 사고 수준의 빈도 요약

수준	측정상황		우연상황	
	초등	중등	초등	중등
0수준: 변이성 제어에 대한 인식 부족	10 (15.4)	3 (4.6)	24 (36.9)	24 (36.9)
1수준: 물리적 제어 방법 미고려 & 통계적 방법의 부적절한 적용	9 (13.8)	4 (6.2)	16 (24.6)	11 (16.9)
2수준: 물리적 제어 방법 미고려 & 통계적 방법의 적절한 적용	10 (15.4)	11 (16.9)	4 (6.2)	11 (16.9)
3수준: 물리적 제어 방법 고려 & 통계적 방법의 부적절한 적용	24 (36.9)	15 (23.1)	15 (23.1)	11 (16.9)
4수준: 물리적 제어 방법 고려 & 통계적 방법의 적절한 적용	12 (18.5)	32 (49.2)	6 (9.2)	8 (12.3)
합계	65 (100.0)	65 (100.0)	65 (100.0)	65 (100.0)
M	2.37	3.09	1.43	1.51
SD	1.318	1.155	1.425	1.448

변이성 설명의 수준을 확인하고 각 수준에 해당되는 학생들의 비율을 확인한 결과, 측정 상황에서는 7.7%의 학생들이 0수준, 곧 변이성의 원인을 설명하는 것에 대한 이해 자체가 부족하다는 것을 확인하였다. 그러나 우연상황에서는 1.5%의 학생만이 이와 동일한 수준에 속하는 것으로 나타났다. 이는 측정상황보다 우연상황에서 변이성의 원인을 설명한다는 것에 대한 인식이 수월하다는 것을 시사한다. 이 연구에서 사용한 측정상황과 우연상황에 대한 학생들의 친숙도 차이 때문에 이와 같은 수준 차이가 발생하였을 가능성도 배제하기는 어렵다. 다시 말하여, 이 연구에서 우연상황을 위해 제시한 옷놀이는 학생들이 이미 친숙하게 접했던 상황이므로, 변이성의 근원에 대해 인식하기 쉬웠을 가능성이 있다. 문제상황의 친숙도로 인한 수준 차이에 대해서는 후속연구가 진행될 필요가 있다.

측정상황에서 변이성 설명의 2수준에 속하는 학생들은 초시계를 읽을 때 발생하는 오차, 건전지의 소모, 출발하는 순간의 차이에서 발생하는 오차 등을 변이성의 근원으로 제시한 반면, 3수준에 속하는 학생들은 중력의 영향, 바람의 세기 변화 등 주위의 미세한 환경 변화를 예로 제시하면서 설명할 수 없는 다양한 원인이 변이성의 근원이 될 수 있음을 인식하였다. 이러한 차이는 측정상황에 내재되어 있는 관련 개념을 이해하는 수준의 차이로 볼 수 있다. Rossman과 Chance, Medina(2006)는 이를 맥락에 대한 이해 수준의 차이로 설명하였다. 한편, 우연상황에서 우연변이성을 인식하는 3수준 이상의 사고에 속하는 학생들은 초등학생의 경우 30.8%, 중학생의 경우 38.5%에 불과했다. 주사위 던지기, 윷 던지기, 공 추출하기 등과 같은 우연상황은 교육과정에서 자주 활용되는 소재이다. 특히 중학생들의 경우 초등학교와 중학

교 교육과정 모두에서 이러한 소재를 경험했다. 그럼에도 불구하고 학교수학에서는 이들 상황 속에 내재된 우연변이성에 직접적으로 주목하지 않는 것이 그 이유가 될 수 있다.

우연상황에서 변이성 설명의 4수준에 도달한 경우는 중학생의 4%였다. 이는 주사위나 윷, 그리고 일상생활에서 접하는 복권 당첨 등의 우연상황에서 분포에 주목하여 문제를 제기하고 해결하는 경험이 학교수학에서 제공되지 않는 것에서 기인하는 것으로 보인다. 이영하와 허지영(2010) 역시 확률 학습이 분포 개념과 연결되어 지도되어야 한다고 제시한 바 있는데, 우연상황이 단순히 학생들에게 수학적 확률 지도에 국한된 경험으로 제공된다면 이것은 바람직한 확률과 통계교육이라 보기 어려울 것이다. Reading과 Reid(2005) 역시 분포 개념을 통해 변이성을 파악하는 것의 중요성을 주장한 바 있다.

변이성 제어의 0수준에 속하는 학생들의 비율도 측정상황에 비해 우연상황에서 상당히 높은 것으로 나타났다. 그러나 4수준에 속하는 학생들의 비율은 측정상황에 비해 우연상황에서 상당히 적은 것으로 나타났다. 우연상황에서 4수준에 도달한 학생들이 적은 이유는 역시 앞서 논의한 것처럼 우연상황을 분포 개념에 의해 이해하고 제어하는 활동에 대한 경험의 부족 때문으로 파악된다. 학교수학에서는 우연상황을 제시하고 다음 번 시행에서 어떠한 결과가 나타나는지에 초점을 둘뿐 분포에 주목하여 판단하는 기회는 제공되지 않는다.

측정상황에서 변이성 제어의 1수준과 3수준에 속하는 학생들, 즉 초등학생의 50.8%와 중학생의 29.2%의 학생들은 대부분 주어진 자료를 요약하는 과정에서 극단적인 값인 102를 고려하지 않고 9개 자료 전체에 대하여 평균을 구하였다. 이러한 학생들의 경우 단순히 평균

알고리즘을 문제에 적용시킨 것으로 평균이 어떠한 수단으로 이용되어야 하며, 평균의 적절한 이용에 대한 이해가 부족한 것으로 보인다. 평균은 자료집합의 대푯값을 정하기 위한 하나의 도구이기도 하지만 참값으로부터의 오차를 줄이기 위해 고안된 통계적 방법이기도 하다. 통계교육에서 후자의 측면 역시 강조할 필요가 있는데, 그래야 평균을 구하는 목적이 변이성을 제어하려는 의도와 통합될 수 있을 것이다. 이는 평균에 대한 학습이 단순히 알고리즘을 적용하는 것에서 벗어날 수 있는 하나의 방안이 되기도 하다.

이 연구에서는 제한된 문제상황을 이용하여 학생들의 통계적 변이성 설명과 제어수준을 파악하였다. 그러므로 문제상황 자체에 대한 친숙도가 수준에 영향을 미칠 가능성이 있다. 다양한 문제상황을 이용하여 발견되는 수준에 대한 연구가 이루어질 필요가 있다. 또한 연구참여자 집단을 더 다양화하여 수준 구분에 대한 논의를 보완하는 후속연구도 이루어져야 한다. 마지막으로 통계적 변이성을 설명하고 제어하는 경험이 학교수학에서 제공되도록 교육과정과 교과서, 수업 연구가 이루어져야 할 것이다.

참고문헌

고은성 · 이경화(2010a). 변이성과 변이 추론의 지도를 위한 지식. **수학교육학연구**, 20(4), 221-239.

고은성 · 이경화(2010b). 예비교사들의 무작위성 개념 이해 조사. **학교수학**, 12(4), 455-471.

성태제(2002). **타당도와 신뢰도**. 서울: 학지사.

신보미(2007). **시뮬레이션을 활용한 확률 지식의 교수학적 변환 방식**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

이영하 · 허지영(2010). 분포 개념의 연계성 목표

관점에 따른 중학교 확률 단원 분석. **수학교육학연구**, 20(2), 163-183.

Ben-Zvi, D. (2004). Reasoning about variability in comparing distributions. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 42-63.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The Solo Taxonomy*. Academic Press, New York.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Fleiss, J. L. (1981). *Statistical methods for rates and proportion*. New York: Wiley.

Franklin, C. A. & Garfield, J. B. (2006). The GAISE project: Developing statistics education guidelines for grades Pre-K-12 and college courses. In G. F. Burrill & P. C. Elliott (Eds.), *Thinking and reasoning with data and chance: Sixty-eight yearbook* (pp.345-375). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Goetz, J. P. & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. Orlando, FL: Academic Press.

Ko, E.-S. & Lee, K.-H. (2011). Are mathematically talented elementary students also talented in statistics?. In B. Sriraman & K.-H. Lee, *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp.29-43). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Pfannkuch, M. & Wild, C. J. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp.17-46). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Pfannkuch, M. (2008). *Building sampling concepts for statistical inference: A case study*, paper presented at the ICME 2008 TSG. Monterrey, Mexico. [http://tsg.icme11.org/document/get/476]
- Reading, C. & Reid, J. (2004). *Consideration of variation: A model for curriculum development*, paper presented at the IASE 2004 Roundtable 27 June - 3 July in Lund, Sweden. [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt04/2.3_Reading & Reid.pdf]
- Reading, C. & Reid, J. (2005). Reasoning about variation: A key to unlocking the mastery of distributions. Reasoning about variation: A key to unlocking the mystery of distributions. In K. Makar (Ed.), *Reasoning about Distribution: A collection of current research studies. Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy (SRTL-4)*, Auckland, 2-7 July 2005, [CD-ROM, with video segments]. Brisbane, Australia: University of Queensland.
- Reading, C. & Reid, J. (2006). An emerging hierarchy of reasoning about distribution: From a variation perspective. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 46-68.
- Reading, C. & Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp.201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Reid, J. & Reading, C. (2008). Measuring the development of students' consideration of variation. *Statistics Education Research Journal*, 7(1), 40-59.
- Rossman, A., Chance, B., & Medina, E. (2006). Some important comparisons between statistics and mathematics, and why teachers should care. In G. F. Burrill & P. C. Elliott (Eds.), *Thinking and reasoning with data and chance: Sixty-eighth yearbook* (pp.323-333). Reston, VA: NCTM.
- Snee, R. D. (1990). Statistical thinking and its contribution to total quality. *The American Statistician*, 44(2), 116-121.
- Stigler, S. M. (2002). **통계학의 역사**. (조재근 역). 서울: 한길사. (영어 원작은 1986년 출판)
- Torok, R. & Watson, J. (2000). Development of the concept of statistical variation: An exploratory study. *Mathematics Education Research Journal*, 12(2), 147-169.
- Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Watson, J. M., Kelly, B. A., Callingham, R. A., & Shaughnessy, J. M. (2003). The measurement of school students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(1), 1-29.
- Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

Study on Levels of Thinking of Elementary and Middle School Students on the Task of Explaining and Dealing with Variability

Ko, Eun Sung (Graduate school of Seoul National University)

Lee, Kyeong Hwa (Seoul National University, Professor)

This study investigates levels of thinking of elementary and middle school students doing their tasks of explaining and dealing with variability. According to results, on the task of explaining variability in the measurement settings five levels of thinking were identified: a lack of understanding of explanation of the causes, an insufficient understanding of the causes, an offer of physical causes, consideration of unexplained causes as the source of variability, and consideration of unexplained causes as quasi-chance variability. Also, in the chance settings five levels of thinking were identified: a lack of understanding of

explanation of the causes, an insufficient understanding of the causes, an offer of physical causes, recognition of chance variability, and consideration of causes of distribution. On the task of dealing with variability in both the measurement and chance settings five levels of thinking were identified: a lack of understanding of dealing with variability, no physical control and improper statistical control, no physical control and proper statistical control, physical control and improper statistical control, and physical control and proper statistical control.

* **Key Words** : Levels of thinking(사고 수준), Explaining variability(변이성 설명), Dealing with variability(변이성 제어)

논문접수 : 2011. 3. 31

논문수정 : 2011. 5. 6

심사완료 : 2011. 5. 20