대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 21 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 21, No. 2, 181-199. May 2011

직사각형, 평행사변형, 삼각형 넓이 공식에 내재된 관계에 대한 초등학생들의 이해 조사

정 경 순* · 임 재 훈**

평면도형 넓이 공식은 넓이와 관련이 있는 길이 사이의 관계를 형식화하여 나타낸 것으로 평면도형의 넓이 공식 이해에는 넓이 공식에 내재된 관계 이해가 포함된다. 이 연구에서는 초등학교 5학년 아동들을 대상으로 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식에 내재된 관계 이해에 관한 문제를 어떻게 해결하는지 조사하였다.
조사 결과 직사각형과 평행사변형의 넓이 공식에 내재된 관계 이해 문제에 비해 삼각형의 넓이 공식에 내재된 관계 이해 문제의 해결 정도가 상대적으로 낮은 것으로 나타났다. 아동들의 문제 해결 과정으로부터 세 가지 전략(전략 A: 공식에 수를 대입하기, 전략 B: 구체적인 그림을 그리거나 이용하기, 전략 C: 변수 간의 관계에 주목하기)이 추출되었다. 변수 간의 관계에 주목하여 문제를 해결하려는 전략은 소수의 아동에게서만 관찰되었으며, 그림이나 공식에 대입하는 전략으로 문제 해결이 어려운 경우에 이 전략을 사용하는 아동들의 수가 다소 증가하였다. 밑변과 넓이 또는 높이와 넓이의 관계에 주목한 아동들은 소수 있었으나, 밑변과 높이의 관계에 주목하여 문제를 해결하려 한 아동은 없었다.

I. 서론

초등학교에서 평면도형 넓이 공식의 학습은 수학적 사상(事象)을 통합적, 구조적으로 파악하고 여러 대상을 관계적으로 이해하기에 알맞은 소재이다(정동권, 2001). 단순히 공식을 외워 문제에 주어진 수치를 대입해서 도형의 넓이를 구하는 것, 공식의 의미를 간과한 채 공식을 암기하고 적용하는 연습에 치중하는 것은 평면도형 넓이 공식을 통해 꾀할 수 있는 다양한 수학적 능력의 신장을 외면하는 것이다(정말숙, 2004). 평면도형의 넓이 공식 학습 지도에 관한 여러 연구가 평면도형의 넓이 공식을 아동들이 구성하거나 이끌어내는 단계에 초점을 맞추어 왔다(원봉희, 2002, 정필원, 2005, 김신영, 2005, 이선영, 2006, 유연자, 2008, 박현웅, 2009). 주어진 도형을 넓이를 구할 줄 아는 도형들로 분할하거나 넓이가 같거나 두 배 또는 반 배인 이미 넓이를 구할 줄 아는 도형으로 변형하는 구체적 조작 활동을 통해 도형의 넓이 공식을 아동들이 스스로 찾아내게 하는 것이 바람직함이 여러 연구자들에 의해 반복하여 지적되어 왔다. 우리나라 초등학교 수학 교과서에서도 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모와 같은 평면도형의 넓이 공식을 분할과 변형을 바탕으로 아동들이 구성하도록 내용을 전개하고 있다(교육인적자원부, 2007a-d, 2011a).

평면도형의 넓이 공식을 어떻게 구성하게 할 것인가에 비해, 평면도형의 넓이 공식을 구성한 이후의 학습 지도에 대해서는 상대적으로 연구의 관심이 덜 기울여져 온 것으로 보인다.

* 부천서초등학교, onion8001@naver.com
** 경인교육대학교, jhyim@ginue.ac.kr

분할이나 변형 등의 조작 활동을 바탕으로 평면도형의 넓이 공식을 구성한 후 뒤따라 이루어지는 학습 활동의 대부분은 학습한 넓이 공식을 적용하여 실제 도형의 넓이를 구하는 문제의 풀이가 보통이다. 예를 들어, 삼각형의 넓이 공식을 학습한 이후에 밑변과 높이가 주어진 다양한 모양의 삼각형의 넓이를 구해 보는 것이다. 평면도형의 넓이 공식을 이해했다면 공식을 이용하여 이와 같은 문제를 당연히 해결할 수 있어야 할 것이다. 그러나 평면도형의 넓이 공식을 이해했다는 것에는 공식을 구성하고 공식을 적용하여 넓이를 구하는 것 이상의 의미가 들어 있다. 평면도형의 넓이 공식은 구하고자 하는 넓이와 관계있는 길이 사이의 관계를 형식화하여 식으로 표현한 것이다. 그러므로 평면도형의 넓이 공식에 대한 이해에는 이와 같은 관계를 읽어낼 수 있는 것이 포함된다. 예를 들어 (직사각형의 넓이)=(가로의 길이)×(세로의 길이)는 세로의 길이가 그대로일 때 가로의 길이가 두 배가 되면 넓이가 두 배가 된다는 가로의 길이와 넓이 사이의 관계와, 넓이가 그대로일 때 가로의 길이가 두 배가 되면 세로의 길이가 반으로 줄어든다는 관계가 들어 있다. 이와 같은 관계에 대한 학습은 지금까지 평면도형의 넓이 공식의 학습에서, 분할이나 변형과 같은 조작 활동에 바탕을 둔 공식 구성 학습 활동과 공식을 적용한 넓이 구하기 학습 활동에 비해, 상대적으로 덜 명시적으로 다루어져 온 것으로 보인다.

여기서 두 가지 가능성을 생각할 수 있다. 하나는 적절한 조작 활동을 통하여 공식을 구성하고 이어서 공식을 적용하여 여러 모양과 크기의 해당 도형의 넓이를 구해보는 명시적인 학습 활동을 하는 가운데, 이와 같은 관계가 암묵적으로 아동에게 포착되고 이해되고 있을 가능성이다. 사정이 그렇다면, 이와 같은 관계에 관한 학습 활동을 명시적으로, 조작 활동을 통한 공식 구성 활동, 공식을 적용하여 도형의 넓이를 구하는 활동과 같이, 다루어야 할 필요성은 별로 없다고 할 수 있다. 다른 하나는 아동들이 도형의 넓이 공식에 들어 있는 관계들을 의식하거나 이해하지 못하고 있을 가능성이다. 그렇다고 한다면, 이것은 기존의 공식 구성 학습 경험과 공식을 적용하여 넓이를 구하는 문제를 푸는 학습 경험에 더하여 이와 같은 관계 이해에 초점을 둔 학습 경험을 제공할 필요가 있음을 시사하는 것으로 볼 수 있다.

이에 이 연구에서는 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식을 학습한 초등학교 5학년 아동들이 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식에 내재된 관계들을 어떻게 이해하고 있는지, 공식으로부터 관계들을 읽어낼 수 있는지 알아보고자 한다. 먼저 평면도형 넓이 공식에 들어 있는 관계 이해와 관련된 문제를 의존관계와 함수관계로 나누어 이와 관련된 어떤 활동들이 교과서에 제시되어 있는지 알아보면서 고찰하고, 이어서 평면도형의 넓이 공식에 내재된 관계에 대한 아동들의 이해를 조사할 수 있는 문항을 개발, 적용하여 아동들의 이해 상태를 알아본다.

II. 평면도형의 넓이 공식에 내재된 관계 읽기

식에는 3×1, $(\square-1)\times5$와 같이 대상기호를 조작기호로 결합한 것과 $5\times6=30$, $\square\times\bigcirc=\bigcirc\times\square$와 같이 그것들을 관계기호를 사용하여 연결한 것이 있다. (가로의 길이)×(세로의 길이)=(직사각형의 넓이)와 같은 평면도형의 넓이 공식은 두 번째 유형의 식이다. 평면도형의 넓이 공식에 내재된 관계를 이해하는 것은 ‘식

읽기’의 일종이다. 신택균(1995)은 식 학습 지도의 문제점을 지적하면서, 식을 읽는 능력을 길러주는 학습 지도가 중요하며, 식으로 나타난 수량관계를 다양한 관점에서 고찰하는 기회를 주어 식의 의미를 이해하고 이를 활용할 수 있는 능력을 기를 수 있게 해야 한다고 하였다. 이용률(2005)은 문제 장면을 식으로 나타낼 수 있게 하는 지도에는 높은 관심을 보이는 데 비하여 식을 읽을 수 있게 하는 지도에는 상대적으로 소홀한 경향이 있다고 지적하였다.

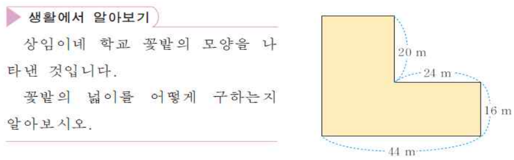
片桐重男(1997)는 식에 관한 내용을 사상이나 관계를 식으로 나타내기, 식을 읽기, 식을 형식적으로 조작하기의 세 가지로 나누고, 식이 나타내는 의미를 보다 명확히 하거나 일반화할 때, 또는 그 식이 나타내는 사상이나 관계를 통합하거나 발전시킬 때, 그리고 식이 바른지 검토할 때, 식을 읽어내는 능력이 유효하며, 식을 읽는다는 것에는 식에서 의존관계나 함수관계를 읽어 내거나 식을 일반적으로 읽어 내려는 생각이 포함된다고 보았다. 의존관계에 주목한다는 것은 구하려는 양과 관계있는 양이 무엇인가를 찾는 것, 구하려고 하는 것이 무엇에 의존하고 있는가 생각하는 것을 말한다. 예를 들어, 직사각형의 넓이를 구하기 위해 어디를 측정해야 하는지 생각하고 직사각형의 가로와 세로의 길이를 구했다면, 가로와 세로의 길이가 정해질 때 넓이가 결정된다는 의존관계를 파악한 것으로 볼 수 있다. 반면, 어떤 아동이 평행사변형의 넓이를 구하기 위해 이웃한 두 변의 길이를 곱하면 된다고 생각했다면 평행사변형의 넓이에 관한 의존관계를 제대로 파악하지 못하고 있는 것으로 볼 수 있다.

식에 내재된 함수관계를 읽을 수 있다는 것은 ‘~에 따라 …이 변화한다’는 변량 사이의 관계를 이해하고 찾을 수 있음을 말한다. 예를 들어 삼각형의 넓이를 구하는 활동에서 밑변의 길이가 2배, 3배로 변화하면, 그에 따라 넓이도 2배, 3배로 변화한다는 것을 이해하는 것이 여기에 해당한다.

평면도형의 넓이 공식은 식의 관계적 읽기를 위한 좋은 소재가 될 수 있다. 평면도형의 넓이 공식에는 간접 측정의 아이디어가 담겨 있다. 넓이의 기본 단위로 도형의 영역을 반복하여 덮어가는 직접 측정과 달리, 측정하려는 넓이와 함수 관계가 있는 다른 양, 직사각형의 넓이라면 가로의 길이와 세로의 길이를 직접 측정하고 그 결과를 이용하여 넓이를 간접적으로 구하는 것이다. 간접 측정 활동의 핵심은 측정하고자 하는 양과 의존 관계가 있는 양들을 찾아내고 이 양들과 구하고자 하는 양과의 함수 관계를 파악하는 것이다.

우리나라 초등학교 수학 교과서에서 평면도형의 넓이 공식에 내재된 의존관계와 함수관계를 다루고 있는 내용들을 일부 찾아볼 수 있다. 예를 들어, 다음과 같은 활동은 평면도형의 넓이 공식에 내재된 의존관계를 다루는 내용으로 볼 수 있다.

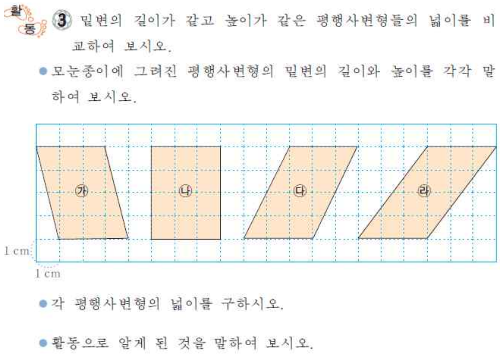
- 복합도형의 넓이 구하기: 복합도형은 넓이 공식이 알려져 있는 도형이 아니므로, 아동이 알고 있는 넓이 공식을 이용하려면 도형을 적절하게 이미 넓이를 구할 줄 아는 도형의 결합으로 파악하여야 한다. 이 과정에서 어떤 길이를 알아야 넓이를 구할 수 있는지, 넓이가 어떤 양에 의존하고 있는가에 주목하게 된다.



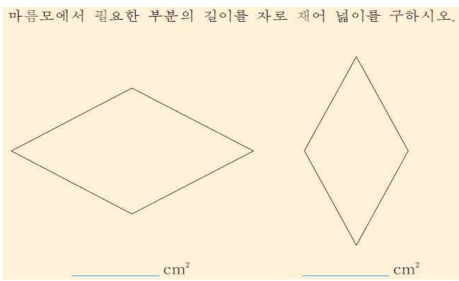
[그림Ⅱ-1]복합도형의 넓이(교육인적자원부, 2007a, p.95)

· 밑변과 높이가 같은 평행사변형 또는 삼각형의 넓이 비교: 밑변의 길이와 높이가 같으면 모양이 달라도 평행사변형이나 삼각형의 넓이가 같다는 것을 확인하는 활동을 통해, 넓이가 밑변의 길이와 높이에 의존함을 인식할 수 있다. ([그림 Ⅱ-2])

· 넓이와 관련 있는 양을 재기: 밑변이나 높이, 대각선의 길이 등 넓이를 구하는데 필요한 길이를 문제에 알려주지 않고, 아동이 넓이와 관련 있는 양을 직접 찾아 재어 보게 함으로써, 넓이와 의존관계에 있는 양에 주목하게 할 수 있다. ([그림 Ⅱ-3])

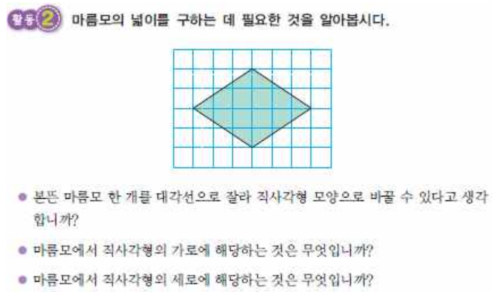


[그림Ⅱ-2]평행사변형의 넓이 비교
(교육인적자원부, 2007a, p.99)



[그림Ⅱ-3]마름모의 넓이
(교육인적자원부, 2007d, p.109)

이상의 활동들은 교과서에서 넓이 공식이 등장한 다음에 뒤따라 나오는 것들이다. 개정 교육과정에 따라 새로 개발된 5학년 수학 교과서에는 이와 같은 활동들 뿐 아니라 [그림 Ⅱ-4]와 같이 넓이 공식 등장 이전에 넓이를 구하는데 필요한 것이 무엇인지 알아 보는 활동을 제시하고 있다. 넓이를 구하는데 필요한 것이 무엇인지 알아보는 것은 어떤 길이들이 넓이를 결정하는지, 곧 넓이와 의존관계에 있는 양들에 직접적으로 주목하게 하는 활동이라고 할 수 있다.



[그림Ⅱ-4]넓이를 구하는 데 필요한 양 알아보기
(교육과학기술부, 2011a, p.108)

공식을 구하고 잘 사용하기 위해서는 의존관계를 파악하는 것이 필수적이다. 또 공식을 적용하여 넓이를 구하는 문제를 많이 풀다 보면 넓이에 관련된 양이 무엇인지에 대한 인식이 강화될 것을 기대할 수 있다. 그러므로 공식 구성 활동이나 공식 도출 이후의 넓이 구하기 연습문제들도 넓이에 관련된 양이 무엇인가를 알아보는 곧 의존관계와 간접적으로 관련있는 활동이라고 할 수 있다. 그러므로 의존관계를 간접적으로 다루는 많은 활동과 문제들이 있고 또 앞에서 예시한 것과 같이 좀더 직접적으로 의존관계와 관련된 활동들이 교과서에 제시되어 있다고 볼 수 있다. 이에 비하여 넓이 공식에 내재된 함수관계와 직접적으로 관련 있는 지도 내용은 상대적으로 적다. 함수관계와 관련 있는 것으로 보이는 활동으로는 다음을 들 수 있다.

· 넓이가 같으면서 모양이 다른 도형 그리기: 넓이 공식을 학습한 이후에 주어진 넓

이를 갖는 도형을 여러 개 그려보는 활동은 공식에 내재된 변수 간의 관계에 주목하게 하는데 도움이 될 수 있다. 주어진 넓이를 갖는 도형을 여러 개 그리기 위한 한 가지 전략은 학습한 넓이 공식을 이용하여 넓이와 관계 있는 양을 이리저리 바꾸어 보는 것이다. 예를 들어, 넓이가 6㎠인 삼각형을 그릴 때 (삼각형의 넓이)=(밑변)×(높이)÷2를 이용하여 (밑변)의 길이를 바꾸어 가면서 (밑변)×(높이)=12가 되도록 높이를 정해 도형을 그려나가면 넓이가 같으면서 밑변의 길이와 높이가 다른 여러 삼각형을 그릴 수 있다. 이와 같은 활동은 넓이가 일정할 때 밑변의 길이를 늘리면 높이는 줄어든다는 관계의 파악에 도움이 될 수 있다. 그러나 아동에 따라서는 이와 같이 공식에 내재된 관계를 발견하지 못하고, 밑변과 높이는 그대로 두고 옆변의 기울어진 정도만 바꾸어 모양이 다른 삼각형을 찾으려 할 수도 있다.

[그림Ⅱ-5]넓이가 같은 삼각형 그리기
(교육인적자원부, 2007d, p. 113)

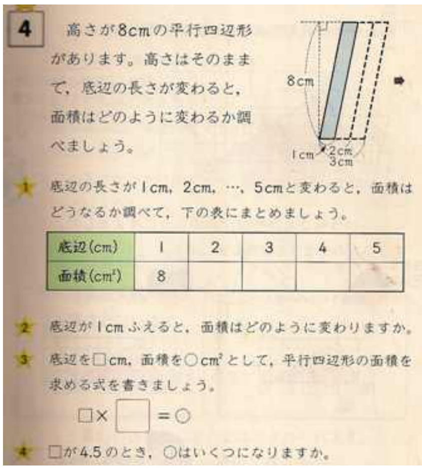
[그림Ⅱ-6]넓이가 같은 평행사변형 그리기
(교육과학기술부, 2011b, p. 113)

넓이와 관계있는 양을 변화시켜 가면서 넓이가 어떻게 변화되는지를 표를 이용하여 조사하는 것은 넓이 공식에 내재된 함수관계를 탐구하게 하는 주요한 활동일 것이다. 우리나라 교과서에서 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이에는 이와 같은 활동들이 제시되어 있지 않다. 관련된 활동으로, 6-나 익힘책(교육인적자원부, 2007f)에 반지름의 길이와 원의 넓이와의 관계를 나타낸 표의 빈 칸을 채우는 문제가 제시되어 있지만, 표에 주어진 반지름의 길이는 10cm, 2.1㎝, 1.4㎝, 3.7㎝의 소수로 반지름의 길이 간에 어떤 연관성이 없어 원의 넓이는 반지름의 제곱에 비례한다는 함수관계를 알아보기 위한 의도라기보다 단순히 반지름의 길이를 달리 하면서 원의 넓이를 구해보는 연습문제로 제시된 것으로 보인다.

주어진 넓이를 갖는 평행사변형이나 삼각형을 여러 개 그려보는 활동 이외에 넓이 공식에 내재된 함수관계를 다루는 활동이 제시되어 있지 않았다. 교과서에 나오는 주어진 넓이를 갖는 여러 도형을 그려보는 활동은 어떻게 실행하는가에 따라 함수관계에 주목하게 될 수도 있지만 그렇지 않을 수도 있는 것이다. 그러므로 넓이 공식에 내재된 함수관계를 다루는 내용은 의존관계를 다루는 내용에 비해 별로 없다고 할 수 있겠다.

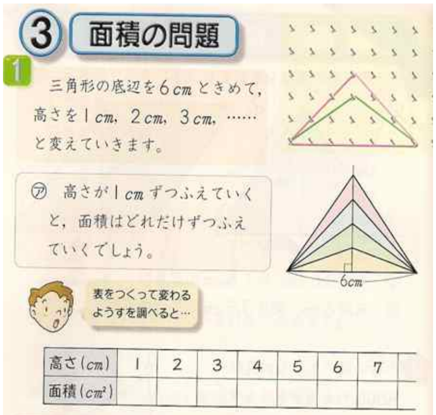
東京書籍에서 출판된 新しい算數 5一下(杉山吉茂 外, 2004)에는 평행사변형 넓이 공식에 내재된 함수관계, 곧 평행사변형의 높이는 그대로이고 밑변이 2배, 3배… 늘어나는 상황을 그림으로 보여주고, 관계표에 넓이 변화를 적도록 하는 활동이 제시되어 있다. 그리고 이 활동을 밑변이 1씩 증가할 때에 넓이는 어떻게 변화하는지, 밑변의 길이를 □, 넓이를 ○라 할 때, 평행사변형의 넓이를 구하는 식을 써보는 것으로 정리하게 하고 있다([그림Ⅱ-7]). 啓林館에서 출판된 算數 5年-下(細川藤次 外, 2004)에서는 삼각형 넓이공식에 나타난 밑변・높이와

넓이의 함수관계를 다루고 있다. 삼각형의 높이가 2배, 3배…로 늘어날 때 넓이 변화를 관계표에 조사하게 함으로써 높이와 넓이의 관계를 확인하게 하고 있다([그림Ⅱ-8]).



[그림Ⅱ-7]평행사변형의 밑변과 넓이

(杉山吉茂 外, 2004, p.7)



[그림Ⅱ-8]삼각형의 높이와 넓이

(細川藤次 外, 2004, p.12)

이와 같은 활동은 넓이 공식에 내재된 관계의 이해, 넓이 공식의 관계적 읽기와 직접적인 관련이 있는 활동이라고 할 수 있다. 평면도형의 넓이는 수업 실제에서 지도 방법에 따라 학습자가 풍부하고 깊게 수학적으로 사고할 수 있는 장면을 충분히 제공할 수 있는 좋은 소재이다. 수업 현장에서 넓이를 구하는 활동을 형식화함으로써 공식을 외우고 기계적인 적용을 통하여 문제를 풀이하는 방식으로 넓이를 구하는데 머무른다면, 그것은 평면도형의 넓이 공식이 지닌 잠재력을 충분히 활용하지 못하는 것이라고 할 수 있겠다. 식의 관계적 읽기 지도는 단순히 문제를 푸는 도구로 평면도형 넓이 공식을 여기는데서 탈피하여, 공식이 지닌 의미를 이해하고 수학적 사고의 발달을 꾀할 수 있는 한 방법이 될 수 있다.

Ⅲ. 평면도형 넓이 공식에 내재된 관계에 대한 이해 조사

이상의 고찰을 바탕으로, 평면도형의 넓이 공식에 내재된 관계를 아동들이 어떻게 이해하고 있는지, 평면도형의 넓이 공식에 내재된 관계에 관한 문제를 어떻게 해결하는지 다음과 같은 과정을 거쳐 알아보았다.

먼저 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식에 내재된 함수 관계에 초점을 맞춘 일련의 문항을 개발하였다. 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식을 학습한 5학년 2개 학급 62명의 아동들을 대상으로 2009년 7월 예비 조사를 실시하였다. 예비 조사 결과를 바탕으로 문항을 수정하고, 2학기 초인 2009년 9월 다시 64명의 5학년 아동들을 대상으로 수정된 문항을 적용하여 본 조사를 실시하였다. 검사 결과의 분석은 크게 세 부분으로 이루어졌다. 각 문항별 정답율을 조사하고, 아동들이 문제 해결에 사용한 전략의 유형을 추출하고, 문항 유형별로 아동들의 문제 해결에 어떤 현상이 나타나는지 살펴보았다.

1. 예비 조사

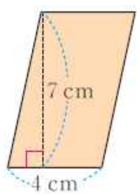
가. 문항 개발

다음 문제 1, 2와 같이 넓이를 구하는데 필요한 길이가 수치로 제시되어 있어서 그것을 공식에 넣어 넓이를 구하는 문제나 주어진 도형의 넓이를 구하는데 필요한 수를 채워 넣는 문제는 평면도형의 넓이 공식에 내재된 의존관계나 함수관계를 어떻게 이해하고 있는지를 알아보는데 적합하지 않다. 넓이 공식을 적용하여 넓이를 구하는 것이 넓이 공식에 내재된 관계들을 어떻게 이해하고 있는지를 말해 주지는 않기 때문이다.

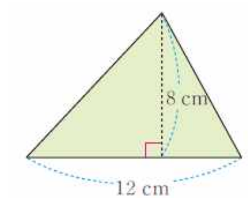
다음 문제 3, 4는 넓이와 의존관계에 있는 양을 인식하고 있는지를 알아보는 데, 곧 넓이 공식에 내재된 의존관계를 아동들이 인식하는지를 알아보는데 보다 적합해 보인다. 그러나 이 연구에서는 위와 같은 문제를 사용하여 아동들이 넓이 공식에 내재된 의존관계를 어떻게 인식하는지 알아보지 않았다. 삼각형의 넓이 공식을 학습하지 않은 아동에게 문제 3은 어떤 양이 삼각형의 넓이와 관련이 있는지 탐구할 것을 요청하는 것이 될 수 있다. 그러나 삼각형의 넓이 공식을 이미 학습한 아동에게는 그것이 아니라 이미 학습한 공식에 들어 있는 양인 밑변과 높이를 삼각형에서 단순히 찾아보는 문제가 될 수 있다. 문제 4와 같이 단순한 직사각형, 평행사변형, 삼각형이 아닌 도형, 아동이 넓이 공식을 알고 있지 않은 도형을 사용하면, 아동이 어떻게 넓이와 의존관계에 있는 양을 찾아내는지 알아볼 수 있을 것이다. 그러나 이 연구에서는 초점을 아동들이 이미 학습한 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식에 내재된 관계를 어떻게 인식하고 그에 관한 문제를 어떻게 해결하는지 알아보는 데에 한정하고, 아동들이 넓이 공식을 학습하지 않은 도형이나 복합도형을 써서 넓이와 의존관계에 있는 양을 어떻게 찾아내는지를 알아보지 않았다.

이상의 고려 위에, 평면도형의 넓이 공식에 내재된 의존관계와 함수관계 중 함수관계에 초점을 맞추어서 문항을 개발하였다. 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 각각에 대하여 독립변수-종속변수의 관계에 관한 문항 두 개와 독립변수-독립변수의 관계에 관한 문항 한 개

1. 다음 도형의 넓이를 구하시오.



2. 다음 도형의 넓이를 구하는 식의 □안에 알맞은 수를 써 넣으시오.



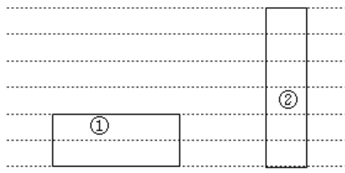
12×□÷2=□(㎠)

3. 필요한 곳의 길이를 재어 다음 도형의 넓이를 구하시오.

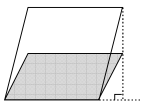
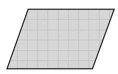
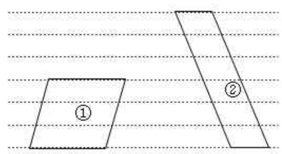
4. 다음 도형의 넓이를 구하기 위해 어느 곳의 길이를 재야 하겠는가? 길이를 재는 회수를 가능한 한 최소로 하여라.

를 만들었다. 독립변수-종속변수의 관계에 관한 한 문항은 변하는 독립변수가 한 개인 것이고 다른 한 문항은 두 개인 것이다. 문항에 제시된 도형에 가급적 밑변의 길이나 높이를 제시하지 않고자 하였다. 밑변의 길이나 높이를 제시하면 아동들로 하여금 주어진 수를 공식에 대입하여 문제를 해결하도록, 곧 특정한 전략을 사용하도록 유도하는 역할을 할 가능성이

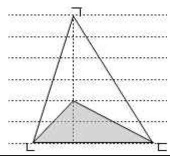
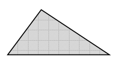
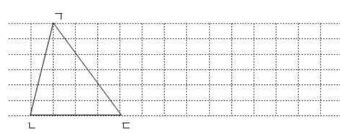
<직사각형>

1. 다음 직사각형의 넓이는 1입니다. 가로의 길이가 3배가 된다면 새로 만들어지는 직사각형의 넓이는 얼마입니까? 	2. 다음 직사각형의 넓이는 1입니다. 가로를 2배로 늘리고, 세로를 3배로 늘린다면 새로 만들어지는 직사각형의 넓이는 얼마가 되겠습니까? 	3. 다음의 두 직사각형 ①과 ②의 넓이를 비교하시오. (단 평행선의 간격은 일정하고, ①의 가로의 길이는 3㎝이고, ②의 가로의 길이는 1㎝입니다.) 

<평행사변형>

1. 색칠된 평행사변형의 넓이는 1입니다. 높이가 2배가 된다면 새로 만들어진 평행사변형의 넓이는 얼마입니까? 	2. 다음 평행사변형의 넓이는 1입니다. 밑변을 2배로 늘리고, 높이를 3배로 늘린다면 새로 만들어진 평행사변형의 넓이는 얼마가 되겠습니까? 	3. 다음의 두 평행사변형 ①과 ②중 넓이가 더 큰 것은 무엇입니까? (단 평행선의 간격은 일정하고, ①의 밑변의 길이는 2㎝이고, ②의 밑변의 길이는 1㎝입니다.) 

<삼각형>

1. 색칠된 삼각형의 넓이가 1이라고 할 때, 새로 만들어진 삼각형 ㄱㄴㄷ의 넓이는 얼마입니까? (단 평행선의 간격은 일정합니다) 	2. 다음 삼각형의 넓이는 1입니다. 밑변을 2배로 늘리고, 높이를 3배로 늘린다면 새로 만들어진 삼각형의 넓이는 얼마가 되겠습니까? 	3. 삼각형 ㄱㄴㄷ과 넓이가 같으면서, 밑변의 길이가 두 배인 삼각형을 그려보시오.(가로로 그어진 평행선과 세로로 그려진 평행선은 각각 간격이 같습니다) 

높다고 판단하였기 때문이다. 또 해당 도형의 넓이 공식을 문항에 부기하여 공식 기억 여부가 문제해결의 주요 변수가 되지 않도록 하였다. 문제 풀이 과정을 적는 공간을 두어 답을 어떻게 구했는지 그 과정을 자세하게 적도록 하였다. 이와 같이 개발하여 예비 조사에 사용한 문항은 다음과 같다.

나. 적용

2009년 7월 ○○시 소재 초등학교 5학년 학생 62명을 대상으로 예비 조사를 실시하였다. 아동들은 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식에 대한 학습을 마친 상태였다. 아동들의 풀이 과정을 분석한 결과, 아동들의 풀이에서 세 가지 전략이 추출되었다.

· 전략 A: 공식에 수를 대입하기
· 전략 B: 구체적인 그림을 그리거나 이용하기
· 전략 C: 변수 간의 관계에 주목하기

아동들에게서 가장 많이 나타난 전략은 공식에 수를 대입하여 해결하려는 것이었다. 전략 A, 곧 공식에 수를 대입하여 문제를 해결하려 한 아동들의 전략은 다시 세 가지 하위 유형의 전략으로 나누어진다. 첫째 유형은 (문제에 가로, 세로, 밑변의 길이나 높이가 주어져 있지 않음에도 불구하고) 문제에 나타나 있는 수, 예를 들어 2배, 3배의 2, 3을 그대로 공식에 대입하는 것이다. 둘째는 넓이가 1이라는 정보를 이용하여 가로와 세로 또는 밑변의 길이와 높이를 임의로 잡아서 공식에 대입하는 것이다. 예를 들어, “직사각형의 넓이가 1이면 가로, 세로 모두 길이가 1이라고 할 수 있으므로 가로를 3배 늘리면 가로의 길이가 3이 되어, 1×3=3 이므로 넓이는 3”이라고 하는 것이다. 셋째 유형은 평행선의 간격을 무조건 1로 보고 그에 따라 적당히 공식에 수를 대입하는 것이다. 직사각형 (1), (2), 평행사변형 (1), (2)번 문항은 그림을 그리면 넓이가 몇 배 커지는지 쉽게 확인할 수 있는 문제지만, 그림을 그려서 문제를 해결하고자 한 학생들은 많지 않았으며, 공식에 적당히 수를 대입해 문제를 풀려는 경향이 뚜렷하게 나타났다. 전략 C, 곧 변수 간의 관계에 주목하여 넓이에 영향을 주는 것은 밑변과 높이 (또는 가로와 세로)이며, 밑변 또는 높이의 변화만큼 넓이가 변화한다는 식의 추론으로 문제를 해결한 학생은 소수에 불과하였다.

2. 본 조사

가. 문항 수정

예비 조사에서 도형의 밑변의 길이나 높이 등에 구체적인 수치를 제시하지 않았음에도, 아동들의 풀이에서 적당한 수를 공식에 대입하려는 강한 경향성이 발견되었다. 이러한 결과를 보고, 도형의 넓이를 1이라고 한 것이 넓이에 맞추어 길이를 임의로 정하고 공식에 대입하려는 경향을 유도할 수 있다고 판단하였다. 이에 문항에서 주어진 도형의 넓이가 얼마인지에 대한 언급을 없애고 넓이를 구하라는 질문을 처음 도형의 넓이의 몇 배가 되겠는가로 바꾸었다. 또 넓이가 일정할 때 두 길이의 관계를 묻는 문제에 가로 세로 평행선을 도입하고, 평행선의 간격의 변화를 보고 밑변 또는 높이가 몇 배가 되었는지 알아내기 쉽도록 도형의 밑변 또는 높이의 변화를 조정하였다. 또한 다른 도형의 같은 유형의 문항에 대한 아동들의 반응을 비교하기 위하여 문항의 형태를 유형별로 통일하였다. 본 조사에 사용한 문항은 다음과 같다.

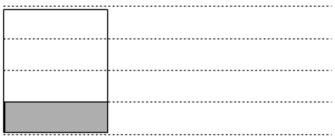
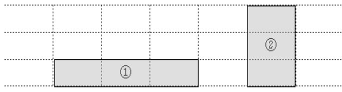
나. 결과 분석

1) 정답율 및 풀이 전략의 유형

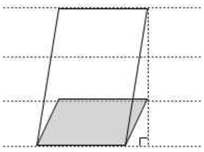
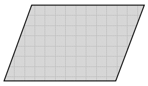
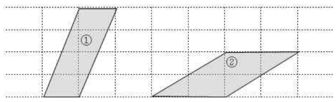
2009년 9월 ○○시 소재 초등학교 5학년 2개

생들에게 문제를 푸는데 필요한 시간을 충분히 제공하였으며, 전체 검사는 약 한 시간 여에 걸쳐서 이루어졌다. 검사 결과를 분석하는 과정에서 검사지에 나타난 문제 풀이 과정을 보고 아동이 사용한 전략을 판단하기 어려운 경우에는, 면담을 통해 검사지에 나타난 풀이를

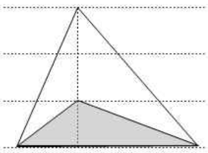
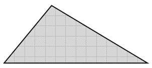
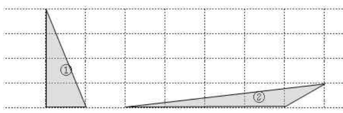
<직사각형>

<table>
<tr>
<td>(1) 색칠한 직사각형의 세로를 다음과 같이 늘렸습니다. 새로 만들어진 직사각형의 넓이는 색칠한 직사각형의 몇 배입니까?(단 평행선의 간격은 일정합니다)
</td>
<td>(2) 다음 직사각형의 가로를 2배, 세로를 3배로 늘린다면 새로 만들어지는 직사각형의 넓이는 처음의 몇 배가 되겠습니까?
</td>
<td>(3) 다음의 두 직사각형 ①과 ②의 넓이를 비교하시오. (단 가로, 세로 평행선의 간격은 각각 일정합니다)
</td>
</tr>
</table>

<평행사변형>

<table>
<tr>
<td>(1) 색칠한 평행사변형의 높이를 다음과 같이 늘렸습니다. 새로 만들어진 평행사변형의 넓이는 색칠한 평행사변형의 몇 배입니까?(단 평행선의 간격은 일정합니다)
</td>
<td>(2) 다음 평행사변형의 밑변을 2배, 높이를 3배로 늘린다면 새로 만들어지는 평행사변형의 넓이는 처음의 몇 배가 되겠습니까?
</td>
<td>(3) 다음의 두 평행사변형 ①과 ②의 넓이를 비교하시오. (단 가로, 세로 평행선의 간격은 각각 일정합니다)
</td>
</tr>
</table>

<삼각형>

<table>
<tr>
<td>(1) 색칠한 삼각형의 높이를 다음과 같이 늘렸습니다, 새로 만들어진 삼각형의 넓이는 색칠한 삼각형의 몇 배입니까? (단 평행선의 간격은 일정합니다)
</td>
<td>(2) 다음 삼각형의 밑변을 2배, 높이를 3배로 늘린다면 새로 만들어지는 삼각형의 넓이는 처음의 몇 배가 되겠습니까?
</td>
<td>(3) 다음의 두 삼각형 ①과 ②의 넓이를 비교하시오. (단 가로, 세로 평행선의 간격은 각각 일정합니다)
</td>
</tr>
</table>

아동과 함께 보면서 어떤 전략을 사용했는지 확인하였다.

각 문항에 대한 정답율은 다음 <표 Ⅲ-1>과 같다.

예비 조사에서와 마찬가지로 전략 A: 공식에 수를 대입하기, 전략 B: 구체적인 그림을 그리거나 이용하기, 전략 C: 변수 간의 관계에 주목하기가 관찰되었다. 다음 <표 Ⅲ-2>는 아동들이 사용한 전략별로 예비 조사와 본 조사 결과를 비교한 것이다.

예비 조사에서는 9문항 중 7문항에서 공식에 수를 대입하여 해결하려는 전략 A가 가장 많

<표 Ⅲ-1> 정답율 및 풀이 전략의 유형 (본 검사) n=64

문항	정답자수 (정답율)	풀이 유형				오답
		전략 A	전략 B	전략 C	무응답 및 기타	
직사각형(1)	48 (75%)	1 (1.56%)	34 (53.12%)	1 (1.56%)	12 (18.76%)	16 (25%)
직사각형(2)	48 (75%)	16 (25%)	27 (42.19%)	0 (0%)	5 (7.81%)	16 (75%)
직사각형(3)	58 (90.6%)	8 (12.5%)	45 (54.69%)	0 (0%)	5 (7.81%)	6 (9.3%)
평행사변형(1)	52 (81.3%)	3 (4.69%)	27 (42.19%)	1 (1.56%)	21 (32.86%)	12 (18.7%)
평행사변형(2)	47 (73.4%)	18 (28.13%)	22 (34.33%)	2 (3.13%)	5 (7.81%)	17 (26.6%)
평행사변형(3)	46 (71.9%)	18 (28.13%)	17 (26.59%)	0 (0%)	11 (17.18%)	18 (28.1%)
삼각형(1)	33 (51.6%)	5 (7.81%)	1 (1.56%)	5 (7.81%)	22 (34.42%)	31 (48.4%)
삼각형(2)	24 (37.5%)	3 (4.69%)	7 (10.94%)	8 (12.5%)	6 (9.37%)	40 (62.5%)
삼각형(3)	29 (45.3%)	13 (20.3%)	8 (12.5%)	0 (0%)	8 (12.5%)	35 (54.7%)

<표 Ⅲ-2> 풀이 전략별 반응율 비교

문항	풀이 유형(%)							
	전략 A		전략 B		전략 C		무응답 및 기타	
	예비	본	예비	본	예비	본	예비	본
직사각형(1)	58.1	1.56	14.5	53.12	6.5	1.56	1.6	18.76
직사각형(2)	72.6	25	12.9	42.19	4.8	0	1.6	7.81
직사각형(3)	50	12.5	12.9	54.69	0	0	9.4	7.81
평행사변형(1)	51.6	4.69	9.7	42.19	12.9	1.56	8.1	32.86
평행사변형(2)	66.1	28.13	12.9	34.33	6.5	3.13	4.8	7.81
평행사변형(3)	51.6	28.13	14.5	26.59	0	0	12.9	17.18
삼각형(1)	14.5	7.81	3.2	1.56	3.2	7.81	19.4	34.42
삼각형(2)	14.5	4.69	0	10.94	4.8	12.5	22.6	9.37
삼각형(3)	25.8	20.3	0	12.5	16.1	0	11.3	12.5

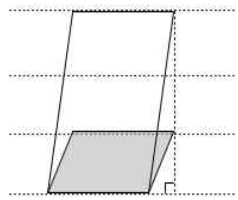
이 나타났다. 그러나 본 조사에서는 9문항 중 5문항에서 그림으로 해결하려는 전략 B가 가장 많이 나타났고, 평행사변형 (3) 문항과 삼각형 (1), (3) 문항에서만 전략 A가 전략 B보다 많이 나타났다. 예비 조사에서 아동들이 가장 선호하는 방식이 공식에 적당한 수를 대입하는 것이었다면, 본 조사에서는 그림이나 장면을 이용하는 전략으로 바뀌어 문제 해결 방식에서 변화가 나타났다. 이것은 넓이를 구하라는 문제와 넓이가 몇 배가 되었는지를 묻는 문제에 따라 아동들이 사용하는 전략에 차이가 있음을 보여 준다. 넓이를 구하라는 문제에는 넓이 공식을 떠올리고 그것에 적당한 수치를 대입하려 했다면, 몇 배인가를 묻는 질문에서 구체적인 수치를 이용해 넓이를 구하려고 하기보다 그림을 이용하여 넓이가 몇 배인지를 확인하려고 하는 것이다. 그러나 그림을 그려서 해결하기 어려운 경우나 문제로부터 공식에 대입할 수 있는 수를 만들어 낼 수 있는 경우에는 공식에 수를 대입하여 문제를 해결하려는 방식을 여전히 선호하는 아동들이 있었다. 예를 들어 삼각형 (3) 문항의 경우 세로 평행선과 가로 평행선의 간격이 다름에도 불구하고 평행선의 간격을 모두 1로 보고 삼각형의 밑변과 높이를 공식에 대입하는 아동들이 있었다.

예비 조사와 본 조사 공통적으로 직사각형 문항들이 가장 높은 정답율을 보였으며, 삼각형 문항의 정답율이 낮았다. 직사각형이나 평행사변형 문항의 경우 문제 상황을 그림으로 쉽게 그릴 수 있고, 넓이 공식에 의존하여 정답을 구할 수 있는 반면, 삼각형 문항은 문제 상황을 그림으로 옮기는 과정에서 실패하는 경우가 많았으며 단순히 문제에 주어져 있는 수를 넓이 공식에 대입하였을 때에는 오답을 얻기 쉽기 때문으로 보인다.

문항에 관계없이 변수간의 관계를 이용해서 문제를 해결하려는 전략 C를 사용한 경우는 매우 적었다. 직사각형 (2), 직사각형 (3), 평행사변형 (3), 삼각형 (3) 문항을 전략 C로 해결한 아동은 한 명도 없었다. 삼각형 (1), 삼각형 (2) 문항을 제외하고 전략 C로 문제를 해결한 아동은 64명 중 1~2명에 불과하였다. 삼각형 (1), 삼각형 (2) 문항에서 전략 C가 상대적으로 많이 나타난 것은 그림이나 공식을 이용하여 해결이 가능했던 직사각형, 평행사변형 문항과 달리 그림이나 공식으로 문제를 해결하고 설명하기 어려웠기 때문으로 보인다. 그 결과 직사각형, 평행사변형 문항에서는 전략 A나 전략 B를 사용했던 학생들 중 일부가 삼각형 문항에서는 변수 간의 관계를 이용하여 문제를 해결하려고 하였다.

2) 문항 유형별 분석

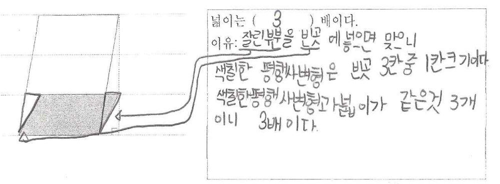
가) 문항 (1)



각 도형의 (1)번 문항은 색칠한 도형의 높이를 늘렸을 때 새로 만들어진 도형의 넓이는 처음 도형의 몇 배인지를 묻는 문항들이다. 문항에는 오른쪽 그림과 같이 평행선이 같은 간격으로 그려져 있다.

직사각형 (1)의 정답자 48명 중 34명이 전략 B를 사용하였다. 색칠된 직사각형이 새로 만들어진 직사각형에 4번 들어간다는 것이 시각적으로 분명하게 나타나기 때문에 직사각형을 부분으로 나누어 그림으로 해결한 학생들이 대부분이었던 것으로 보인다.

평행사변형 (1) 문항에서 정답자의 반 이상이 전략 B, 곧 다음 [그림 Ⅲ-1]과 같이 색칠한 평행사변형을 변형하여 새로 만들어지는 큰 평행사변형에 맞추거나 큰 평행사변형을 넓이가 같으면서 모양이 다른 평행사변형으로 바꾸어 문제를 해결하였다.



[그림 Ⅲ-1] 평행사변형 ⑴ 의 풀이 사례

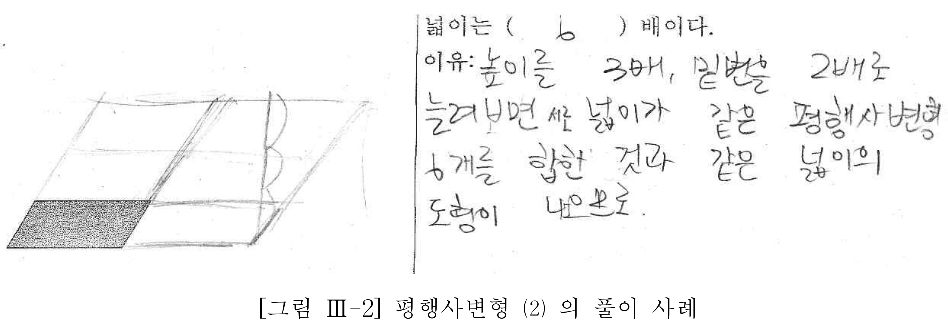
한 명의 아동이 전략 C를 사용하여 “작은 평행사변형의 밑변과 큰 평행사변형의 밑변의 길이가 같으니 큰 것의 높이를 축소하면 작은 평행사변형이 된다는 것을 알 수 있다. 이제 몇 배를 했는가만 남았는데 큰 것은 높이가 작은 것의 3배이니 답은 3배이다.”라고 넓이와 높이의 관계를 이용하여 설명하였다. 직사각형 ⑴ 문항에서는 색칠된 직사각형이 몇 번 들어가는지 쉽게 확인할 수 있지만, 다소간의 변형 작업을 수행해야 하는 평행사변형의 경우에는 몇 번 들어가는지 확신하지 못하고 설명에 어려움을 느끼며 자신의 답에 자신 없어 하는 학생들이 많이 늘어났다.

삼각형 ⑴ 문항의 정답율은 직사각형이나 평행사변형 문항의 정답율에 비해 20% 이상 떨어졌다. 그림을 이용하여 문제를 해결하려는 전략 B를 사용한 아동들의 수도 급격히 줄어 정답자 중 전략 B를 사용한 학생은 단 한 명이었다. 직사각형이나 평행사변형 문항에 비해 삼각형 ⑴ 문항은 시각적으로 두 도형의 넓이를 비교하기가 어렵고, 비교의 준거가 되는 단위도형을 만드는 것도 쉽지 않다. 그림을 이용하여 풀기 어려운 것은 결과적으로 변수간의 관계를 이용하여 풀려는 아동의 수가 늘어나게 만드는 기능을 하였다. 5명의 아동이 전략 C를 써서 “새로 만든 삼각형과 색칠된 삼각형은 밑변이 같다. 그러니 높이만 다를 것이다. 평행선의 간격은 같다고 했으니까 높이가 3배인 것으로 보아 넓이는 3배이다”와 같이 문제를 해결하였다.

나) 문항 ⑵

문항 ⑵는 주어진 도형의 밑변을 2배, 높이를 3배로 늘린다면 새로 만들어지는 도형의 넓이는 처음 도형의 넓이의 몇 배가 되겠는지를 묻는 문항들이다.

직사각형 ⑵에서는 정답자 48명 중 27명이 전략 B로 문제를 해결하였다. 색칠된 직사각형의 가로를 2배 늘리고, 세로를 3배 늘리면 가로로 2개의 직사각형이 그려지고 이것의 세로가 또 3배 늘어나므로 2칸짜리 직사각형을 3개 쌓으면 색칠된 직사각형 총 6개로 이루어진 직사각형이 만들어진다. 문제에 있는 수치를 이용하여 공식에 수를 대입하는 전략 A를 사용한 아동은 16명이었다. 전략 A는 다시 두 하위 유형으로 나누어진다. 첫째는 문제에 제시된 2, 3이라는 수를 직사각형 넓이 공식에 대입하여 6이라는 수치를 얻고 이것을 답으로 간주하는 것이다. 둘째는 색칠된 직사각형의 가로와 세로

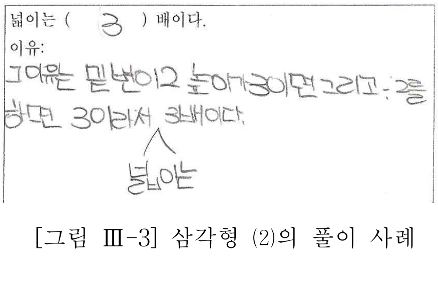


[그림 Ⅲ-2] 평행사변형 ⑵ 의 풀이 사례

의 길이를 임의로 얼마라고 가정한 뒤 각각을 2배, 3배한 길이를 가지고 넓이를 구하여 비교하는 것이다.

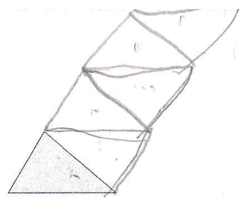
평행사변형 (2)에 전략 C를 사용한 아동은 2명으로, “밑변이 2배가 되면 넓이가 2배가 될 것이고, 높이가 3배가 되면 넓이가 3배가 될 것인데 둘 다 변하니까 둘을 곱하면 6배가 될 것”이라고 문제를 해결하였다. 직사각형 (2) 문항과 마찬가지로, 그림을 이용하여 문제를 해결하는 전략 B의 사용이 가장 많았지만, 공식에 수를 대입하여 문제를 해결한 전략 A도 정답자의 38%를 차지하였다. 전략 A는 직사각형에서와 마찬가지로, 공식에 그냥 2와 3을 대입한 경우와 평행사변형의 밑변과 높이를 임의로 가정하여 대입하는 경우로 나누어졌다. 전체적으로 평행사변형 (2) 문항에 대한 아동들은 반응은 직사각형 (2) 문항과 비슷한 양상을 보였다.

삼각형 (2) 문항의 정답율이 9 문항 중 가장 낮았다. 낮은 정답율의 원인으로는 공식에 수치를 대입하는 전략을 사용한 학생들의 대부분이 문제 해결에 실패한 점을 들 수 있다. 평행사변형 (2) 문항에서 공식에 수치를 대입하는 전략을 사용하여 문제를 해결한 학생들은 18명이었으나, 삼각형 (2) 문항에서 전략 A로 문제를 해결한 학생들은 3명이었다. 삼각형 (2) 문항의 오답으로 ‘3배’라고 답한 아동이 12명이었다. 이들의 풀이를 살펴보면 [그림 Ⅲ-3]과 같이 삼각형 넓이 공식에, 문제에 주어진 수를 그대로 넣어 넓이를 구하는 오류를 범하고 있음을 알 수 있다.

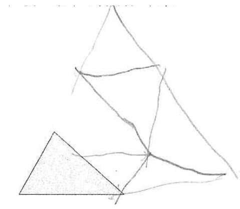


[그림 Ⅲ-3] 삼각형 (2)의 풀이 사례

둘째로, 직사각형 (2)나 평행사변형 (2) 문항에서는 성공적으로 작용한 전략 B를 삼각형 (2) 문항에서 사용하기 힘들었다는 점을 들 수 있다. 아동들은 [그림 Ⅲ-4]와 같이 밑변을 2배하면 넓이가 2배가 되므로 같은 삼각형을 겹쳐 넓이가 2배가 되는 평행사변형을 만들고 높이가 3배가 된다고 하였으므로 그 평행사변형을 3배 하여 6배라고 답하거나, [그림 Ⅲ-5]와 같이 그림을 그리고 7배라고 답하기도 하였다.



[그림 Ⅲ-4] 삼각형 (2) 풀이 사례 1

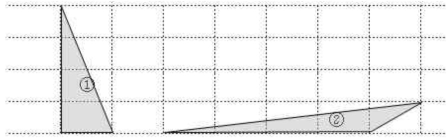


[그림 Ⅲ-5] 삼각형 (2) 풀이 사례 2

삼각형 (2) 문항은 정답율이 가장 낮은 한편, 전략 C 곧 밑변과 높이의 변화가 넓이에 영향을 준다고 보고 밑변이 2배, 높이가 3배 늘어났을 때 넓이는 2배, 3배를 곱한 만큼 늘어날 것이라 예상한 아동들이 가장 많은 문항이기도 하다. 이것은 그림을 그리거나 수치를 대입하여 문제를 해결하기 어려운 경우에 차선으로 관계에 주목하는 아동들이 있음을 보여 준다.

다) 문항 (3)

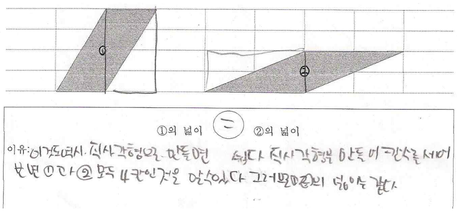
문항 (3)은 다음 그림과 같이 두 개의 도형을 주고 그 넓이를 비교할 것을 묻는 문항들이다.



직사각형 (3)은 가로 평행선과 세로 평행선이 두 직사각형을 똑같은 크기의 직사각형 3개로

나누어 주기 때문인지, 그림을 이용한 시각적인 비교 즉 두 도형의 넓이를 비교하기 위해, 도형을 분할하고 변형하는 전략 B가 가장 많이 나타났다. 직사각형의 가로, 세로 길이에 대한 정보를 수로 제시하지 않았지만 공식에 수를 대입하여 해결하려고 한 전략 A를 사용한 아동도 8명이었다. 도형의 가로 또는 세로가 평행선에서 몇 칸을 차지하는지 보고, 평행선의 가로와 세로 간격이 다름에도 불구하고, 그 수치를 공식에 넣어 넓이를 구하여 두 도형의 넓이가 모두 3㎠로 같다고 설명하였다. 하는 가로와 세로의 관계에 주목한 아동은 없었다.

평행사변형 (3) 문항에서도 직사각형 (3) 문항에서와 마찬가지로, 밑변과 높이 사이의 관계를 이용한 풀이는 없었다. 그림으로 문제를 해결한 경우와 공식에 수를 대입하여 문제를 해결하려고 한 반응이 비슷한 숫자를 보여, 압도적으로 전략 B가 많은 비율을 차지했던 직사각형 (3) 문항과는 차이를 보였다. 직사각형 (3) 문항에 비해 평행사변형 (3) 문항은 가로, 세로 평행선이 만들어 낸 직사각형이 단위도형으로 쓰인다 하더라도 평행사변형에 조작을 가해야 하므로 그림으로 설명하기가 다소 어려웠기 때문으로 보인다. 전략 B를 사용한 학생들은, 두 평행사변형을 쪼개어 단위 직사각형이 몇 개 들어 있는지 비교하거나, 넓이가 같은 직사각형으로 평행사변형을 바꾸어 넓이를 비교하는 방법을 사용하였다.([그림 Ⅲ-6] 참조). 전략 A를 사용한 학생들은 한 칸을 1로 가정하여



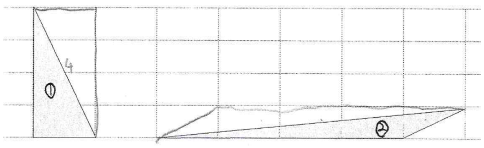
[그림 Ⅲ-6] 평행사변형 (3) 풀이 사례

공식에 대입하여 넓이를 구하거나, 평행선 한 칸의 길이를 몇 ㎝, 몇 ㎝라고 임의로 가정하여 공식에 대입하였다.

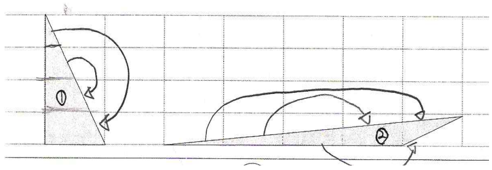
삼각형 (3) 문항의 정답율은 45.3%로 같은 유형의 직사각형, 평행사변형 (3) 문항에 비해 매우 낮았다. 특히 직사각형 (3) 문항의 정답율 약 90%와 비교하면 같은 유형의 문제라도, 직사각형이나 평행사변형으로 주어졌을 때와 삼각형으로 주어졌을 때 매우 큰 차이가 있음을 알 수 있다. 직사각형 (3) 문항에서는 주어진 두 도형을 분할하고 변형하여 문제를 해결하려는 전략 B가 가장 많이 나타났고, 평행사변형 (3) 문항에서는 전략 B와 전략 A가 비슷하게 나타났다. 삼각형 (3) 문항에서는 전략 A가 전략 B보다 더 많이 나타났다. 직사각형→평행사변형→삼각형으로 도형이 바뀌면서, 점점 더 공식에 수치를 대입하는 방법이 많이 나타나고 있음을 볼 수 있다. 직사각형, 평행사변형 문제와 마찬가지로 밑변과 높이의 관계를 이용하여 문제를 해결한 학생은 없었으며, 그림으로 문제를 푸는 데 어려움을 느끼면서, 공식에 수를 대입하여 문제를 해결한 경우가 많이 나타난 것으로 보인다.

가로, 세로 평행선에 의해 만들어지는 작은 직사각형은 넓이를 비교하는 기준 도형이 된다. 직사각형이나 평행사변형 문항의 경우, 문제에 주어진 도형을 분할하거나 변형하여 작은 직사각형 몇 개로 바꾸는 것이 어렵지 않았지만, 삼각형 문항에서는 주어진 삼각형을 작은 직사각형 몇 개로 만드는 것이 쉽지 않다. 한 아동은 [그림 Ⅲ-7]과 같이 삼각형이 직사각형 몇 칸을 차지하는가를 알기 위하여 넓이가 2배인 평행사변형을 그리고. 두 평행사변형의 크기를 비교하였다.

[그림 Ⅲ-8]에서 ①번 삼각형의 일부를 옮겨 붙이면 직사각형 2칸을 차지하게 된다. 그러나



[그림 Ⅲ-7] 삼각형 (3) 풀이 사례 1



[그림 Ⅲ-8] 삼각형 (3) 풀이 사례 2

②번 삼각형의 경우, 삼각형의 일부를 옮겨 직사각형을 만드는 과정에서, 서로 모양이 다르기 때문에 옮겨 붙여 딱 들어맞게 하기 어렵다.

[그림 Ⅲ-8]과 같이 도형을 자르고 옮겨 붙여 직사각형을 만들어 단위 직사각형의 개수로 두 도형의 넓이를 비교하고자 했던 학생들 9명 중 5명은 두 도형의 넓이가 다르다는 그릇된 결론을 내렸다.

Ⅳ. 결론

평면도형 넓이 공식은 넓이와 관련이 있는 길이들 사이의 관계를 형식화하여 나타낸 것이다. 평면도형의 넓이 공식을 이해하는 것에는 공식을 이용하여 넓이를 구할 수 있는 것에서 나아가 넓이 공식에 내재된 관계를 이해하는 것을 포함한다. 이 연구에서는 초등학교 아동들이 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식에 내재된 관계를 어떻게 인식하고 있는지 그와 같은 관계 이해에 관한 문제를 어떻게 해결하는지 조사하였다.

조사 결과 직사각형의 넓이 공식과 평행사변형의 넓이 공식에 내재된 관계 이해에 관한 문항의 정답율은 70% 이상으로 상대적으로 양호하게 나타났으나, 삼각형의 넓이 공식에 내재된 관계 이해에 관한 문항의 정답율은 30%~50%대로 낮게 나타났다. 직사각형이나 평행사변형에 비해 그림을 이용하여 문제를 해결하기 어렵다는 점과 문제에 주어진 수치 또는 임의로 설정한 수치를 삼각형의 넓이 공식에 대입하여 계산하는 중에 나누기 2를 하면서 추론에 착오를 범하기 쉬운 것이 상대적으로 낮은 정답율의 원인으로 작용하였다.

아동들의 문제 해결 과정을 분석한 결과, 세 가지 전략(전략 A: 공식에 수를 대입하기, 전략 B: 구체적인 그림을 그리거나 이용하기, 전략 C: 변수 간의 관계에 주목하기)이 유형으로 추출되었다. 넓이 공식에 들어 있는 변수 간의 관계를 이용하여 문제를 해결하기보다 그림을 그려 비교하거나 공식에 수를 대입하여 문제를 해결하려는 경향이 강하게 나타났다. 예비 조사에서와 같이 넓이를 구하라고 물었을 때에는 공식에 수치를 대입하는 전략을 사용하려는 경향이 강하게 나타났으나, 본 조사에서 넓이가 몇 배가 되겠는가라고 물었을 때에는 그림을 이용하여 문제를 해결하려는 경향이 상대적으로 강해지고 수치를 대입하여 해결하려는 경향은 상대적으로 낮아졌다. 변수 간의 관계에 주목하여 문제를 해결하려는 전략은 소수의 아동에게서만 관찰되었다. 문항 (1), 문항 (2)에서는 전략 C를 사용하여 밑변과 넓이, 또는 높이와 넓이 사이의 관계에 주목한 학생들은 몇 명 있었지만, 문항 (3)에서 전략 C를 사용하여 밑변과 높이와의 관계를 이용하여 문제를 해결한 학생은 없었다.

문항 유형별로 볼 때, 높이나 밑변의 길이 중 하나 또는 둘이 변함에 따라 넓이가 어떻게 되는지를 묻는 문항 (1), 문항 (2)에 비해 밑변의 길이와 높이가 다른 두 도형의 넓이를 비교

하는 문항 (3)의 정답율이 낮게 나타났다. 또 문항 (1)에서 문항 (2)로 바뀌면서 대체로 전략 B의 사용빈도가 감소하고, 전략 A의 사용빈도가 증가하는 것으로 나타났다. 문항 (1)에서 보면, 직사각형 (1)과 평행사변형 (1) 문항에서는 전략 B의 사용이 지배적이었고, 삼각형 (1) 문항에서는 변수간의 관계를 이용하여 풀려는 아동의 수가 늘어났다. 문항 (2)에서 보면, 직사각형 (2)나 평행사변형 (2)에서 전략 B의 사용이 역시 다수였고, 삼각형 (2)에서 전략 C의 사용빈도가 늘어나는 현상이 마찬가지로 나타났다. 문항 (3)에서도 유사한 현상이 관찰되었다. 이것은 아동들이 문항 유형별로 다른 반응을 보이기보다는, 도형에 따라 다른 반응을 보인다는 것을 시사한다. 모양의 변형이 삼각형에 비해 수월한 직사각형이나 평행사변형 문제에서는 도형을 변형하여 문제를 해결하려는 반면, 변형이 수월하지 않은 삼각형에서는 전략 C의 사용이 증가하는 것이다. 그림이나 공식에 대입하는 전략으로 문제 해결이 어려운 경우 비로소 관계에 주목하는 아동들이 생겨났고, 이들에게 관계에 주목하는 것은 적당한 수치를 공식에 대입하거나 그림을 이용하는 접근법이 작동하지 않을 때에 마지막에 선택할 수 있는 전략인 것처럼 보인다.

요약하면, 대부분의 아동들이 넓이 공식에서 변수 간의 관계를 읽어내고 이를 이용하여 문제를 해결하기보다는 그림을 그려 비교하거나, 공식에 수를 대입하여 문제를 해결하려 하였고, 그와 같은 전략이 효과적으로 작동하지 않는 경우에는 문제 해결에 실패하였다. 특히 직사각형이나 평행사변형에 비해 삼각형 넓이 공식에 내재된 관계에 대한 아동들의 이해가 상대적으로 불충분하고 낮은 수준에 있는 것으로 나타났다. 이것은 넓이 공식에 내재된 관계에 대한 아동들의 이해를 깊게 하기 위한 방안 마련의 필요성을 시사한다. 공식 구성 학습 경험과 공식을 적용하여 넓이를 구하는 문제를 푸는 학습 경험에 더하여 이와 같은 관계 이해에 초점을 둔 학습 경험을 제공할 필요가 있을 것이다. 이를테면 평행사변형의 넓이 공식을 구성하는 학습이 일단락된 후, 그것을 적용하여 도형의 넓이를 실제로 구하는 연습 문제 풀이를 통해 도형 공식을 익히게 하는 것에서 한발 더 나아가, 밑변이나 높이의 변의 길이가 일정하고 높이가 다른 평행사변형의 넓이를 구해보도록 하고, 이때 나타나는 반응을 비교·검토함으로써 '밑변이 2배, 3배로 변하면 넓이도 따라서 2배, 3배로 변한다'는 함수관계를 인식하게 하는 것을 고려할 수 있을 것이다.[1]

참고문헌

교육인적자원부(2007a). **초등학교 수학 5-가**. 서울: 천재교육

교육인적자원부(2007b). **초등학교 수학 익힘책 5-가**. 서울: 천재교육

1) 현재까지 이와 같은 학습 경험의 제공이 초등학교의 평면 도형의 넓이 공식에서 활발하게 이루어지지 못한 이유 중의 하나로, 교육과정 구성상 함수는 중학교 이후의 학습 내용이라는 구분 의식이 배경에 있는 것으로 보인다. 초등학교에서는 주로 반복 패턴, 간단한 증가 패턴과 같은 패턴의 학습을 저학년 중학년에서 주로 하고, 그에 더하여 □=△+3, □=△×2와 같은 간단한 관계를 직접적으로 다루는 정도에 머물러 왔다. 함수가 중학교에서 도입된다는 것은 일차함수 이후에 나오는 여러 함수와 관련된 현상에 대한 모든 탐구가 중등 이후에 시작되어야 한다는 것을 뜻하는 것인가를 생각해 볼 필요가 있다. 이를테면 초등학생들은 지수적으로 증가하는 현상이나 주기적인 현상을 표를 이용해서 탐구할 수 있고, 이와 같은 경험은 이후에 중학교 고등학교에서 보다 추상화된 방식으로 함수를 탐구할 때 바탕이 될 수 있다. 평면 도형의 넓이 공식에 내재된 함수 관계의 탐구는 더 포괄적인 맥락에서 초등학교에서 함수 관계의 지도는 어떤 방식으로 어디까지 그 외연을 확장하는 것이 적절한가의 문제와 관련하여 생각될 수 있는 주제이기도 하다.

교육인적자원부(2007c). **초등학교 수학 5-나**. 서울: 천재교육
교육인적자원부(2007d). **초등학교 수학 익힘책 5-나**. 서울: 천재교육
교육인적자원부(2007e). **초등학교 수학 6-나**. 서울: 천재교육
교육인적자원부(2007f). **초등학교 수학 익힘책 6-나**. 서울: 천재교육
교육과학기술부(2011a). **초등학교 수학 5-1**. 서울:두산동아
교육과학기술부(2011b). **초등학교 수학 익힘책 5-1**. 서울: 두산동아
김신영(2005). **초등학교 수학교과서에 나타난 삼각형과 사각형의 넓이 지도 방법에 대한 분석**. 서울교대 교육대학원 석사학위논문
박현웅(2009). **평면도형의 넓이 구하기에서 나타나는 오류유형과 원인 분석 - 5-가 단계를 중심으로**. 경인교대 교육대학원 석사학위논문
신택균(1995). 초등수학교육에서의 식의 지도. **대구교대 과학수학교육연구 18**, 1-9
원봉희(2002). **평면도형의 넓이를 관계적으로 이해시키기 위한 지도 구성 방안 연구**. 춘천교대 교육대학원 석사학위논문
유연자(2008). **평면도형 넓이 구하기 수업에서 나타난 학생들의 해결방법과 수학적 사고 분석**. 한국교원대 교육대학원 석사학위논문.
이선영(2006). **초등학생의 평면도형 넓이 구성 활동 분석**. 경인교대 교육대학원 석사학위논문
이용률(2005). **지도내용의 핵심과제99**. 서울: 경문사.
정동권(2001). 평면도형 넓이 지도를 통한 수학적 사고의 신장. **인천교대 과학교육논총 13**, 1-36
정말숙(2004). **평면도형의 넓이 지도 방안**. 부산교대 교육대학원 석사학위논문
정필원(2005). **평면도형 넓이 지도를 위한 퀴즈네르 막대의 활용에 관한 연구**. 경인교대 교육대학원 석사학위논문
細川藤次 外(2004). **算數 5年 下**. 啓林館
杉山吉茂 外(2004). **新しい算數 5ー下**. 東京書籍
片桐重男(1997). **수학적인 생각의 구체화**. (이용률·성현경·정동권·박영배 역). 서울: 경문사.

Children's Understanding of Relations in the Formulas for the Area of Rectangle, Parallelogram, and Triangle

Jeong Gyeong Soon (Pucheonseo Elementary School)
Yim Jae Hoon (Gyeongin National University of Education)

The area formula for a plane figure represents the relations between the area and the lengths which determine the area of the figure. Students are supposed to understand the relations in it as well as to be able to find the area of a figure using the formula. This study investigates how 5th grade students understand the formulas for the area of triangle, rectangle and parallelogram, focusing on their understanding of functional relations in the formulas.

The results show that students have insufficient understanding of the relations in the area formula, especially in the formula for the area of a triangle. Solving the problems assigned to them, students developed three types of strategies: Substituting numbers in the area formula, drawing and transforming figures, reasoning based on the relations between the variables in the formula. Substituting numbers in the formula and drawing and transforming figures were the preferred strategies of students. Only a few students tried to solve the problems by reasoning based on the relations between the variables in the formula. Only a few students were able to aware of the proportional relations between the area and the base, or the area and the height and no one was aware of the inverse relation between the base and the height.

* Key Words : area formula (넓이 공식), functional relation (함수 관계), area of a rectangle (직사각형의 넓이), area of a parallelogram (평행사변형의 넓이), area of a triangle (삼각형의 넓이).

논문접수 : 2011. 3. 30
논문수정 : 2011. 5. 6
심사완료 : 2011. 5. 20