대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 21 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 21, No. 2, 105-120. May 2011

수학 영재 학생들의 발견과 증명에 대한 연구1)

나 귀 수*

본 연구는 중학교 2학년 수학 영재 학생들(14세)에게 학생 스스로의 수학적 발견과 증명 경험을 제공하는 동시에, 수학 영재 학생들의 수학적 발견과 증명 과정을 분석하는 데에 그 목적이 있다. 본 연구에서 36명의 수학 영재 학생들의 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 발견과 증명 과정을 범주화한 결과, 영재 학생들의 수학적 발견과 증명 과정은 [코드 C]와 [코드 G]로 범주화되었다. [코드 C]의 학생들은 다면체의 여러 사례를 조사하면서, 그리고 [코드 G]의 학생들은 다면체의 대표적 예나 일반적 예를 숙고하면서 수학적 발견과 증명을 시도하였다. 또한, 본 연구에 참여한 36명의 영재 학생들 중에서 13명(36.1%)은 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 성질을 발견하지 못했으며, 7명(19.4%)은 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 성질은 발견하였지만 증명에는 성공하지 못했으며, 16명(44.4%)은 수학적 성질을 발견하고 증명에 성공한 것으로 확인되었다. 한편, 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 성질을 발견하고 증명한 학생들과 그렇지 못한 학생들 사이의 차이점은 수학적 사고 방법에서 기인하는 것으로 논의되었다.

I. 들어가며

증명은 고대 그리스 시대 이래로 수학의 핵심적인 부분이며, 학교수학에서도 중심적인 위치를 차지해 왔다. 증명은 학생들의 연역적 추론 능력을 개발하고 수학의 이해를 증진시키는 데에 그 의의가 있다.

영재 학생들을 포함하여 학생들이 스스로 추측하고 자신의 추측을 수학적으로 증명하는 경험을 갖는 것의 중요성과 관련하여 광범위한 연구가 수행되었다(교육인적자원부, 2007; 송상헌 외, 2006; Lee, 2005; NCTM, 2000; Polya, 1962). 우리나라의 2007년 개정 수학과 교육과정에서는 논리적 사고 능력 육성을 수학과의 중요한 목적으로 설정하고 있으며, 수학적 사고와 추론 능력을 발전시키기 위하여 학생 스스로 귀납, 유추 등을 통해 수학적 사실을 추측하고 이를 정당화하거나 증명하는 활동을 강조하고 있다(교육인적자원부, 2007). NCTM (2000)에서는 '과정 규준'의 하나로 '추론과 증명'을 설정하면서, '추론과 증명' 규준에서 학생들이 추론과 증명을 수학의 가장 근본적인 측면으로서 인식하고, 수학적 추측을 만들고 조사하고 수학적 논쟁과 증명 능력을 개발하고 평가할 수 있어야 한다고 주장하였다. 특히 중학교에서는 연역적 추론을 통해 수학적 논의를 형식화시킴으로써 추론 능력을 발전시키고 확장할 것을 강조하였다.

본 연구는 중학교 2학년 수학 영재 학생들(14세)에게 학생 스스로의 수학적 발견과 증명 경험을 제공하는 동시에, 수학 영재 학생들의

* 청주교육대학교, gsna21@cje.ac.kr
1) 본 연구는 2010년도 청주교육대학교 자유공모연구과제로 수행되었음.

수학적 발견과 증명 과정을 분석하는 데에 그 목적이 있다. 본 연구에서는 중학교 2학년 수학 영재 학생들이 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 성질을 스스로 발견하고 증명하는 과정을 분석하고자 한다. 한편, '증명'이라는 수학적 용어는 다양한 의미로 사용되고 있지만, 본 연구에서의 '증명'은 연역적 추론을 의미한다. 본 논문의 연구 문제를 구체적으로 진술하면 다음과 같다.

(1) 수학 영재 학생들이 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 성질을 스스로 발견하고 증명하는 과정은 어떻게 범주화될 수 있는가?

(2) 수학 영재 학생들은 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 성질을 스스로 발견하고 증명하는 데서 어느 수준까지 도달할 수 있는가?

Ⅱ. 선행 연구 고찰

1. 수학 영재 학생들의 증명의 특징

일반 학생들의 증명 능력과 특징에 대해서는 많은 연구들이 수행되었지만(Balacheff, 1988; Bell, 1976; Galbraith, 1981; Senk, 1985; Williams, 1990), 수학 영재 학생들의 증명 능력과 특징에 대한 연구는 그다지 활발하게 수행되지 않았다. 수학 영재 학생들의 증명 특징에 대한 선행 연구들을 살펴보면, Sriraman(2004)은 9학년 영재 학생들의 수학적 참을 확립하는 과정과 증명 관점을 조사하였다. Sriraman은 4명의 영재 학생들에게 '모든 삼각형에 대해 각 꼭짓점을 지나는 원이 존재한다'는 명제가 항상 참인가라는 증명 문제를 제시하고, 학생들의 증명 과정을 분석하여 학생들이 증명을 구성하는 데에 사용하는 과정을 시각화, 직관, 경험주의, 가역성 등으로 범주화하였다. 시각화 범주는 도형 그림을 변형하고 조사하면서 추론하는 과정이고, 직관 범주는 완벽한 정당화를 시도하기 전에 문제의 해결 방법을 파악하려는 과정이며, 경험주의 범주는 어떤 아이디어가 참임을 주장하기 위해 다양한 예들을 반복해서 사용하는 과정이며, 가역성 범주는 한 방향으로만 진행하던 일련의 사고 과정을 반대 방향으로 전환하는 과정이다. 4명의 영재 학생들의 증명 과정은, 시각적 정보(시각화)에 근거하여 '모든 삼각형에 대해 각 꼭짓점을 지나는 원이 존재한다'라는 명제가 정삼각형에 대해서만 참일 것이라는 직관으로부터 시작되었다. 학생들은 정삼각형의 외접원의 중심을 직관적으로 구성함으로써 위의 명제가 정삼각형에 대해서 참이라는 것을 확신하였다. 또한 위의 명제가 일반적인 삼각형에 대해서는 거짓이라고 추측하였으며 자신들의 추측을 정당화하기 위하여 반례를 찾고자 하였다. 학생들은 마지막으로 자신들의 사고 과정을 극적으로 반대 방향으로 전환함으로써 위의 명제가 참임을 결정하였다. 영재 학생들은 시각화, 직관, 경험주의, 가역성의 순서로 증명을 완성하였으며, 시행착오의 귀납적 과정에 의해 모든 삼각형에 대해 각 꼭짓점을 지나는 원이 항상 존재한다는 명제가 참이라는 결론에 도달한 것이다. Sriraman(2004)은 이와 같은 연구 결과에 근거하여 증명의 교수·학습에서는 귀납적이고 직관적인 접근 방법으로부터 시작하여 형식적 증명으로 진행하는 것이 바람직하다고 주장하였다.

Lee(2005)는 32명의 6학년(12세) 영재 학생들을 대상으로 기하적 추론과 비형식적 증명 구성의 특징을 조사하였다. Lee(2005)는 영재 학생들에게서 세 가지 유형의 추론 방식, 즉 실제적(pragmatic) 추론, 의미론적(semantic) 추론, 지적(intellectual) 추론과 창의적인 비형식적 증

명이 나타남을 확인하였다. 특히 9명의 영재 학생들은 제시된 모든 문제 상황에서 일관적으로 실제적 추론과 의미론적 추론을 거쳐 지적으로 추론하였으며, 형식적 증명을 위한 결정적인 아이디어를 제시하였다. 또한 처음에는 실제적으로 추론하던 수학 영재 학생들도 다른 학생들과의 논의를 통해 정당화에 대해 학습하면서 결과적으로 의미론적 추론과 지적 추론으로 추론 방식을 변화시켰다. Lee(2005)는 수학 영재 학생들의 증명 능력을 발달시키기 위해서는 영재 학생들이 비형식적 증명의 가치에 대해 관심을 기울일 수 있도록 교사의 세심한 지도가 필요하다고 주장하였다. 또한, 영재 학생들의 기하적 추론에 대한 감각을 발달시키기 위해서는 수학적 방식으로 추측하고 확인하고 정당화하는 경험을 제공할 필요가 있다고 주장하였다.

송상헌 외(2006)는 4명의 6학년(12세) 영재 학생들을 대상으로 하나의 기하적 과제를 활용하여 영재 학생들의 증명 수준과 증명의 구성 요소를 조사하였다. 이 연구에서 영재 학생들은 1명을 제외하고는 모두 증명의 필요성을 강하게 인식하고 있었으며, 친숙한 맥락에서는 약간의 도움을 받아서 형식적이고 일반적인 증명을 수행할 수 있는 것으로 나타났다. 그러나 4명의 영재 학생들은 모두 명백해 보이는 사실에 대한 증명의 필요성 인식에서 어려움을 나타냈다. 증명의 구성 요소와 관련하여, 영재 학생들은 특히 추론 규칙의 연접, 보조선 등의 적절한 그림의 이용, 검토의 다양성 및 완전성, 가정과 결론의 구분 등에서 어려움을 나타냈다. 한편, 수치적 접근을 선호하는 영재 학생들은 과제에 제시된 도형을 통해 알아낸 아이디어들을 일반화하는 것을 어려워하면서 증명까지 연결시키지 못하는 경우도 있었다.

위에서 살펴본 Sriraman(2004)과 송상헌 외(2006)의 연구는 4명이라는 소수의 수학 영재 학생들의 증명 과정과 특징을 상세히 조사하고 보고했다는 데에 그 의의가 있다. Lee(2005)의 연구는 수학적 증명을 학교에서 형식적으로 학습하지 않은 32명의 많은 수의 영재 학생들을 대상으로 기하적 추론과 비형식적 증명 구성의 특징을 조사했다는 데에 그 의의가 있다. 이러한 선행 연구들과 비교하여, 본 연구는 수학적 증명을 이미 학습한 중학교 2학년 영재 학생들(36명)을 대상으로 학생들이 스스로 수학적 성질을 발견하고 증명하는 과정을 범주화하고 분석한다는 점에서 그 의의가 있다고 할 수 있다. 한편, 본 연구에 참여한 수학 영재 학생들은 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 성질을 스스로 발견하고 자신이 발견한 수학적 성질을 증명하는 활동을 경험하였다. 따라서 본 연구는, Lee(2005)의 주장과 일관되게, 영재 학생들에게 수학적으로 추측하고 확인하고 정당화하는 경험을 제공한다는 점에서 그 의의가 있다고 할 수 있다.

2. 학생들의 증명 수준

학생들의 증명 수준과 특징에 대해서는 다양한 연구 결과가 축적되어 왔다(Balacheff, 1988; Bell, 1976; Galbraith, 1981; Senk, 1985; Waring, 2000; Williams, 1990). 본 논문에서는 이와 같은 연구들 중에서 대표적으로 Bell(1976), Balacheff (1988), Waring(2000)의 연구 결과를 살펴보기로 한다.

Bell은 발달 심리학적 관점에서 중등학교 학생들의 증명 과정과 일반화 활동을 조사하여 다음과 같은 다섯 단계를 확인하였다. 제0단계는 관련성과 규칙성을 전혀 인식하지 못하고 주어진 상황의 규칙성을 전혀 예측하지 못하는 수준이다. 제1단계는 관련성이나 규칙성을 인

식하기는 하지만, 관련성이나 규칙성의 적용 가능한 영역을 조사할 필요성을 전혀 인식하지 못하는 수준이다. 이 단계의 학생들에게 설명이나 증명을 요구하면 학생들은 자료를 재진술할뿐 설명이나 증명을 제시하지 못한다. 제2단계는 관련성에 대한 명제가 한 부류의 사례에 적용됨을 인식하고 다양한 사례들을 조사하는 수준이다. 제3단계는 모든 사례를 다루어야 하는 필요성을 인식하고, 경험적 방법의 한계를 분명하게 인식하는 수준이다. 또한 완전한 연역적 추론을 수행하며 불완전한 연역적 추론을 구분할 수 있는 수준이다. 제4단계는 추론의 출발점과 사용된 정의를 분명하게 언급할 필요성을 인식하는 수준이다(Sekiguchi, 1991, p. 29에서 재인용).

Balacheff(1988)는 관찰 방법을 통하여 14쌍의 13~14세 학생들의 증명 형태를 분석하였다. 그는 학생들의 증명 형태를 '소박한 경험주의(naive empiricism)', '결정적 실험(crucial experiment)', '포괄적 예(generic example)', '사고 실험(thought experiment)'으로 범주화였다. '소박한 경험주의' 방식을 취하는 학생들은 적은 개수의 사례에 대한 조사로부터 일반적 타당성을 결론지었다. '결정적 실험' 방식을 취하는 학생들은, 몇 가지 사례에 대한 검사만으로는 추측을 정당화하기에 충분하지 않다는 것을 인식하였으며 보다 광범한 사례를 고사함으로써 추측을 정당화하려고 시도하였다. '포괄적 예' 방식을 취하는 학생들은 추론을 이용해서 추측의 타당성을 설명하지만, 설명에 있어서 특별한 사례를 이용하였다. '사고 실험' 방식을 취한 학생들 또한 추론을 통해 추측의 타당성을 설명하지만 일반적인 용어를 이용하여 설명한다는 점에서 '포괄적 예' 방식을 취한 학생들과 대조된다.

Waring(2000)은 학생들의 증명 수준을 6수준으로 구분하였다. 제0수준의 학생들은 증명의 필요성과 증명의 존재성을 인식하지 못하는 수준이며, 제1수준의 학생들은 증명의 필요성을 인식하지만 몇 가지 특수한 사례를 확인하는 것으로 증명이 충분하다고 생각한다. 제2수준의 학생들은 몇 가지 특수한 사례를 확인하는 것으로는 증명이 불충분하다는 것을 인식하며, 좀 더 다양한 예나 임의로 선정한 예를 사용하면 증명이 된다고 생각한다. 제3수준의 학생들은 일반적 증명의 필요성을 인식하고, 다른 사람의 도움을 받아서 쉬운 수준에서 증명을 구성할 수 있다. 제4수준의 학생들은 일반적 증명의 필요성을 인식하고 친숙한 맥락에서 증명을 구성할 수 있다. 제5수준의 학생들은 일반적 증명의 필요성을 인식하고 다양한 맥락에서 증명을 구성할 수 있다(송상헌 외, 2006에서 재인용).

본 연구에서는 두 번째 연구문제인 수학 영재 학생들이 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 성질을 발견하고 증명하는 데서 어느 수준까지 도달할 수 있는가를 분석하기 위해 Balacheff(1988)의 연구 결과를 활용하고자 한다. 그 이유는 본 연구에서 활용한 과제가 어떤 명제를 제시하고 그 명제를 증명하도록 요구하는 형식의 과제가 아닌 학생들 스스로 수학적 성질을 발견하고 그것을 증명하도록 하는 형식의 과제이며, 이러한 형식의 과제를 활용한 학생들의 발견과 증명 수준을 분석하는 데에 Balacheff(1988)의 연구 결과가 가장 적절하다고 판단했기 때문이다. 또한 Balacheff(1988)가 연구 대상으로 삼은 학생들이 13~14세 학생들로서 본 연구에서 조사하고 있는 중학교 2학년(14세) 영재 학생들과 거의 동일한 연령대의 학생들이기 때문이다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 중학교 2학년(만 14세) 학생 36명이며, 이들은 모두 대한민국의 중소도시에 위치한 C대학 부설 영재교육원에서 수학 영재교육을 받은 학생들이다. C대학에서는 단답형 문항을 중심으로 하는 1차 지필 시험, 서술형 문항을 중심으로 하는 2차 지필 시험을 통해 수학 영재 학생들을 선발한다. C대학의 영재 선발은 수학교육 전문가인 C대학의 수학교육과 교수들에 의해 관리되며, Renzulli & Reis(1986)가 영재성의 요인으로 규정한 높은 지적 능력, 과제 집착력, 창의성 등을 확인하는 것에 초점이 있다. 따라서 본 연구에 참여한 36명의 학생들은 'C대학의 수학교육 전문가들에 의해 수학적으로 탁월한 성취를 보일 잠재적 가능성을 가진 것으로 확인된(Gagne, 1991)' 수학 영재 학생이라고 할 수 있다.

국가 수준의 교육과정을 운영하고 있는 우리나라에서 다면체의 꼭지점, 모서리, 면 등의 기본 개념은 초등학교 6학년 때부터 다루어지지만, 다면체의 면각은 수학과 교육과정에서 다루어지지 않는다. 따라서 본 연구에 참여한 영재 학생들은 학교에서 다면체의 면각에 대해 학습하지 않았다. 영재 학생들이 학교가 아닌 사교육 기관에서 다면체의 면각을 선행 학습했을 가능성을 고려하여 영재 학생들이 가지고 있는 사전 지식을 조사하였지만, 본 연구에 참여한 36명의 영재 학생들은 다면체의 면각에 대해 전혀 학습하지 않은 상태인 것으로 나타났다.

한편, 36명의 수학 영재 학생들은 증명에 대해서는 이미 학습한 상태에서 본 연구에 참여하였다. 우리나라의 제7차 교육과정 및 2007년 개정 수학과 교육과정의 교과서에서는 중학교 2학년 2학기부터 '수학적 증명'을 본격적으로 학습하도록 되어 있다. 본 연구에 참여한 수학 영재 학생들은 중학교 2학년 1학기 여름 방학 기간에 본 연구에 참여하였으므로 학교에서는 증명에 대해 학습하지 않았지만, 학원 등에서 선행 학습을 통해 이미 증명에 대해 학습한 상태였다.

2. 연구 방법 및 절차

본 연구에서는 36명의 영재 학생들에게 다면체의 면각과 관련된 1개의 문제를 제시하고, 3시간에 걸쳐 영재 학생들 스스로 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 성질을 발견하고 그것을 증명하도록 하였다. 본 연구는 3시간에 걸친 영재 학생들 스스로의 수학적 발견과 증명 과정을 분석한 것이다.

3시간의 수학적 발견과 증명 활동을 안내한 교사는 본 연구자였다. 본 연구자(교사)는 영재 학생들에게 다면체의 면각이 무엇인가에 대한 설명만 제공하였으며, 영재 학생들의 수학적 발견과 증명 활동에 전혀 간여하지 않았고 어떠한 힌트도 제공하지 않았다. 따라서 본 연구에서 보고되는 수학 영재 학생들의 수학적 발견과 증명 과정은, 다면체의 면각을 학습하지 않은 영재 학생들이 스스로 다면체의 면각의 합과 꼭짓점의 개수, 모서리의 개수, 면수 개수 사이의 수학적 성질을 발견하고 증명한 과정이다.

본 연구에서 수집하고 분석한 자료는 수학 영재 학생들의 발견과 증명 과정이 기록되어 있는 활동지이다. 본 연구자(교사)는 영재 학생들에게 자신의 발견 과정과 증명 과정을 활동지에 상세하게 기록하도록 하였으며, 이 활동지를 중심으로 영재 학생들의 발견과 증명 과

정을 분석하였다. 또한 본 연구자가 교사로서 참여하면서 수학 영재 학생들의 발견과 증명 과정을 기록한 관찰 노트도 자료 분석에 보조적으로 활용되었다.

3. 과제

본 연구에서 수학 영재 학생들에게 제시한 수학적 발견과 증명 과제는 다음과 같다.

> 다면체에서 각 면은 n개의 변으로 둘러싸여 있고 n개의 내각을 가진다. 그 각을 **면각(face angle)**이라고 하고, 다면체의 모든 면각의 합을 $\sum a$로 나타내기로 하자. 그리고 다면체에서 면의 개수는 F, 꼭짓점의 개수는 V, 모서리의 개수는 E라고 하자.
>
> 일반적인 다면체에서 $\sum a$를 구할 수 있는 방법이나 식을 찾고, 그것을 증명하여라.

이 과제는 Polya(1962)에서 가져온 것으로서, Polya는 이 과제를 학생들이 관찰, 귀납적 추론, 수학적 추측과 발견, 수학적 정당화 등을 경험할 수 있는 의미있는 과제로 제안하였다. $\sum a$와 V, E, F 사이의 관계는 $\sum a = 2\pi(E-F)$ 또 $\sum a = 2\pi(V-2)$이다. 이러한 수학적 성질에 대한 증명을 살펴보면 다음과 같다(Polya, 1962).

가. $\sum a = 2\pi(E-F)$

$s_1, s_2, s_3, \cdots, s_F$를 다면체의 첫번째 면, 두번째 면, …, 마지막 면의 모서리의 개수를 각각 나타낸다고 하자. 그러면

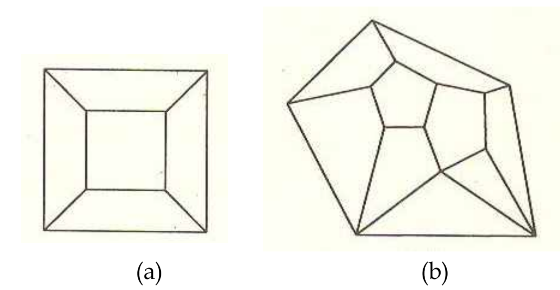
$$\sum a = \pi(s_1-2)+\pi(s_2-2)+\cdots+\pi(s_F-2)$$
$$=\pi(s_1+s_2+\cdots+s_F-2F)$$

여기에서 $s_1+s_2+s_3\cdots+s_F$는 모든 면에 있는 모서리의 개수를 합한 것이며, 이 때 각 모서리는 이웃한 두 면 각각에 대하여 센 것이므로 두 번씩 센 것이 된다. 그러므로 E를 다면체의 모서리의 개수라고 하면 $s_1+s_2+s_3\cdots+s_F=2E$이다. 따라서 $\sum a = 2\pi(B-F)$이다.

나. $\sum a = 2\pi(V-2)$

다양한 다면체에 대하여 생각하기 위하여 다면체가 연속적으로 변한다고 상상해보자. 다면체의 '형태적 구조'인 면, 모서리, 꼭짓점 사이의 관계는 변하지 않으면서 다면체의 모서리와 꼭짓점이 연속적으로 변하여 면이 점차로 줄어든다고 생각해보자. 이것은 각 면에서의 면각 α에는 영향을 미치지만 모든 면각의 합인 $\sum a$에는 영향을 미치지 않는다. 그러므로 $\sum a$는 변하지 않는다. 이런 식으로 다면체를 $\sum a$를 보다 쉽게 계산할 수 있는 형태의 다면체로 바꿀 수 있다.

다면체의 한 면을 '밑면'으로 정하고, 평면에 위치하도록 한 다음 잡아당기고 다른 면들은 오므려서 전체 다면체의 밑면에 대한 정사영을 구한다. [그림 III-1]의 (a)는 정육면체의 정사영을, (b)는 일반적인 다면체의 정사영을 표현한 것이다. 결과는 다각형 그림 두 장을 겹쳐놓은 것처럼 되는데, 원래 다면체의 면이 F개일 때, 위에 새로 만들어진 다각형은 $F-1$개의 다각형으로 분할되어 있다. 이 때 새로 만들어진 다각형을 둘러싸는 모서리의 개수를 r이라고 하자.



[그림 III-1] 평면에 나타낸 다면체(Polya, 1962)

평평해진 다면체와 원래 다면체의 $\sum a$는 같

은 값을 가지는데, 이것은 세 부분으로 구분된다. 밑면의 각의 합은 $(r-2)\pi$이다. 위에 있던 입체의 면에 대해서도 마찬가지이다. 이제 내부의 각에는 $V-r$개의 꼭지점이 있으므로 구하는 각의 합은 $(V-r)2\pi$이다. 이 세 부분으로부터 다음과 같이 $\sum a = 2\pi(V-2)$라는 식을 얻을 수 있다.

$$\sum a = 2(r-2)\pi + (V-r)2\pi = 2\pi V - 4\pi = 2\pi(V-2)$$

Ⅳ. 결과 및 논의

1. 연구 문제 1: 영재 학생들의 수학적 발견과 증명 과정 범주화

본 연구에서 조사한 영재 학생들의 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 발견과 증명 과정을 범주화하면 다음의 <표 IV-1>과 같다.

본 연구에서 영재 학생들의 수학적 발견과 증명 과정은 먼저 시작점에서 두 가지 범주로 구분되었다. 첫 번째로 영재 학생들은 다면체의 여러 사례를 조사함으로써 다면체의 면각의 합을 발견하고자 시도하였다. 본 연구에서는 이 학생들의 응답을 [코드 C]로 범주화하였으며, 29명의 학생이 여기에 속하였다(<표 IV-1> 참고). 다음으로 영재 학생들은 다면체의 대표적 예나 일반적 예를 숙고하면서 다면체의 면각의 합을 발견하려고 시도하였다. 본 연구에서는 이 학생들의 응답을 [코드 G]로 범주화하였으며, 7명의 학생이 여기에 속하였다. 다음에서는 수학 영재 학생들의 수학적 발견과 증명 과정을 범주별로 자세히 살펴보기로 한다.

가. 여러 사례를 조사하면서 시작한 학생들의 수학적 발견과 증명 과정: [코드 C]

다면체의 여러 사례를 조사함으로써 다면체의 면각의 합을 발견하고자 시도한 29명의 [코드 C]의 학생들의 수학적 발견과 증명 과정은 다시 [코드 C1], [코드 C2], [코드 C3]으로 범주화되었다.

[코드 C1]에 속하는 12명의 학생들은 다면체의 여러 사례를 조사했지만 $\sum a$와 E, F, V 사이의 관련성을 발견하지 못하였다. [코드 C1]에 해당하는 학생들은 다면체의 여러 사례만 조사하다가 탐구를 마친 학생들이다. 예를 들어, [코드 C1]에 속하는 학생 S1은 다면체의 사례

<표 IV-1> 수학 영재 학생들의 수학적 발견과 증명 과정의 범주와 수준

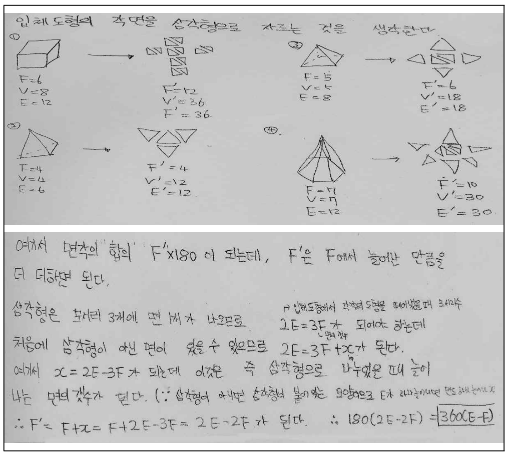
<table>
<tr><th colspan="7">범주 (코드)</th><th colspan="2" rowspan="2">증명 수준</th></tr>
<tr><th>발견을 위한 시작</th><th colspan="3">C
(29명/80.6%)</th><th colspan="3">G
(7명/19.4%)</th></tr>
<tr><th rowspan="6">발견과 증명 과정</th><td colspan="2">C1</td><td>12명 (33.3%)</td><td colspan="2">G1</td><td>1명 (2.8%)</td><td>증명을 시도하지 않음</td><td>13명 (36.1%)</td></tr>
<tr><td colspan="2">C2</td><td>7명 (19.4%)</td><td colspan="3"></td><td>결정적 실험</td><td>7명 (19.4%)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">C3
(10명/27.8%)</td><td>C31</td><td>7명 (19.4%)</td><td rowspan="4">G3
(6명/16.7%)</td><td>G31</td><td>2명 (5.7%)</td><td rowspan="4">사고 실험</td><td rowspan="4">16명 (44.4%)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">C32</td><td rowspan="3">3명 (8.3%)</td><td>G32</td><td>1명 (2.8%)</td></tr>
<tr><td>G33</td><td>1명 (2.8%)</td></tr>
<tr><td>G34</td><td>2명 (5.7%)</td></tr>
</table>

로서 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체 등의 정다면체를 조사함으로써 수학적 발견을 시도하였다. 학생 S1은 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 면의 개수(F), 모서리의 개수(E), 꼭짓점의 개수(V)를 각각 적고, 면각의 합($\sum a$)을 구체적으로 계산하면서 $\sum a$와 F, E, V 사이의 관련성을 발견하고자 시도하였지만, 결국 $\sum a$와 F, E, V 사이의 관련성을 발견하지 못하고 탐구를 끝마쳤다.

[코드 C2]에 속하는 7명의 학생들은 다면체의 여러 사례를 조사하여 $\sum a$와 F, E, V 사이의 관련성을 발견하였다. 그러나 이 학생들은 발견한 $\sum a$와 F, E, V 사이의 관련성을 증명하지는 못하였다.

[코드 C3]에 속하는 10명의 학생들은 다면체의 여러 사례를 조사하여 $\sum a$와 F, E, V 사이의 관련성을 발견하고 증명에 성공하였다. [코드 C3]에 속하는 학생들의 수학적 발견과 증명 과정은 다시 [코드 C31]과 [코드 C32]로 범주화되었다. [코드 C31]과 [코드 C32]에 해당하는 학생들은 $\sum a$와 F, E, V 사이의 관계를 발견하는 과정에서 서로 다른 특징을 나타냈다. [코드 C31]에 속하는 7명의 학생들은, 다면체의 여러 사례를 조사할 때 F, E, V의 값을 변화시키면서 그에 따라 $\sum a$의 값이 어떻게 변하는가를 확인하면서 $\sum a$와 F, E, V 사이의 관련성을 발견한 다음 증명을 완성하였다. 반면에, [코드 C32]에 속하는 3명의 학생들은 다면체의 여러 사례를 조사하면서 $\sum a$와 F, E, V 사이의 관련성에 대한 아이디어를 얻고 그 아이디어를 통해서 곧바로 수학적 증명으로 진행하여 완성하였다.

예를 들어, [코드 C32]에 속하는 학생 S2의 수학적 발견과 증명 과정을 살펴보면, 학생 S2는 다면체의 사례로서 직육면체, 사각뿔, 삼각뿔, 육각뿔을 조사함으로써 수학적 발견을 시작하였다([그림 IV-1] 참고). 학생 S2는 직육면체, 사각뿔, 삼각뿔, 육각뿔의 면각의 합을 계산하지 않고, 직육면체, 사각뿔, 삼각뿔, 육각뿔의 면들을 모두 떼어 삼각형으로 쪼개서 평면에 펼쳐 놓은 다음, 학생 나름대로 새로운 기호인 F', E', V'를 도입하여 다면체의 면각의 합과 F', E', V' 사이의 관련성을 탐구하였다. F'는 다면체의 면들을 모두 떼어 삼각형으로 쪼개서 평면에 펼쳐 놓았을 때의 삼각형의 개수이고, 따라서 $\sum a = F' \times 180^\circ$이다. 다음으로 학생 S2는 F'와 E, F, V 사이의 관련성을 조사하여 $F' = F + 2E - 3F = 2E - 2F$임을 구하고, $\sum a = (2E - 2F) \times 180^\circ = 360^\circ \times (E - F)$임을 증명하였다.



[그림 IV-1] 학생 S2의 수학적 발견과 증명 (코드 C32)

[코드 C]에 속하는 29명(80.6%)의 학생들은 수학적 발견을 위한 탐구 과정에서 귀납적 추론을 시도했다고 할 수 있으며, 이로부터 귀납적 추론의 시도는 수학 영재 학생들에게 있어서 자연스러운 사고 경향임을 알 수 있다. Polya(1962)는 관찰과 귀납적 추론이 수학적으로 추측하고 수학적 원리를 발견하는 데에 매우 중요한 사고 방법이며, '발생 과정의 수학'은 실험적이고 귀납적 과학의 성격을 갖는다고

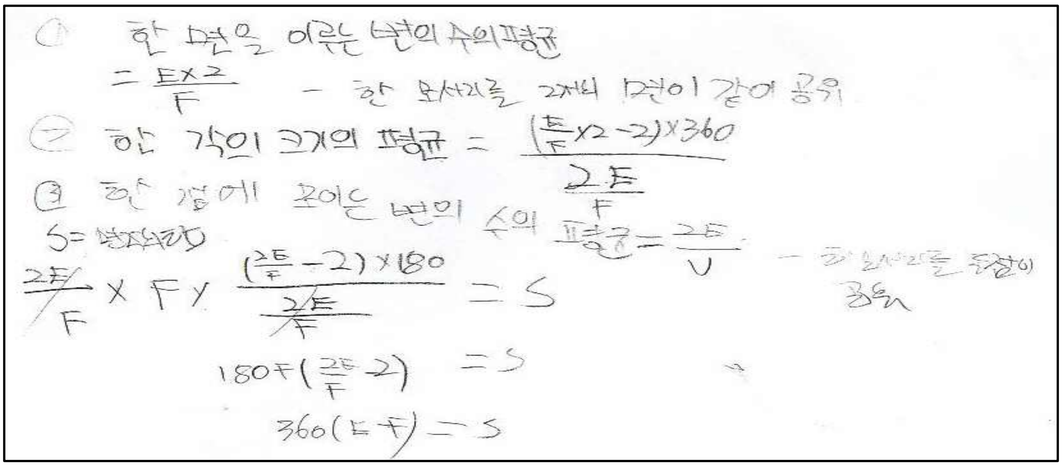
주장하였다. 본 연구에서 36명의 수학 영재 학생들 중에서 29명(80.6%)의 학생들이 다면체의 다양한 사례를 조사하면서 수학적 발견을 시작했다는 것은 이와 같은 Polya(1962)의 주장과 일맥상통한다고 할 수 있다. 또한, 증명의 교수・학습에서는 귀납적이고 직관적인 접근 방법으로부터 시작하여 형식적 증명으로 진행하는 것이 바람직하다고 주장한 Sriraman(2004)의 연구 결과를 뒷받침한다고 할 수 있다.

나. 대표적 예를 조사하면서 시작한 학생들의 수학적 발견과 증명 과정: [코드 G]

다면체의 대표적 예나 일반적 예를 숙고하면서 다면체의 면각의 합을 발견하고자 시도한 7명의 [코드 G]의 학생들의 수학적 발견과 증명 과정은 다시 [코드 G1], [코드 G3]으로 범주화되었다(<표 IV-1> 참고).[2] [코드 G1]의 학생들은 일반적 예를 생각하면서 Σa와 E, F, V 사이의 관련성을 발견하려고 시도했지만 성공하지 못한 학생들이다. [코드 G3]의 학생들은 다면체의 대표적 예나 일반적 예를 생각하면서 Σa와 E, F, V 사이의 관련성을 발견하고 수학적 증명을 완성한 학생들이다. [코드 G3]의 학생들에게 있어서 Σa와 E, F, V 사이의 관련성 발견과 증명은 동시에 이루어졌다.

[코드 G3]에 해당하는 학생들의 수학적 발견과 증명 과정은 다시 [코드 G31], [코드 G32], [코드 G33], [코드 G34]로 범주화되었다. [코드 G31], [코드 G32], [코드 G33], [코드 G34]에 해당하는 학생들은 Σa와 E, F, V 사이의 관련성을 발견하고 증명하는 과정에서 서로 다른 수학적 사고 특징을 나타냈다. 대표적 예나 일반적 예를 숙고하면서 Σa와 E, F, V 사이의 관련성을 발견하고 수학적 증명을 완성하는 과정에서, [코드 G31]에 해당하는 학생들은 일반적인 대수식을 세웠으며, [코드 G32]에 해당하는 학생들은 평균 개념을 활용하였으며, [코드 G33]에 해당하는 학생들은 유클리드 기하적 사고 방법을 활용하였으며, [코드 G34]에 해당하는 학생들은 위상기하적 사고 방법을 활용하였다.

먼저, [코드 G32]에 해당하는 학생 S3의 수학적 발견과 증명 과정은 다음의 [그림 IV-2]와 같다.



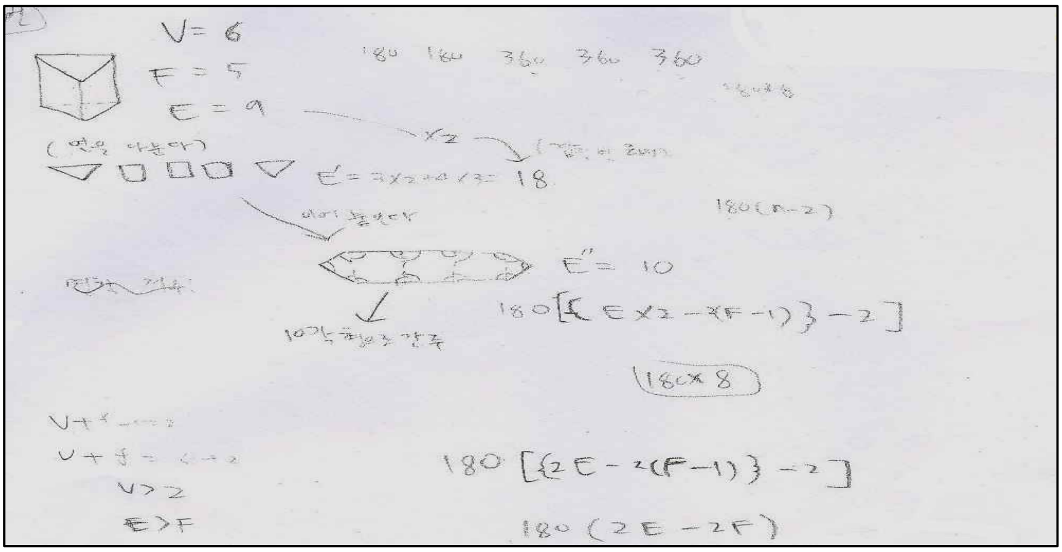
[그림 IV-2] 학생 S3의 수학적 발견과 증명 과정 (코드 G32)

2) 본 연구자는 [코드 G2]를 다면체의 대표적 예를 숙고하면서 다면체의 면각의 합을 발견했지만 증명에는 성공하지 못한 학생들의 수학적 발견과 증명 과정을 나타내는 범주로 설정하였으며, 이는 [코드 G2]가 [코드 C2]와 대응되도록 하기 위해서였다. 그러나 본 연구에서 [코드 G2]에 해당하는 학생은 나타나지 않았다.

학생 S3은 다면체의 일반적 예를 고려하면서 평균 개념을 활용하여 $\sum a$와 E, F, V 사이의 관련성을 곧바로 증명하였다. 학생 S3은 다면체에서 '한 모서리를 2개의 면이 같이 공유'하므로 다면체의 한 면을 이루는 변의 수의 평균이 $\frac{E\times 2}{F}$라는 것을 알아냈으며, 이것은 학생 S3의 수학적 발견과 증명 과정에서 핵심적인 역할을 한다. 학생 S3은 다면체의 한 면에서 한 내각의 크기의 평균은 $\frac{(\frac{2E}{F}-2)\times 180^\circ}{\frac{2E}{F}}$이며, 따라서 다면체의 면각의 합은 $\frac{2E}{F}\times F\times\frac{(\frac{2E}{F}-2)\times 180^\circ}{\frac{2E}{F}}=360^\circ(E-F)$이라고 증명하였다[3].

다음으로, [코드 G33]에 속하는 학생 S4의 수학적 발견과 증명 과정은 다음의 [그림 IV-3]과 같다. 학생 S4는 다면체의 대표적 예로서 삼각기둥 하나만을 고려하면서 $\sum a$와 E, F, V 사이의 관련성을 발견하는 동시에 증명을 시도하였다. 학생 S4는 삼각기둥의 각 면들을 분리하여 평면에 놓은 다음 다시 그 면들을 이어 붙여서 10각형으로 간주하고, 이 10각형의 내각의 총합이 $\sum a$임을 생각하였다. 그리고 일반적으로 다면체의 각 면을 분리하여 평면에서 이어 붙여 만든 다각형의 변의 수가 $E\times 2-2(F-1)$임을 구하고, 다면체의 면각의 합이 $180(E\times 2-2(F-1)-2)=180(2E-2F)$라고 증명하였다.

마지막으로, [코드 G34]에 속하는 학생 S5의 수학적 발견과 증명 과정은 다음의 [그림 IV-4]와 같다. 학생 S5는 다면체 하나를 생각하면서 다면체를 평면에 누를 때 면각의 합이 보존된다는 사실을 파악하였으며, 이와 같은 학생 S5의 방법은 위상기하학적 사고 방법이라고 할 수



[그림 IV-3] 학생 S4의 수학적 발견과 증명 과정 (코드 G33)

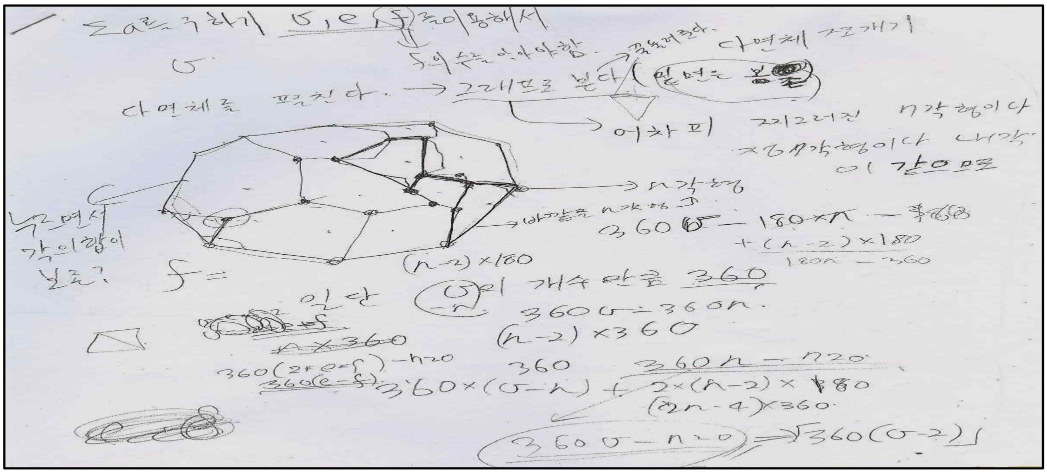
3) [그림 IV-2]를 보면 학생 S3이 한 각의 크기의 평균이 $\frac{(\frac{2E}{F}-2)\times 360}{\frac{2E}{F}}$이라고 잘못 적어 놓은 것을 알 수 있다. 학생 S3은 180을 360으로 쓰는 실수를 하였다. 면각의 합을 구하는 식에서는 정확하게 180으로 쓰고 면각의 합을 구하였다.

있다. 학생 S5는 다면체를 평면에 눌렀을 대 생기는 '바깥의' 다각형을 n각형이라고 하면, 다면체의 면각의 합은 $360\times(V-n)+2\times(n-2)\times 180=360(V-2)$라고 증명하였다. 학생 S5의 이와 같은 증명 방법은 3장에서 살펴본 Polya (1962)가 제시한 방법과 동일하다. 본 연구자가 학생 S5에게 이와 같은 증명 방법을 어떻게 생각하게 되었는가를 비형식적으로 질문했을 때, 학생 S5는 "저는 어렸을 때부터 입체도형을 보면 그냥 눌러보고 잡아당겨보고 싶은 그런 생각이 들었어요. 왜 그랬는지는 모르겠는데요, 그냥 그렇게 하고 싶은 생각이 들어요."라고 대답하였다. 학생 S5는 있어서 위상기하적 사고 방법은 하나의 사고 습관으로서 정착된 것으로 판단된다.

2. 연구문제 2: 영재 학생들의 수학적 발견과 증명의 수준

본 연구의 두 번째 연구문제는 수학 영재 학생들이 다면체의 면각의 합을 스스로 발견하고 증명하는 데서 어느 수준까지 도달할 수 있는가이다. 본 연구에서 영재 학생들의 수학적 발견과 증명 과정을 분석한 결과, 첫째, 다면체의 면각의 합을 발견하는 데까지 도달하지 못한 학생들은 36명 중에서 13명(36.1%)으로서 [코드 C1]과 [코드 G1]의 학생들이 여기에 해당된다 (<표 IV-1> 참고). 이 학생들은 수학적 발견에 성공하지 못하고 따라서 증명을 시도하지 않았다.

둘째, 다면체의 면각의 합을 발견하였지만 증명까지는 도달하지 못한 학생들은 7명 (19.4%)이며, [코드 C2]의 학생들이 여기에 해당된다. 이 학생들은 Balacheff(1988)의 증명 수준에서 '결정적 실험' 방식을 취하는 학생들이라고 할 수 있다. '결정적 실험' 방식을 취한 대표적학생인 S6의 수학적 발견과 증명 과정을 살펴보면 다음과 같다. 학생 S6은 먼저 5종류의 정다면체 각각에 대하여 F, V, E의 수를 쓰고 $\sum a$를 구하였다. 다음으로 n각기둥에 대하여 $\sum a=720(n-1)$임을 구하고 n각뿔에 대하여 $\sum a=360(n-1)$임을 구한 다음, n각기둥과 n각기둥 각각에 대해 구한 $\sum a$의 값을 종합하여 n각기둥과 n각뿔 모두에 대해 성립하는 식으로서 $\sum a=360(V-2)$를 구하였다. 또한 $\sum a=360(V-2)$가 5종류의 정다면체에 대해서도 성립함을 확인하였다. 마지막으로, 정다면체, n각기둥, n각뿔이 아닌 축구공에 대해서도 $\sum a=360$

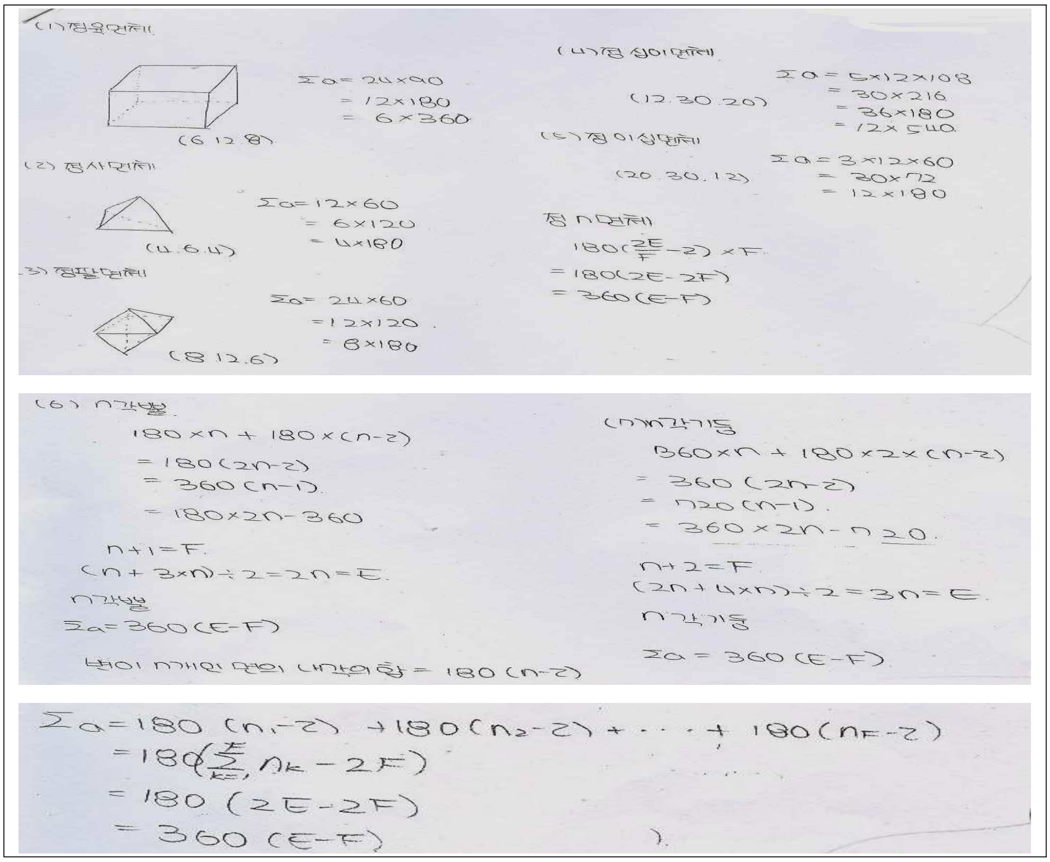


[그림 IV-4] 학생 S5의 수학적 발견과 증명 과정 (코드 G34)

$(V-2)$가 성립함을 확인하였다. 학생 S6의 이와 같은 정당화 방식은 Balacheff(1988)의 '결정적 실험' 방식에 해당되며, 학생 S6은 자신이 발견한 $\sum a=360(V-2)$가 모든 다면체에 대해서 성립함을 증명하는 데는 성공하지 못했다.

셋째, 다면체의 면각의 합을 발견하고 증명의 완성까지 도달한 학생은 16명(44.4%)이며, [코드 C3]과 [코드 G3]의 학생들이 여기에 해당된다. 이 학생들은 Balacheff(1988)의 증명 수준에서 '사고 실험' 방식에 해당하는 학생들이다. '사고 실험' 방식을 취한 대표적 학생인 S7의 수학적 발견과 증명 과정은 다음의 [그림 IV-5]와 같다. 학생 S7은 먼저 5종류의 정다면체 각각에 대하여 $\sum a$를 계산하고 정n면체에서 $\sum a=180(\frac{2E}{F}-2)\times F=180(2E-2F)=360(E-F)$를 발견한 다음, n각뿔과 n각기둥 각각에 대하여 $\sum a=360(E-F)$를 확인하였다. 그리고 일반적인 다면체에 대하여 $\sum a=360(E-F)$가 성립함을 증명하였는데, 학생 S7의 이와 같은 증명 방법은 3장에서 살펴본 Polya(1962)가 제시한 방법과 동일하다. 학생 S7의 이와 같은 정당화 방식은 Balacheff(1988)의 '사고 실험' 방식에 해당되며, 학생 S7은 자신이 발견한 $\sum a=360(E-F)$가 모든 다면체에 대해서 성립함을 증명하는 데에 성공하였다.

한편, 본 연구에 참여한 수학 영재 학생들의 수학적 발견과 증명 과정을 분석한 결과, 학생 자신이 발견한 다면체의 면각의 합과 꼭짓점의



[그림 IV-5] 학생 S7의 수학적 발견과 증명 수준: 사고 실험 방식

개수, 모서리의 개수, 면의 개수 사이의 관련성을 정당화하는 데에 있어서 Balacheff(1988)의 ‘소박한 경험주의(naive empiricism)’ 방식이나 ‘포괄적 예(generic example)’ 방식을 취한 학생은 존재하지 않았다.

위에서 언급하였듯이, 본 연구에서는 수학 영재 학생들에게 3시간 동안 다면체의 면각의 합을 스스로 발견하고 증명하도록 요구하였다. 본 연구에서 23명(63.9%)의 학생들은 적어도 다면체의 면각의 합을 스스로 발견하였지만, 13명(36.1%)의 학생들은 다면체의 여러 사례나 대표적 예를 조사하는 데서만 머무르고 더 이상 진행하지 못하였다.

다면체의 면각의 합을 발견한 학생들과 그렇지 못한 학생들 사이의 차이점은 무엇일까? 다면체의 면각의 합을 발견하지 못한 학생들에게 부족한 것은 무엇일까? 다면체의 면각의 합을 발견한 학생들과 그렇지 못한 학생들 사이의 차이점이, 본 연구에서 제시된 과제를 해결하는 데에 필수한 수학적 내용 지식의 차이인지, 아니면 수학적 사고 방법의 차이인지에 대해 숙고할 필요가 있다. 본 연구에서 제시한 과제를 해결하는 데에 필요한 수학적 지식은 n각형의 내각의 총합이 $(n-2)\times 180^\circ$ 라는 것과 다면체가 무엇인가에 대한 개념뿐이다. 본 연구에 참여한 수학 영재 학생들의 수학적 발견과 증명 과정 활동지를 분석한 결과, 36명의 학생들은 모두 이와 같은 수학적 지식을 모두 알고 있었다. 따라서 다면체의 면각의 합을 발견한 학생들과 그렇지 못한 학생들 사이의 차이점은 수학적 사고 방법에서 기인한다고 판단할 수 있다.

그러므로 다면체의 면각의 합을 발견하지 못한 13명(36.1%)의 영재 학생들에게는 수학적 사고 방법을 구체적이고 적극적인 방식으로 지도할 필요가 있다. 본 연구에서의 이와 같은 주장은 Polya(1962)의 주장과 일맥상통한다. Polya(1962)는 기초 수준에서든지 고등 수준에서든지, 참된 수학적 경험을 하고자 한다면, 단순히 수학적 내용 지식(정보적 지식)을 소유하는 것보다는 수학적 사고 방법(방법적 지식)을 갖추는 것이 훨씬 더 중요하다고 주장하였다. 또한 교사는 학생들의 방법적 지식, 즉 추론하는 능력을 개발해야 한다고 주장하였다.

선행 연구들에서 제시하고 있듯이, 수학 영재 학생들의 창의력과 문제해결력을 신장하기 위해서는 다양한 해결 방법이 존재하는 개방형 과제를 제시하고 영재 학생들이 자기주도적으로 개방형 과제를 탐구할 수 있도록 배려하는 것이 중요하다(송상헌, 1999; Laurence & Renzulli, 1981; Renzulli & Reis, 1991). 본 연구의 결과는 수학 영재 학생들에게 개방형 과제의 제시, 자기주도적 탐구 기회 제공과 함께 수학적 사고 방법을 구체적이고 적극적으로 지도해야 할 필요성을 제안한다고 할 수 있다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 36명의 중학교 2학년(14세) 수학 영재 학생들을 대상으로 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 발견과 증명 과정을 분석하였다. 본 연구의 결과로서, 첫째, 수학 영재 학생들의 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 발견과 증명 과정은 크게 [코드 C]와 [코드 G]로 범주화되었다. [코드 C]은 다시 [코드 C1], {코드 C2], [코드 C3]으로 범주화되었으며, [코드 C3]은 다시 [코드 C31], [코드 C32]로 범주화되었다. [코드 G]는 [코드 G1], [코드 G3]로 범주화되었으며, [코드 G3]는 다시 [코드 G31], [코드 G32], [코드 G33], [코드 G34]로 범주화되었다. [코드 C]에 속하는 학생들은 36명 중에서

29명(80.6%)으로서, 이 학생들은 다면체의 여러 사례를 조사함으로써 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 성질을 발견하려고 시도하였다. [코드 G]에 속하는 학생들은 7명(19.4%)으로서 이 학생들은 다면체의 대표적 예나 일반적 예를 숙고하면서 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 성질을 발견하려고 시도하였다.

한편, [코드 C]에 속하는 29명(80.6%)의 학생들은 수학적 발견을 위한 탐구 과정에서 귀납적 추론을 시도했다고 할 수 있으며, 이로부터 귀납적 추론의 시도는 수학 영재 학생들에게 있어서 자연스러운 사고 경향임을 알 수 있다. 이와 같은 수학 영재 학생들의 사고 특징은 '발생 과정의 수학'은 실험적이고 귀납적 과학이라는 Polya(1962)의 주장과 일맥상통한다고 할 수 있다. 또한, 증명의 교수・학습에서는 귀납적이고 직관적인 접근 방법으로부터 시작하여 형식적 증명으로 진행하는 것이 바람직하다고 주장한 Sriraman(2004)의 연구 결과를 뒷받침한다고 할 수 있다.

본 연구의 결과로서, 둘째, 다면체의 면각의 합을 발견하는 데까지 도달하지 못한 수학 영재 학생들은 36명 중에서 13명(36.1%)인 것으로 나타났다. 다면체의 면각의 합을 발견하였지만 증명까지는 도달하지 못한 학생들은 7명(19.4%)이었으며, 다면체의 면각의 합을 발견하고 증명의 완성까지 도달한 학생은 16명(44.4%)으로 나타났다. 다면체의 면각의 합을 발견하고 증명에 성공한 수학 영재 학생들과 그렇지 못한 수학 영재 학생들 사이의 차이점은, 학생들이 가지고 있는 수학적 내용 지식(정보적 지식)보다는 수학적 사고 방법(방법적 지식)의 차이에서 기인하는 것으로 판단된다.

한편, 3시간 동안 스스로 수학적 탐구를 하고서도 다면체의 면각의 합에 대한 수학적 성질을 발견하지 못한 13명(36.1%)의 영재 학생들에게는 교사의 보다 적극적인 지도와 도움이 필요하다고 할 수 있다. 본 연구는 수학 영재 학생들에게 개방형 과제를 제시하고 자기주도적으로 스스로 탐구할 수 있는 기회를 제공하는 것과 더불어 교사가 수학적 사고 방법을 구체적이고 적극적으로 지도해야 할 필요성을 제안한다.

참고문헌

교육인적자원부(2007). **2007년 개정 수학과 교육과정**. 교육인적자원부.

송상헌(1999). 수학 영재교육 프로그램 개발을 위한 조사 연구. **대한수학교육학회지 학교수학, 1**(1), 59-93.

송상헌・정영옥・장혜원(2006). 초등학교 6학년 수학영재들의 기하 과제 증명 능력에 관한 사례 분석. **대한수학교육학회지 수학교육학연구, 16**(4), 327-344.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children*. London: The Open University, 216-235.

Bell, A. (1976). A Study of Pupil's Proof-explanations in Mathematical Situations, *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40.

Galbraith, P. L. (1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 1-29.

Gagne, F. (1991). Toward a differentiated Model of Gifted and Talent. In Colangelo N. & Davis G. A. (Eds.), *Handbook of Gifted Education*. Boston: Allyn and Bacon, 65-80.

Laurence, H. R. & Renzulli, J. S. (1981). Teaching

Mathematics to the Talented and Gifted. In V. J. Glennon (Ed.), *The Mathematical Education of Exceptional Children and Youth*. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 191-266.

Lee, K. H. (2005). Mathematically Gifted Students' Geometrical Reasoning and Informal Proof, In Helen L. C. & Jill, L. V. (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*(Vol3. pp. 241-248).

NCTM (2007). Principles and Standards for School Mathematics. 류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙 역(2007), **학교수학을 위한 원리와 규준**. 서울: 경문사.

Polya, G. (1962). Mathematical Discovery. N.Y.: John Wiley & Sons, Inc. 우정호 · 정영옥 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 나귀수 · 임재훈 · 역 (2005), **수학적 발견**. 서울: 교우사.

Renzulli, J. S. & Reis, S. (1986). *The Schoolwide Enrichment Model: A Comprehensive Plan for Educational Excellence*. Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.

Renzulli, J. S. & Reis, S. (1991). The Schoolwide Enrichment Model: A Comprehensive Plan for the Development of Creative Productivity. In N. Colangelo (Ed.) *Handbook of Gifted Education*. MA: Allyn & Bacon.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher, 78*, 6, 448-456.

Sriraman, B. (2004). Gifted Ninth Grader's Notion of Proof: Investigating Parallels in Approaches of mathematically Gifted Students and Professional Mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted, 27*(4), 267-292.

Waring, S. (2000). *Can you prove it? Developing concepts of proof in primary and secondary schools*. London: The Mathematical Association.

Williams, E. (1990). An investigation of senior high school students' understanding of the nature of mathematical proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*, 3, 165-176.

Analysing the Processes of Discovery and Proof of the Mathematically Gifted Students

Na, Gwi Soo (Cheongju National University of Education)

This research intends to analyse how mathematically gifted 8th graders (age 14) discover and proof the properties on the sum of face angles of polyhedron. In this research, the problems on the sum of face angles of polyhedrons were given to 36 gifted students, and their discovery and proof processes were analysed on the basis of their the activity sheets and the researcher's observation. The discovery and proof processes the gifted students made were categorized, and levels revealed in their processes were analysed.

* Key Words : mathematically gifted student(수학 영재 학생), discovery and proof(발견과 증명), polyhedron(다면체), face angle(면각)

논문접수 : 2011. 4. 5
논문수정 : 2011. 5. 4
심사완료 : 2011. 5. 20