

상수 공정시간을 갖는 라인 생산 시스템에서 CONWIP과 간반의 성능 비교

이호창* · 서동원**†

Comparison of CONWIP with Kanban in a Production Line with Constant Processing Times

Hochang Lee* · Dong-Won Seo**

■ Abstract ■

We compared a CONWIP(constant work-in-process) system with a kanban system in a production line with constant processing times. Based on the observation that a WIP-controlled line production system such as CONWIP and kanban is equivalent to a m-node tandem queue with finite buffer, we applied a max-plus algebra based solution method for the tandem queue to evaluate the performance of two systems. Numerical examples with 6 workstations were used to demonstrate the proposed analysis. The numerical results support the previous studies that CONWIP outperforms kanban in terms of expected waiting time and WIP. Unlike the kanban case, sequencing workstations in a CONWIP does not affect the performance of the system.

Keyword : CONWIP, Kanban, Tandem Queue, Max-Plus Algebra

1. 서 론

재공품(work-in-process, WIP)은 생산 시스템 내

에 필수 불가결하게 존재하는 반제품 상태의 재고를 말한다. 이는 공정 중에 있을 수도 있고 다음 공정을 기다리는 대기 상태에 있을 수도 있다. 공정

논문접수일 : 2010년 12월 17일 논문게재확정일 : 2011년 05월 17일

논문수정일(1차 : 2011년 03월 21일, 2차 : 2011년 05월 16일)

* 주저자, 경희대학교 경영대학 경영학부, 경영연구원

** 경희대학교 경영대학 경영학부, 경영연구원

† 교신저자

간의 완전한 균형(perfect line balancing)을 가정할 수 없는 실제 생산 환경에서 WIP의 규모와 그 발생 위치는 동적으로 변화한다. 생산의 단속이 없는 유연한 흐름을 위해서는 어느 정도의 WIP가 필요하지만 그 규모가 증가하면서 재고 비용이 증가할 뿐만 아니라 공정 관리에 문제가 발생하기 시작한다. 모든 공정이 잘 균형된 이상적 생산 환경이 아닌 경우에는 밀어내기(push)식 MRP(material requirement planning)에 의한 대량 생산 시스템은 이러한 문제들에 노출되기 쉽다. 이러한 의미에서 간반(kanban), CONWIP(constant-work-in-process), DBR(drum-buffer-rope) 등과 같이 WIP의 규모를 조정함으로써 산출율(throughput)을 통제하는 생산 시스템은 불확실한 생산 환경에 능동적으로 대처할 수 있는 대안적 생산제어 방식이라고 볼 수 있다.

간반 시스템은 원재료의 생산 시스템 내 최초 유입이나 재공품의 공정 진행 여부에 관한 결정이 간반을 이용한 후속 공정으로부터의 신호 즉 간반에 의해 견인되므로 순수 견인(pure pull) 생산 시스템에 속한다. 간반 시스템이 모든 작업장(workstation)과 작업장 사이에 일정한 개수의 간반을 배치하고 이를 생산의 흐름에 따라 함께 인접한 두 작업장 간에만 폐쇄적으로 유통시키는데 반해 CONWIP 시스템은 한정된 개수의 카드를 특정 작업장에 관계 없이 생산 시스템 전체에 유통시킴으로써 전체 생산 공정 내의 총 재공품 양을 제한한다. 원재료는 카드를 부착하고 최초 생산 공정에 투입되어 재공품의 상태로 중간 공정들을 거쳐서 최종 공정을 통해 완제품으로 완성될 때 까지 당초에 부착한 카드를 그대로 유지한다. 최종공정 후 완제품이 생산 시스템을 떠나는 순간 그 카드는 완제품에서 분리되어 최초의 공정으로 이동되고 새로운 원재료에 재 부착됨으로써 새로운 생산의 시작을 허락(authorize)한다. 폐쇄 대기행렬 시스템(closed queuing system)의 운용방식과 동일하게 카드(간반)가 없으면 최초 공정에 원재료가 투입될 수 없다. 이와 같이 전체 생산 시스템 내에 유통되는 카드의 개수를 통제함으로써 재공품의 양과 그에 따른 산출율을 조절할 수 있다.

당초에 최종 공정으로부터 이송되어 온 카드에 의해 원재료가 견인되어 최초 생산 공정에 투입되지만 일단 공정에 투입된 후에는 선행공정이 끝나면 후행공정의 허락이 없어도 바로 다음 공정으로 재공품이 이송되기 때문에 최종 공정까지 밀어내기 식으로 작업이 진행된다. 이런 의미에서 CONWIP은 순수 견인 시스템으로 분류되는 간반 시스템과는 달리 밀어내기/견인(push/pull) 혼합시스템으로 분류된다.

CONWIP은 Spearman et al.[18]에 의해 최초 제안된 이후 MRP와 같은 밀어내기 시스템이나 간반과 같은 순수 견인 시스템에 비해 그 성능 및 적용성에 장점이 부각되면서 많은 연구자의 분석 대상이 되어왔다. 우선 주어진 생산을 제약조건 하에서 WIP를 최소화하도록 최적의 카드 수를 결정하는 문제에 관한 연구로는 Spearman et al.[18], Spearman and Zazanis[19], Gstettner and Kuhn[10] 등이 대표적이다. Spearman et al.[18]과 Spearman and Zazanis[19]의 연구 결과에 의하면 CONWIP 시스템이 종래의 밀어내기 시스템보다 산출율과 WIP 측면에서 우수하며, 간반 시스템과 비교했을 때도 다 품종과 긴 셀업타임을 갖는 복잡한 생산 시스템의 경우 그 적용성이 뛰어나고 WIP의 크기도 작다. Muckstadt and Tayur[13, 14], Bonvik et al.[8], Jodlbauer and Huber[12] 등의 연구도 Spearman의 주장과 일치하는 분석결과를 제시하였다.

그러나 이들의 연구결과와는 정반대로 Gstettner and Kuhn[10]는 시뮬레이션 분석을 통해 동일한 산출율을 가정했을 때 CONWIP보다 간반의 WIP 크기가 작다는 사실을 주장했다. 그들은 Spearman과 공동연구자들이 두 시스템에서 동일한 카드(간반)의 개수를 가정했을 때 CONWIP 시스템이 간반 시스템보다 WIP의 크기가 작다고 주장하였으나 실제로 카드의 개수와 WIP 크기는 일치하지 않으며(일반적으로 $WIP < \text{카드수}$) 또한 간반 시스템에서 작업장마다 배분된 카드개수의 분포에 따라 간반 시스템의 생산율은 크게 영향을 받는다는 사실을 지적하였다. 따라서 동일한 생산율을 갖는 두 시스템

의 최소 WIP 크기를 서로 비교하면 오히려 간반 시스템이 CONWIP 시스템보다 WIP 측면에서 더 우수하다는 정반대의 결론을 내렸다.

이와 같이 기존의 시스템 비교 연구에서 그 결과가 서로 상이한 가장 큰 이유는 분석 방법이 서로 다르기 때문이다. 동일한 방법이라도 시뮬레이션에 의한 분석에서는 비교 대상이 되는 시스템의 운영 모수(operating parameter) 조합이 매우 다양하여 모든 경우를 망라하여 비교하는 것이 사실상 불가능하다. 또한 수학적모형(mathematical model)에 의한 분석에서도 그 모형의 종류와 가정, 근사 해법의 여부 등에 따라 분석 결과가 달라질 수 있다. 따라서 공정한 시스템 비교를 위해서는 비교 대상이 되는 생산 시스템에 대해서 공정시간, 서비스 품질 조건(QoS), 원자재 투입율 등 동일한 시스템 운영 모수 하에 동일한 목적함수를 최적화한 시스템을 각각 도출해 낸 후 이들의 성능을 직접 비교해야 한다. Gstettner and Kuhn[10]이 주장한 정반대의 분석결과는 이러한 시스템 비교의 공정성에 관한 연구가 필요함을 제기했다고도 볼 수 있다.

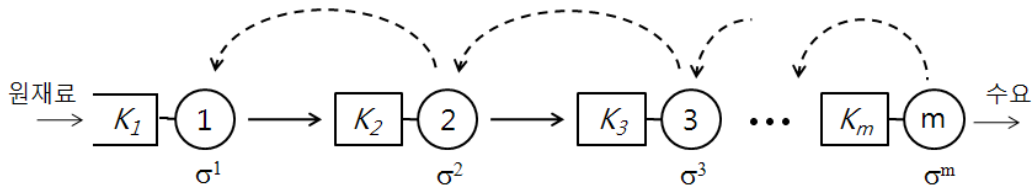
본 연구는 기계고장이 없다는 가정 하에 Duenyas et al.[9]와 같이 상수 공정시간을 갖는 라인 생산 시스템에서 CONWIP과 간반에 의한 생산제어 방식의 성능을 비교 분석한다. Gstettner and Kuhn[10]에서 제기된 비교 분석의 공정성을 위해 간반 라인 생산 시스템의 성능 분석에 관한 이호창, 서동원[1]의 연구와 동일한 방법론을 CONWIP 라인 생산 시스템에 적용하여 그 성능치를 측정하고 이를 기존 간반 시스템의 연구결과와 비교한다. 각 작업장은 상수(constant)의 공정시간을 가지며 간반의 경우는 각 작업장이 개별의 유한 버퍼를, CONWIP의 경우는 전체 작업장이 공유하는 공동의 유한버퍼를 갖는 일렬대기행렬 시스템(tandem queue)으로 볼 수 있다. 또한 선행 작업의 중지와 개시를 알리는 작업의 견인은 이 대기행렬 노드 간의 통신차단규칙(communication blocking policy)으로 표현이 가능하다. 통신차단규칙은 직접 후행(immediately following) 노드의 버퍼가 차 있을 때, 선행 노드에서 작업을

진행하지 않는 경우를 말한다. 따라서 본 연구의 분석대상인 간반 시스템과 CONWIP 시스템은 통신차단규칙 하에서 상수 공정시간을 갖는 유한버퍼 일렬대기행렬시스템(finite buffer tandem queues with constant service time under communication blocking policy)과 동일하다. 그러나 알려진 바와 같이 유한버퍼를 갖는 일렬대기행렬에서는 무한버퍼의 경우와는 달리 일반적으로 대기시간의 안정 상태(steady state) 분포가 간단히 노드별 곱셈의 형태(closed form)로 표현될 수 없기 때문에 노드 간 차단 현상이 발생하는 생산 시스템의 성능치를 평가한 기존 연구에서는 주로 분해(decomposition)에 의한 근사해법이나 시뮬레이션이 이용되어 왔다. 본 연구는 이러한 근사해법이 아닌 max-plus 대수를 이용한 분석 방법을 제시한다. 이 분석 방법은 유한버퍼 일렬 대기행렬을 그 특수 형태로 포함하는 max-plus 선형시스템(linear system)의 해법이므로 각 노드가 개별 유한버퍼를 갖는 간반 시스템 뿐만 아니라 여러 노드가 하나의 유한버퍼를 공유하는 CONWIP이나 DBR에도 동일하게 적용할 수 있는 장점이 있다.

제 2장에서는 비교 분석의 대상인 CONWIP 시스템과 간반 시스템을 정의한다. 제 3장에서는 이들 두 라인 생산 시스템의 분석을 위해 max-plus 선형시스템에 관한 기존 연구 결과를 제시하고 이를 이용하여 각각의 시스템에 대해 안정대기시간의 특성치를 도출한다. 제 4장에서는 예제를 통해 제 3장에서 도출한 max-plus 선형시스템, 즉 일렬 대기행렬모형을 이용한 분석방법의 타당성을 입증하고 그 계산 결과로 CONWIP과 간반 시스템의 성능을 비교한다.

2. 간반 라인 생산 시스템과 CONWIP 라인 생산 시스템

[그림 1]은 m 개의 작업대(노드)가 일렬로 배치된 간반 라인 생산 시스템을 나타낸다. 이는 개별 유한 버퍼를 갖는 일렬 대기행렬 시스템과 동일하다.



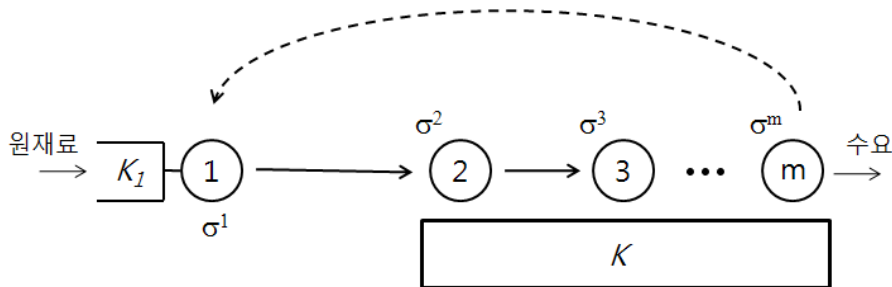
[그림 1] 간반 라인 생산 시스템

노드 i 에서의 공정시간은 σ^i 로 확정적이고 공정의 진행은 FIFO를 따르며 재공품 불량이나 기계고장 등 불확실 요소는 없다. 원재료는 노드 1의 무한버퍼($K_1 = \infty$)에 충분히 저장되어 있으며 노드 1의 공정시간이 $\sigma^1 = 0$ 이므로 실제로 노드 2부터 시작되는 라인 생산 시스템에서 원재료를 견인할 때는 언제나 원재료의 품질이 발생하지 않는 원재료의 무한공급을 가정한다. 노드 i 와 $i-1$ ($i=2, \dots, m$) 사이에는 $K_i (\geq 2)$ 개의 간반이 순환되며, 비어있는 간반 (free kanban)이 있을 때만 직전 선행 노드에서의 공정 진행을 허락하게 된다. 모든 간반이 재공품에 부착되어 빈 간반이 없을 때는 직전 선행 공정을 진행하지 못하도록 신호를 보낸다. 즉 유한버퍼 K_i 가 꽉 차있을 때는 유한버퍼에 의한 통신차단 (communication blocking)이 일어남으로써 선행 작업이 멈추게 된다. 수요에 관해서는 소비자로부터의 수요율이 무한하여 마지막 공정이 끝나는 대로 완제품이 공장 내에 저장되지 않고 외부로 팔려나가는 포화수요 (saturated demand)를 가정한다. 한편 불포화 수요 (non-saturated demand)에서는 완제품의 수요가 확률적으로 발생하기 때문에 완제품 수요가 마

지막 공정의 진행을 차단하게 된다. 이 경우 완제품 보관 창고에 해당하는 가상의 노드를 추가하더라도 각 공정시간 분포 (본 연구에서는 상수 가정)와 수요 분포가 서로 다르기 때문에 차단 일렬 대기행렬에 관한 기존의 연구 결과를 활용할 수 없다. 더구나 본 연구의 목적이 간반과 CONWIP의 성능을 단순 비교하는 것이므로 기존의 연구 (Gstettner and Kuhn[10], Spearman et al.[18], Spearman and Zazanis[19])에서와 같이 무한 수요율을 가정하는 것이 타당하다. 이호창, 서동원[1]은 일렬 대기행렬 모형을 이용하여 간반 라인 생산 시스템의 성능에 관한 평가 결과를 제시하였다.

[그림 2]는 m 개의 작업대(노드)가 일렬로 배치된 CONWIP 라인 생산 시스템을 나타낸다.

이 시스템은 하나의 유한버퍼를 공유하는 일렬 대기행렬 시스템과 동일하다. 노드 1의 공정과 버퍼는 [그림 2]의 간반 시스템과 동일하다. 실제 생산 공정인 노드 2와 노드 m 사이에 총 $K (\geq m)$ 개의 간반이 특정 노드와 무관하게 폐쇄적으로 순환되며, 노드 m 에서 최종 공정이 완료되면 완제품에서 분리된 간반이 최초 노드 1로 이송되어 원재료를 생



[그림 2] CONWIP 라인 생산 시스템

산 라인에 견인함으로써 새로운 생산을 시작하게 된다. 즉 공정 중에는 노드 간 차단과 견인이 일어나지 않고 선행 공정이 끝나면 다음 공정으로 재공품이 자동적으로 이송된다. 오직 최종 노드 m 이 최초 노드 1을 견인한다. 간반과 동일하게 포화수요를 가정한다.

3. 라인 생산 시스템의 안정 대기시간

유한버퍼를 갖는 일렬 대기행렬 시스템의 대기시간에 관한 안정 상태 분포는 일반적으로 딱 떨어지는 형태(closed form)의 식으로 표현되지 않는다. 기존의 연구가 근사해법이나 시뮬레이션에 의존하거나 서비스 시간의 분포, 버퍼의 크기 등 각종 운영 조건에 제약을 가한 간단한 모형에 한해서 응용되어 온 것은 이 때문이다. 최근 이러한 일렬 대기행렬 시스템이 max-plus 선형시스템의 특수 형태라는 사실이 알려지면서 max-plus 대수를 이용한 시스템의 성능분석 해법이 과거 근사해법의 대안으로 떠오르게 되었다. 따라서 제 2장에서와 같이 간반과 CONWIP이 유한버퍼를 갖는 일렬 대기행렬 시스템과 동일하다는 사실에 근거하여 max-plus 선형 시스템의 기존 연구결과를 간반 시스템과 CONWIP 시스템의 성능 분석에 응용할 수 있다. 본 장에서는 직접적으로 관련된 max-plus 선형시스템의 기존 연구결과를 요약하고 이를 간반과 CONWIP 두 가지 라인 생산 시스템에 적용한다.

3.1 Max-plus 선형 시스템의 안정 대기시간

개방형 max-plus 선형 시스템의 노드 i 에서 n 번째 서비스 시작시점 X_n^i 와 $n+1$ 번째 서비스 시작시점 X_{n+1}^i 간의 관계를 임의벡터(random vector) 수열 $\{X_n\}$ 과 max-plus 대수를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$X_{n+1}^i = A_n \otimes X_n \oplus B_{n+1} \otimes T_{n+1} \quad (1)$$

식 (1)에서 max-plus 대수 연산자인 \otimes (o-times)

와 \oplus (o-plus)는 각각 합(addition)과 최대치(maximization)를 의미한다. $\{A_n\}$ 과 $\{B_n\}$ 는 안정(stationary) 임의행렬이고, 이 행렬은 서비스시간 확률변수들의 선형 함수를 그 원소로 갖는다. 예를 들어 이 선형 시스템이 α 개의 노드로 구성되어 있다면, A 는 $\alpha \times \alpha$ 이고, B 는 $\alpha \times 1$ 인 행렬이다. $\{T_n\}$ 은 실수 값을 갖는 증가수열이며, 도착과정 분포에 따른 도착시간을 의미한다. T_0 가 도착과정의 최초 비음시점이고, T_n ($n < 0$)이 음의영역에서 n 번째 도착시점이면 각 도착시점들은 다음과 같이 정의된다.

$$\dots < T_{-n} < T_{-(n-1)} < \dots < T_{-2} < T_{-1} < 0 < T_0 \quad (2)$$

따라서 $\{X_n\}$ 는 시스템의 n 번째 도착고객이 노드 i 에서 서비스 시작시점까지의 절대시간을 나타낸다. 즉 시스템의 n 번째 고객이 최초 도착시점부터 노드 i 에서 서비스 시작시점까지 시스템에 머문 시간을 대기시간 $W_n^i = X_n^i - T_n$ 로 표현할 수 있다. 일반적으로 노드의 수가 2보다 큰 경우에 대기시간 임의벡터 $\{W_n\}$ 의 간결한 표현식을 구하는 것은 매우 어렵다.

Baccelli et al.[4]와 Heidergott[11]는 일정 조건하에서 포아송 도착과정을 갖는 max-plus 선형 시스템의 안정 대기시간이 다음과 같이 벡터의 계차방정식(recurrence equation)의 형태로 표현될 수 있음을 보였다.

$$W = D_0 \oplus \bigoplus_{k \geq 1} C(T_{-k}) \otimes D_k. \quad (3)$$

식 (3)에서 $D_0 = B_0$ 이고, 모든 $k \geq 1$ 에 대해 임의벡터 D_k 는 다음과 같이 정의된다.

$$D_k = \left(\bigotimes_{n=1}^k A_{-n} \right) \otimes B_{-k} \quad (4)$$

또한 식 (3)에서 $C(x)$ 는 행렬의 대각원소들이 $-x$ 인 대각행렬(diagonal matrix)이다. 임의벡터 D_k 의 i 번째 원소인 D_k^i 는 개방형 max-plus 선형 시스템

에 상응하는 task graph에서 처음 노드에서 i 번째 노드까지의 주공정시간(critical path time)을 말하여, 서비스 시간 확률변수의 선형함수로 표현된다. 임의행렬 A_n 의 각 원소는 비음(non-negative)이거나 $-\infty$ 이고, 모든 대각 원소는 모두 비음(non-negative)임을 가정한다.

더 나아가, Baccelli et al.[5-7]는 max-plus 선형 시스템에서 일시대기시간과 안정대기시간의 특성치가 다음과 같이 포아송 도착과정의 모수에 대한 테일러 시리즈 전개식으로 표현 가능함을 보였다. 그들의 결과에 의하면 모든 $x(x \geq 0)$ 에 대해 비음이고, 적분가능하고, 유한(bounded)인 함수 $G(x)$ 가 $m+1$ 차까지 미분가능하다면, 노드 i 에서의 시스템 안정대기시간의 특성치 $G(W^i)$ 는 다음과 같다.

$$E[G(W^i)] = \sum_{k=0}^m \lambda^k E[q_{k+1}(D_0^i, D_1^i, \dots, D_k^i)] + O(\lambda^{m+1}) \quad (5)$$

여기서 함수 $G(\cdot)$ 와 다항함수 $q_k(\cdot)$ 는 Baccelli et al.[5, 7]에 정의된 것과 같다.

일시대기시간과 달리 특정 서비스 시간분포를 갖는 경우 외에는 일반적으로 안정대기시간에 대한 간결한 표현식은 구할 수 없다. 따라서 Ayhan and Seo[2, 3], Baccelli et al.[5, 7]와 Seo[16, 17]는 안정대기시간의 특성치에 대한 분석을 위해 상수 서비스시간을 갖는 max-plus 선형 시스템이 다음과 같이 임의벡터 D_m 의 i 번째 원소가 ultimately periodic한 형태를 만족한다고 가정하였다.

$$D_m^i = \begin{cases} \eta_m^i & \text{for } m=0, \dots, \xi_i - 1 \\ \eta_{\xi_i}^i + (m - \xi_i)a_i & \text{for } m \geq \xi_i \end{cases} \quad (6)$$

상수 서비스시간을 갖는 모든 대기행렬 망이 식 (6)의 형태를 만족하지는 못하지만, 잘 알려진 대부분의 시스템이 이러한 가정을 만족한다. 식 (6)에서 $\eta_m^i (m=0, 1, \dots, \xi_i)$ 는 상수, $0 \leq \eta_0^i \leq \eta_1^i \leq \dots \leq \eta_{\xi_i}^i$ 이고, a_i 는 실수이고, ξ_i 는 비음인 정수이다. 또한 여기

서 η_m^i, a_i 와 ξ_i 는 관심 노드 i 에 따라 결정되는 값들이다. 식 (3)과 식 (4)는 임의의 재생도착과정을 갖는 max-plus 선형 시스템에서의 안정대기시간 분석에도 유효하지만 기존 연구결과를 활용하여 성능특성치의 정확한 값을 계산하기 위해 본 연구에서는 포아송 도착과정을 가정한다.

분석 절차를 요약하면 다음과 같다. 분석대상이 되는 max-plus 시스템이 일반 서비스시간을 갖는 경우는 식 (1)을 이용하여 식 (4)의 임의벡터 D_k 에 대한 표현식을 도출한 후, 식 (5)를 이용하여 다양한 시스템 성능 특성치를 구한다. 특히 상수 서비스시간이고 도출한 임의벡터 D_k 가 식 (6)과 같이 ultimately periodic한 조건을 만족하는 경우는 기존 연구결과인 고차평균, Laplace 변환, 꼬리확률(tail probability)과 같은 안정대기시간의 성능 특성치에 대한 간결한 표현식을 이용하여 정확한 값을 계산할 수 있다(Ayhan and Seo[2, 3] 참조).

3.2 간반 시스템의 안정 대기시간

앞서 시스템의 모든 노드가 비어있는 초기상태와 통신차단규칙을 따름을 가정하였다. 따라서 노드 $i (i=1, 2, \dots, m-1)$ 의 $n+1$ 번째 공정은 노드 $i-1$ 의 $n+1$ 번째 공정완료시간, 노드 i 의 n 번째 공정완료시간, 그리고 노드 $i+1$ 의 $n-K_{i+1}+1$ 번째 공정완료시간 후에 시작할 수 있다. 즉 노드 $i-1$ 의 $n+1$ 번째 공정완료시간은 통신차단규칙에 따라 노드 $i-1$ 의 $n+1$ 번째 공정시작시간 X_{n+1}^{i-1} 과 $n+1$ 번째 공정시간 σ_{n+1}^{i-1} 의 합으로, 노드 i 의 n 번째 공정완료시간은 단일서버 FIFO 서비스 규칙에 따라 노드 i 의 n 번째 공정시작시간 X_n^i 과 n 번째 공정시간 σ_n^i 의 합으로 표현된다. 또한 노드 $i+1$ 의 $n-K_{i+1}+1$ 번째 공정완료시간은 $n-K_{i+1}+1$ 번째 공정시작시간 $X_{n-K_{i+1}+1}^{i+1}$ 과 $n-K_{i+1}+1$ 번째 공정시간 $\sigma_{n-K_{i+1}+1}^{i+1}$ 의 합이 된다. 이것은 노드 $i+1$ 에 크기 K_{i+1} 인 유한버퍼가 존재하므로 $K_{i+1}-1$ 번째까지의 공정은 노드 i 에서의 공정시작시간에 영향을 미치지 않기 때문이

다. 반면에 마지막 노드인 노드 m 에서의 공정시작 시간은 노드 $m-1$ 과 노드 m 의 공정완료 시간에만 영향을 받는다. 앞선 설명에서 $K_{m+1} = \infty$ 로 두면 동일하게 해석될 수 있다.

따라서 max-plus 대수를 이용하면 노드 i 에서 $n+1$ 번째 공정시작시점 X_{n+1}^i 은 다음과 같이 표현된다. 즉 노드 $i(i=1, 2, \dots, m-1)$ 에 대해서

$$X_{n+1}^i = \sigma_{n+1}^{i-1} \otimes X_{n+1}^{i-1} \oplus \sigma_n^i \otimes X_n^i \oplus \sigma_{n-K_{i+1}}^{i+1} \otimes X_{n-K_{i+1}}^{i+1}$$

이고, 노드 m 에 대해서는

$$X_{n+1}^m = \sigma_{n+1}^{m-1} \otimes X_{n+1}^{m-1} \oplus \sigma_n^m \otimes X_n^m$$

가 된다. 여기서 σ_n^i 은 $n-1$ 번째 도착과 n 번째 도착 사이의 도착간격을 의미한다. 따라서 $\sigma_n^0 \otimes X_n^0$ 는 n 번째 도착시점인 T_n 가 된다. 또한 X_k^i 의 첨가 k 가 음수인 경우에는 $-\infty$ 의 값을 가정한다. 즉 $k < 0$ 이면, $X_k^i = -\infty$ 이다.

위의 표현식으로부터 식 (1)에 정의된 임의행렬 A 와 B 를 구할 수 있다. 임의행렬 A 와 B 에 상수 공정시간에 대한 가정($\sigma^i = \sigma_n^i \ \forall n$)을 대입한 후, 식 (4)의 임의벡터 D_n 의 정의를 이용하여 정리하면 다음과 같은 임의벡터 D_n 의 표현식을 도출할 수 있다.

즉 노드 $i(i=1, 2, \dots, m-1)$ 에 대해서,

$$D_n^i = \sum_{j=1}^{i-1} \sigma^j + \max \{n\sigma^1, \dots, n\sigma^i\} \quad (7)$$

for $0 \leq n < K_{i+1}$

$$D_n^i = \sum_{j=1}^{i-1} \sigma^j + \max \{n\sigma^1, \dots, n\sigma^i, \ell_i(i+1), \dots, \ell_i(\kappa_i)\}$$

for $\sum_{j=i+1}^{\kappa_i} K_j \leq n < \sum_{j=i+1}^{\kappa_i+1} K_j$ (8)

이고, 노드 m 에 대해서는

$$D_n^m = \sum_{j=1}^{m-1} \sigma^j + \max \{n\sigma^1, \dots, n\sigma^m\} \quad (9)$$

for all $n \geq 0$

가 된다. 여기서 $K_1 = K_{m+1} = \infty$, $\ell_i(p) = \sigma^i + 2 \sum_{j=i+1}^{p-1} \sigma^j + \left[n - \left(\sum_{j=i+1}^p K_j \right) + 1 \right] \sigma^p$ 이 고, $\kappa_i = \min \{q \in (i+1, \dots, m) : \sum_{j=i+1}^q K_j \leq n < \sum_{j=i+1}^{q+1} K_j\}$ 이다.

식 (7)~식 (9)에서 보는 바와 같이, 간반 시스템에서 임의벡터 D_n 의 i 번째 원소인 D_n^i 는 상수 공정시간 $\sigma^i(i=1, \dots, m)$ 과 유한버퍼의 크기 $K_j(j=i+1, \dots, m)$ 의 함수로 표현됨을 알 수 있다. 특히 D_n^i 는 노드 i 의 하위 노드의 유한버퍼 크기에만 영향을 받으며 마지막 노드의 D_n^m 은 유한버퍼의 크기와 무관함을 확인할 수 있다.

3.3 CONWIP 시스템의 안정 대기시간

CONWIP 시스템이 간반 시스템과의 차이점은 처음 노드인 노드 1에서 노드 2로의 이동시에만 유한 크기(K)의 버퍼에 따른 차단현상이 발생하며, 일단 노드 2로 진입한 재공품은 노드 2부터 노드 m 까지의 모든 공정을 완료할 때까지 단일서버 FIFO 서비스 규칙을 갖는 무한버퍼 시스템과 같이 노드 사이를 이동하게 된다. 이것은 통신차단규칙에 따라 각 공정의 시작이 다음 노드에 여유버퍼가 있는 경우에만 허용되기 때문이다. 따라서 노드 $i(i=2, 3, \dots, m)$ 에서의 $n+1$ 번째 공정시작시간은 노드 $i-1$ 의 $n+1$ 번째 공정완료시간과 노드 i 의 n 번째 공정완료 시간에만 영향을 받는다. 하지만, 노드 1의 $n+1$ 번째 공정시작시간은 $n+1$ 번째 도착시간과 노드 2의 n 번째 공정완료시간, 그리고 노드 m 의 $n-K+1$ 번째 공정완료시간에 영향을 받는다. 따라서 max-plus 대수를 이용하면 각 노드의 서비스 시작시점 X_{n+1}^i 은 다음과 같이 표현된다.

즉 노드 1에 대해서는

$$X_{n+1}^1 = \sigma_{n+1}^0 \otimes X_{n+1}^0 \oplus \sigma_n^1 \otimes X_n^1 \oplus \sigma_{n-K+1}^m \otimes X_{n-K+1}^m$$

이고, 노드 $i(i=2, \dots, m)$ 에 대해서는

$$X_{n+1}^i = \sigma_{n+1}^{i-1} \otimes X_{n+1}^{i-1} \oplus \sigma_n^i \otimes X_n^i$$

가 된다. 간반 시스템과 마찬가지로 σ_n^0 은 $n-1$ 번째 도착과 n 번째 도착사이의 도착간격을 말하며, $k < 0$ 일때 $X_k^i = -\infty$ 로 가정한다.

간반 시스템과 마찬가지로 위의 표현식으로부터 CONWIP 시스템에 대한 임의행렬 A 와 B 를 구한 후, 상수 공정시간 가정을 이용하여 정리하면 다음과 같은 임의벡터 D_n 의 표현식을 도출할 수 있다.

즉 노드 i ($i=1, \dots, m-1$)에 대해서는

$$D_n^i = \sum_{j=1}^{i-1} \sigma^j + \max \{n\sigma^1, \dots, n\sigma^i\} \text{ for } 0 \leq n < K \quad (10)$$

$$D_n^i = \sum_{j=1}^{i-1} \sigma^j + \max \left\{ n\sigma^1, \dots, n\sigma^i, \sum_{j=1}^m \sigma^j + (n-K)\max \{\sigma^1, \dots, \sigma^m\} \right\} \text{ for } K \leq n < \infty \quad (11)$$

이고, 노드 m 에 대해서는

$$D_n^m = \sum_{j=1}^{m-1} \sigma^j + \max \{n\sigma^1, \dots, n\sigma^m\} \text{ for all } n \geq 0 \quad (12)$$

가 된다. 간반 시스템과 마찬가지로 CONWIP 시스템에서 노드 i 에 대한 D_n^i 는 상수 공정시간 σ^i ($i=1, \dots, m$)과 유한버퍼 크기 K 의 함수이며 마지막 노드의 D_n^m 은 유한버퍼의 크기와 무관함을 알 수 있다. 또한 $n \geq K$ 인 경우 모든 노드의 D_n^i ($i=1, 2, \dots, m$)가 시스템 내 최대 공정시간(bottleneck process)의 함수임을 알 수 있다. 이는 크기 K 인 유한버퍼를 처음 노드를 제외한 나머지 모든 노드에서 공동으로 사용하기 때문에 노드 2로의 진입을 차단하는 차단현상은 시스템 공정시간의 최댓값에 영향을 받게 됨을 의미한다.

4. CONWIP 시스템과 간반 시스템의 성능 비교 분석

4.1 최적 버퍼 크기 비교

주어진 서비스 품질을 만족하는 간반의 최소 개

수를 결정하는 문제는 다음과 같은 최적화 문제로 모형화 된다. 간반 시스템의 경우에는 각 노드의 간반 합($\sum_{j=2}^m K_j$)을 최소화하며, CONWIP 시스템의 경우에는 공유 간반의 수(K)를 최소화한다.

<최적화 문제-간반>

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=2}^m K_j \\ \text{s.t.} \quad & \Pr(W^i > \tau_i) \leq \beta_i, \quad i = 1, \dots, m-1 \\ & K_j \geq 2, \quad j = 2, \dots, m \end{aligned}$$

<최적화 문제-CONWIP>

$$\begin{aligned} \min \quad & K \\ \text{s.t.} \quad & \Pr(W^i > \tau_i) \leq \beta_i, \quad i = 1, \dots, m-1 \\ & K \geq m \end{aligned}$$

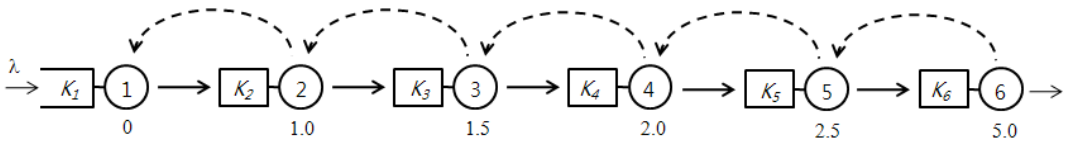
여기서 W^i 는 첫 공정에 도착하여 공정 i 에서 공정이 시작될 때까지의 대기시간이고 τ_i 와 β_i 는 각각 사전에 주어진 대기시간의 한계치와 그 꼬리확률에 따라 서비스 품질을 규정짓는 값이다. 간반 시스템의 최적화 문제는 각 노드의 대기시간이 그 하위 노드의 간반 개수에만 관련되므로 노드별로 분리하여 노드의 역순으로 그 해를 쉽게 구할 수 있다(이호창, 서동원[1] 참조). 하지만 CONWIP 시스템의 경우에는 이러한 특성을 가지지 못한다(식 (7)~식 (12) 참조). 따라서 K 를 m 부터 1개씩 증가시키면서 모든 제약식이 만족되는가를 점검하는 방식으로 K^* 를 정한다. 아래와 같이 동일한 공정시간과 서비스 품질 조건을 갖는 6-노드(작업대) 간반 시스템과 CONWIP 시스템을 도식화 하면 각각 [그림 3]과 [그림 4]와 같다.

$$\begin{aligned} \text{가정 1) } \quad & \sigma^1 = 0, \sigma^2 = 1.0, \sigma^3 = 1.5, \sigma^4 = 2.0, \\ & \sigma^5 = 2.5, \sigma^6 = 5.0 \end{aligned}$$

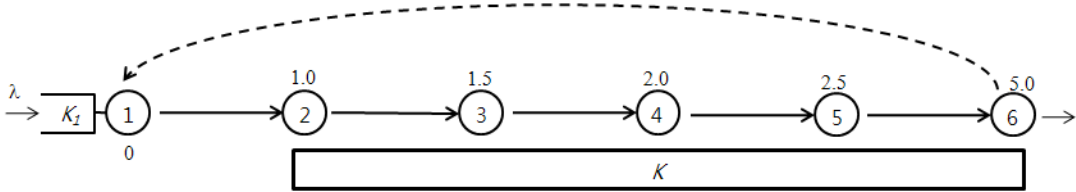
$$\text{가정 2) } \quad \tau_1 = 15, \tau_2 = 20, \tau_3 = 25, \tau_4 = 30, \tau_5 = 35$$

$$\text{가정 3) } \quad \lambda = 0.19, \quad \text{즉 } \rho = 0.95$$

[그림 3]과 [그림 4]의 예제에 대해서 공정 서비스



[그림 3] 6-노드 간반 시스템 예



[그림 4] 6-노드 CONWIP 시스템 예

품질 요건인 β_i 를 감소, 즉 서비스 품질요건을 강화시키면서 <최적화 문제-간반>과 <최적화 문제-CONWIP>의 해를 구하여 그 결과를 정리하면 <표 1>과 같다.

예상할 수 있는 바와 같이 두 경우 모두에 대해서 각 노드에서의 대기 시간으로 표현된 서비스 품

질 요건을 강화 할수록(β_i 값 감소) 필요한 버퍼의 크기가 증가함을 알 수 있다. 그러나 그 크기의 증가는 급격히 증가하지 않는다. 한편 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0.10$ 인 경우에 대해 원자재 투입율 λ 혹은 트래픽율 $\rho(= \lambda \max\{\sigma^1, \dots, \sigma^m\})$ 의 증가에 따른 최적 간반 수의 변화는 <표 2>와 같다.

<표 1> β_i 의 변화에 따른 최적 버퍼 크기

β_i	$\sum_{j=2}^6 K_j^*$: 간반 시스템	K^* : CONWIP 시스템
$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0.15$	22	18
$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0.14$	23	19
$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0.13$	24	20
$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0.12$	24	20
$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0.11$	25	21
$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0.10$	26	22

<표 2> λ 의 증가에 따른 최적 간반 수의 변화

$\rho(\lambda)$	$\sum_{j=2}^6 K_j^*$: 간반 시스템	K^* : CONWIP 시스템
$\rho = 0.75(\lambda = 0.15)$	10	6
$\rho = 0.80(\lambda = 0.16)$	10	6
$\rho = 0.85(\lambda = 0.17)$	11	7
$\rho = 0.90(\lambda = 0.18)$	15	11
$\rho = 0.95(\lambda = 0.19)$	26	22

<표 1>의 경우와는 달리 원자재 투입율의 증가에 따라 최적 간반의 수, 즉 $\sum_{j=2}^6 K_j^*$ 와 K^* 이 급격히 증가하는 현상을 보인다. 이는 각 작업장의 서비스 품질보다는 일렬 생산 시스템의 트래픽 증가가 각 작업장의 대기 시간에 더욱 큰 영향을 미치는 것으로 해석 할 수 있다. <표 1>과 <표 2>에서 보는 바와 같이 동일한 공정시간과 투입률 하에서 동일한 품질 요건을 만족하기 위해 CONWIP 시스템이 간반 시스템보다 적은 수의 간반이 요구됨을 알 수 있다. 이는 Spearman et al.[18], Spearman and Zazanis[19], Muckstadt and Tayur[13, 14], Bonvik et al.[8], Jodlbauer and Huber[12] 등 대다수의 기존 연구 결과와 일치한다.

4.2 CONWIP 분석 모형의 타당성 검증

유한버퍼를 갖는 일렬 대기행렬을 이용한 CONWIP 분석모형의 타당성을 검증하기 위해 시뮬레이션 결과와 비교한다(간반 시스템 분석모형의 타당성 검증은 이호창, 서동원[1] 참조). 비교 모형은 앞서 <최적화 문제-CONWIP>의 예제와 동일한 모형으로 최적 버퍼크기 $K=22$ 를 가정하였다(<표 1>에서 $\beta_i = 0.10, i = 1, \dots, 5$ 경우). <표 3>은 분석 모형의 결과와 Arena 12에 의한 시뮬레이션 결과를 비교한 것이다.

여기서 $E(W^i)$ 는 첫 공정에 도착하여 작업장 또는 노드 i 에서 공정이 시작될 때까지의 대기시간에 대한 기대치를 말하는데 제안된 분석방법과 시뮬레

이션 결과가 서로 오차 범위 내에 있음을 알 수 있다. 이는 분석모형의 정확성을 간접적으로 증명한다고 볼 수 있다. 노드 1에 도착부터 생산 시스템을 떠날 때까지의 총 체류시간(response time 또는 sojourn time) $E(R)$ 은 $E(W^6)+\sigma^6$ 가 되는데 주어진 예제에서 $59.5(=54.5+5.0)$ 가 된다.

4.3 평균 대기시간 및 WIP 비교

잘 알려진 바와 같이, 애로공정(bottleneck) 이후의 노드에서는 대기시간 없이 도착 즉시 공정을 시작할 수 있으므로 차단현상이 발생되지 않는다. 반면에, 공정시간이 단조 감소, 증가-감소, 감소-증가인 경우, 전체 공정 중 공정시간이 감소되는 부분에서는 대기시간이 발생하지 않지만 궁극적으로 후행 애로공정에 의한 차단현상 때문에 대기시간이 부분적으로 발생할 수 있다. 따라서 시스템 내의 모든 노드에서의 대기시간과 차단현상을 포함하고 간반 시스템과 CONWIP 시스템의 성능치의 차이를 가장 잘 설명하는 공정시간의 단조 증가 경우를 대상으로 비교하였다. 동일한 품질수준을 만족하는 모형(<표 1>의 마지막 경우($\beta_i = 0.10, i = 1, \dots, 5$))을 대상으로 간반 시스템과 CONWIP 시스템에서 각 노드의 평균 대기시간을 비교하면 <표 4>와 같다.

<표 4>에서 가상의 노드 1을 제외한 실제 노드의 평균 대기시간 $E(W^{2-i}) = E(W^2) - E(W^1), i = 2, \dots, 6$ 을 비교해 보면 CONWIP 시스템의 경우가 항상 작음을 알 수 있다. 여기서 $E(W^{2-i})$ 는 노드 2의 도착 시점부터 노드 i 에서 공정이 시작하기까지의 평

<표 3> CONWIP 분석모형과 시뮬레이션의 평균 대기시간 비교

평균 대기시간 : $E(W^i)$	분석모형	시뮬레이션
$E(W^1)$	6.47031	6.4704 \pm 0.38479
$E(W^2)$	6.57023	6.5701 \pm 0.38442
$E(W^3)$	7.72452	7.7242 \pm 0.38385
$E(W^4)$	9.49026	9.4895 \pm 0.38288
$E(W^5)$	11.9267	11.925 \pm 0.38131
$E(W^6)$	54.5	54.542 \pm 0.61971

〈표 4〉 간반 시스템과 CONWIP 시스템의 평균 대기시간 비교

노드 i	간반 시스템		CONWIP 시스템	
	$E(W^i)$	$E(W^{2-i})$	$E(W^i)$	$E(W^{2-i})$
1	4.98547		6.47031	
2	6.15999	1.17452	6.57023	0.09992
3	8.39066	3.40519	7.72452	1.25421
4	11.1609	6.17543	9.49026	3.01995
5	14.2607	9.27523	11.9267	5.45639
6	54.5	49.51453	54.5	48.02969

균 대기시간으로 실제 생산 시스템 내에서의 평균 대기시간을 말한다. <표 1>과 <표 4>의 결과를 종합해 보면 동일한 서비스 품질 요건 하에서 요구되는 유한버퍼의 크기와 각 노드에서의 평균 대기시간 관점에서 CONWIP 시스템이 간반 시스템보다 더 우수함을 확인할 수 있다.

한편 상수 서비스를 갖는 일렬 생산 시스템에서 시스템의 최종 노드에서의 이탈시간(departure time)은 유한버퍼의 크기와 무관하고 중간에 이탈이 허용되지 않으므로 마지막 노드까지의 평균 재공품 수는 Little의 법칙을 이용하여 구할 수 있다. 즉 $WIP = \lambda E(R)$ 로부터 $WIP = 0.19 \times 59.5 = 11.305$ 가 된다. 또한 시스템 전체 WIP은 유한버퍼의 크기(서비스 품질)과 무관하게 항상 같은 값을 가지게 되는데, 이것은 유한버퍼의 크기가 증가(감소)함에 따라 시스템 내의 평균 재공품 수(노드 2부터 노드 6까지의 평균 재공품 수로 정의됨)는 증가(감소)하지만 처음 노드의 평균 재공품 수가 감소(증가)하여 시스템 전체의 평균 재공품 수는 항상 동일한 크기를 유지하기 때문이다. 하지만, 본 연구모형의 시스템 내의 평균 재공품 수는 기대하는 바와 같이 유한버퍼의 크기(서비스 품질)에 따라 변화하게 된다. 시스템 내의 평균 재공품 수(WIP^{2-6})는 Little의 법칙을 이용하여 $WIP^{2-6} = \lambda [E(W^{2-6}) + \sigma^6] = \lambda [E(W^6) - E(W^1) + \sigma^6]$ 와 같이 계산된다.

서비스 품질 수준을 결정하는 두 모수 τ_i 와 β_i 는 상호 보완적인 값들로 이들 모수의 다양한 조합으로 서비스 품질 수준이 정의된다. 본 연구에서는 τ_i

를 고정시키고 β_i 를 변화시켜 서비스 품질 수준을 결정하고 그에 따른 성능치를 비교하였다. 다음 <표 5>는 앞선 예제와 동일한 모형에서 β_i 의 변화에 따른 간반과 CONWIP 시스템의 최소 필요 간반 수와 Little의 법칙에 의한 WIP^{2-6} 의 계산결과를 보여주고 있다. 동일한 공정순서를 갖는 경우 서비스 품질 수준을 만족하기 위해 필요한 최소 필요 간반 수와 WIP의 관점에서 CONWIP 시스템이 더 우수함을 계산결과를 통해 확인할 수 있다.

또한 <표 5>에서 알 수 있듯이 시스템 내의 평균 재공품 수는 필요 버퍼의 크기(K^*)와 차이가 난다. 두 값의 차이는 간반 시스템 경우보다는 작지만(간반 시스템의 경우는 이호창, 서동원[1] 참조), 서비스 품질 제약 모수 β_i 의 값이 작을수록 그 차이가 커진다. 이러한 차이는 앞선 <최적화 문제-CONWIP>에서 QoS로 각 노드에서의 평균 대기시간이 아닌 대기시간의 꼬리확률을 제약식으로 고려하여 최적 버퍼크기 결정하였기 때문이다. 예를 들면, 서비스 품질 제약 모수 β_i 에 따라 대기시간의 이상치(outlier)를 허용하는 확률이 결정되기 때문에 요구되는 버퍼의 크기가 민감하게 변하게 된다. 즉 대기시간의 이상치에 대한 허용도가 높아지면 최적 버퍼의 크기가 작아지고 WIP^{2-6} 과의 차이는 줄어들며, 반대로 이상치의 허용도가 낮아지면 최적 버퍼의 크기가 커지고 WIP^{2-6} 과의 차이는 커진다. 물론 τ_i 의 변화에 대해서도 동일한 현상이 나타날 것이며, 동일 시스템에 대해서도 β_i 와 τ_i 의 값에 따라 최적 버퍼의 크기는 상당한 차이를 보일 것이다.

〈표 5〉 β_i 의 변화에 따른 간반과 CONWIP 시스템의 최소 필요 간반 수와 WIP의 크기 비교

$\beta_i (i=1, \dots, 5)$	간반 시스템		CONWIP 시스템	
	$\sum_{j=2}^6 K_j^*$	WIP	K^*	WIP
$\beta_i = 0.50$	10	6.499444	6	5.045735
$\beta_i = 0.40$	13	7.762336	9	6.691857
$\beta_i = 0.30$	15	8.413732	11	7.541081
$\beta_i = 0.20$	19	9.378818	15	8.799318
$\beta_i = 0.10$	26	10.357761	22	10.075641

4.4 공정 순서에 따른 CONWIP 시스템의 성능 변화

간반 시스템과 마찬가지로 CONWIP 시스템에서도 공정의 순서에 따라 작업대기 시간이나 WIP 등 생산 시스템의 성능에 변화가 발생할 수 있다. 이는 공정 순서 변경이 가능한 작업환경 하에서 생산 시스템의 최적화를 위해 공정 순서를 결정하는데 중요한 정보를 제공해 준다. 다음과 같이 작업순서가 서로 다른 4가지 CONWIP 시스템을 분석함으로써 작업순서에 따른 성능 변화를 분석할 수 있다. 모든 생산 시스템에서 $K=22$ 이고 $\rho=0.95$ ($\lambda=0.19$, 즉 $TH=5.26$)를 가정한다.

모형 1 : 공정시간이 단조 증가

$$(\sigma^2 = 1.0, \sigma^3 = 1.5, \sigma^4 = 2.0, \sigma^5 = 2.5, \sigma^6 = 5.0)$$

모형 2 : 공정시간이 단조 감소

$$(\sigma^2 = 5.0, \sigma^3 = 2.5, \sigma^4 = 2.0, \sigma^5 = 1.5, \sigma^6 = 1.0)$$

모형 3 : 공정시간이 증가-감소

$$(\sigma^2 = 1.0, \sigma^3 = 2.0, \sigma^4 = 5.0, \sigma^5 = 2.5, \sigma^6 = 1.5)$$

모형 4 : 공정시간이 감소-증가

$$(\sigma^2 = 2.0, \sigma^3 = 1.5, \sigma^4 = 1.0, \sigma^5 = 2.5, \sigma^6 = 5.0)$$

〈표 6〉은 모형 1~모형 4의 시스템 성능치에 관한 분석결과를 요약한 것이다. 여기서 $E(W_i^*)$ 는 노드 1에 도착하여 노드 i 에서 공정이 시작하기까지 평균 대기시간이고 $E(W^{2-i})$ 는 노드 2의 도착 시점부터 노드 i 에서 공정이 시작하기까지의 평균 대기시

간 즉 실제 생산 시스템 내에서의 평균 대기시간을 말한다. 또한 $E(R^{2-i})$ 는 노드 2의 도착 시점부터 노드 i 에서 공정이 끝날 때까지의 평균 체류시간 즉 실제 생산 시스템 내에 머무는 평균 시간이다. $E(W_i^*)$ 는 노드 i 에서의 평균 대기시간이고 WIP^{2-i} 는 노드 2에서부터 노드 i 사이에 있는 WIP, 즉 노드 1을 제외한 실제 생산 공정 내에 있는 재공품의 양을 말한다.

〈표 6〉에서 보는 바와 같이 4가지 모형에 대하여 생산 시스템 내 총 체류시간 $E(R^{2-6})=E(W^{2-6})+\sigma^6=53.02969$, 재공품 개수 $WIP^{2-6}=10.075641$ 로 모두 동일함을 알 수 있다. 즉,

$$E(R_{\text{모형2}}^{2-6}) = E(R_{\text{모형3}}^{2-6}) = E(R_{\text{모형4}}^{2-6}) = E(R_{\text{모형1}}^{2-6}) = 53.02969$$

또는

$$WIP_{\text{모형2}}^{2-6} = WIP_{\text{모형3}}^{2-6} = WIP_{\text{모형4}}^{2-6} = WIP_{\text{모형1}}^{2-6} = 10.075641$$

이다. 결론적으로 상수 공정시간을 갖는 CONWIP 라인 생산 시스템에서 시스템 내 평균 체류시간과 WIP은 시스템 내 공정의 순서와 무관하며 동일한 생산율(TH , throughput)을 나타낸다. 이는 간반 시스템의 경우, $WIP_{\text{모형2}}^{2-6} < WIP_{\text{모형3}}^{2-6} < WIP_{\text{모형4}}^{2-6} < WIP_{\text{모형1}}^{2-6}$ 의 결과와는 다른 흥미있는 사실이다(이호창, 서동원 [1] 참조). 위 예제에서 보는 바와 같이 CONWIP 시스템 내 평균 체류시간과 WIP가 공정 순서와 무관하다는 사실은 아래 Remark에서 수학적으로도 입

〈표 6〉 모형 1~모형 4의 성능치 분석 결과

	노드 i	$E(W^i)$	$E(W^{2-i})$	$E(W_q^i)$	WIP^{2-i}
모형 1	1	6.47031		6.47031	
	2	6.57023	0.09992	0.09992	
	3	7.72452	1.25421	0.15429	
	4	9.49026	3.01995	0.26574	
	5	11.9267	5.45639	0.43644	
	6	54.5	48.02969	40.0733	10.075641
모형 2	1	6.47031		6.47031	
	2	47.5	41.02969	41.02969	
	3	52.5	46.02969	0	
	4	55	48.52969	0	
	5	57	50.52969	0	
	6	58.5	52.02969	0	10.075641
모형 3	1	6.47031		6.47031	
	2	6.57023	0.09992	0.09992	
	3	7.99026	1.51995	0.42003	
	4	50.5	44.02969	40.50974	
	5	55.5	49.02969	0	
	6	58	51.52969	0	10.075641
모형 4	1	6.47031		6.47031	
	2	6.99026	0.51995	0.51995	
	3	8.99026	2.51995	0	
	4	10.4903	4.01999	0	
	5	11.9267	5.45639	0.43644	
	6	54.5	48.02969	40.0733	10.075641

증된다.

Remark : 노드 2부터 노드 m 까지의 대기시간에 대한 분석을 위해 처음 노드를 제외한 노드 2로부터 노드 m 까지의 임의행렬 D_n^{2-m} 을 다음과 같이 정의할 수 있다. 이는 식 (10) ~ 식 (12)로부터 구한 임의행렬 D_n 의 두 원소간의 차를 이용하여 대기시간의 차인 W^{2-m} 를 동일하게 정의할 수 있기 때문이다.

즉 $\sigma^1 = 0$ (가상의 노드 1의 공정시간을 0으로 가정)이므로, $0 \leq n < K$ 일때

$$D_n^{2-m} = D_n^m - D_n^1$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1} \sigma^j + \max \{n\sigma^1, \dots, n\sigma^m\} - n\sigma^1$$

$$= \sum_{j=2}^{m-1} \sigma^j + \max \{n\sigma^2, \dots, n\sigma^m\}$$

이고, $K \leq n < \infty$ 일때

$$D_n^{2-m} = D_n^m - D_n^1$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1} \sigma^j + \max \{n\sigma^1, \dots, n\sigma^m\}$$

$$- \max \left\{ n\sigma^1, \sum_{j=1}^m \sigma^j + (n-K) \max \{ \sigma^1, \dots, \sigma^m \} \right\}$$

$$= \sum_{j=2}^{m-1} \sigma^j + \max \{n\sigma^2, \dots, n\sigma^m\}$$

$$- \max \left\{ 0, \sum_{j=2}^m \sigma^j + (n-K) \max \{ \sigma^2, \dots, \sigma^m \} \right\}$$

가 된다. 따라서 D_n^{2-m} 은 노드의 배열순서(공정의 순서)와는 무관함을 알 수 있다.

한편 이 결과는 본 논문의 CONWIP 시스템과 동일한 일렬대기행렬 모형을 분석한 Rhee and Perros [15]의 Theorem 1과 동일하다. 또한 Theorem 2를 이용하면 동치인 M/D/1 모형을 통해 평균 대기시간을 구할 수 있는데 이는 <표 4>에서 노드별 평균 대기시간의 합 즉 CONWIP의 평균대기 시간과 일치한다. 그들의 연구결과와의 차이점은 Theorem 2를 각 노드별 대기시간 분석에는 이용할 수 없는 반면에, 본 연구에서는 각 노드별 대기시간을 고려할 수 있다는 것이다.

5. 결론 및 요약

간반 시스템과 CONWIP 시스템은 WIP 통해 산출물을 통제하는 견인 방식의 대표적 생산 시스템이다. 이 연구는 상수 공정시간을 갖는 간반 라인 생산 시스템의 성능 분석에 관한 이전의 연구(이호창, 서동원[1])를 CONWIP 시스템에 대해서 확장하였고 그 성능치를 간반 시스템과 비교 분석하였다. 이 두 가지의 라인 생산 시스템이 max-plus 선형시스템의 특수형태라는 사실에 근거하여 기존 분석결과를 그대로 이용함으로써, 각 시스템의 평균 안정 대기시간을 수학적으로 계산하고 그에 따른 각종 성능치를 비교할 수 있었다.

우선 Arena 12를 이용한 시뮬레이션 모형과 비교함으로써 이 연구에서 제시한 CONWIP 분석모형의 타당성을 간접적으로 검증하였다. 주어진 다양한 서비스 품질 조건 하에서 간반의 수를 최소화하는 최적화 문제를 통해 각 시스템의 필요 간반 수를 결정하였다. 그 결과 모든 경우에 대해서 CONWIP 시스템이 간반 시스템보다 우수하다는 이전의 연구결과와 일치하는 결론을 얻을 수 있었다. 또한 각 노드의 평균 대기시간의 측면에서도 동일한 비교 결과

를 계산해 냄으로써 간반 시스템 대비 CONWIP 시스템의 우월성을 주장하는 종래의 근사기법에 의한 연구결과를 수학적으로 재확인하였다. 한편 CONWIP 시스템에서는 간반 시스템과는 달리 라인 공정 내 작업 순서를 변경하더라도 WIP이나 공정체류시간 등 시스템의 성능이 변하지 않는다는 흥미로운 계산 결과를 얻었다. 이와 같은 간반과 CONWIP의 성능 비교 결과 뿐만 아니라 max-plus 대수를 이용한 새로운 분석의 틀을 제시한 것도 본 연구의 또 다른 수확이라고 볼 수 있다. 동일한 분석방법을 DBR 시스템에 적용하여 그 결과를 본 연구 결과와 종합함으로써 WIP을 통해 제어되는 다양한 라인 생산 시스템의 성능을 비교 분석하는 것은 재미있는 후속연구가 될 것으로 보인다.

참 고 문 헌

- [1] 이호창, 서동원, "상수 공정시간을 갖는 간반 라인 생산 시스템의 성능 평가", 『생산성논집』, 제 24권, 제4호(2010), pp.183-205.
- [2] Ayhan, H. and D.-W. Seo, "Laplace transform and moments of waiting times in Poisson driven (Max, +) linear systems," *Queueing systems*, Vol.37, No.4(2001), pp.405-438.
- [3] Ayhan, H. and D.-W. Seo, "Tail probability of transient and stationary waiting times in (Max, +) linear systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol.47, No.1(2002), pp. 151-157.
- [4] Baccelli, F., G. Cohen, G.J. Olsder, and J.-P. Quadrat, *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*, John Wiley and Sons, 1992.
- [5] Baccelli, F., S. Hasenfuss, and V. Schmidt, "Transient and stationary waiting times in (max, +) linear systems with Poisson input," *Queueing Systems*, Vol.26(1997), pp.301-342.
- [6] Baccelli, F., S. Hasenfuss and V. Schmidt,

- “Expansions for steady state characteristics in (Max, +) linear systems,” *Stochastic Models*, Vol.14(1998), pp.1-24.
- [7] Baccelli, F. and V. Schmidt, “Taylor series expansions for Poisson driven (Max, +) linear systems,” *Annals of Applied Probability*, Vol.6, No.1(1996), pp.138-185.
- [8] Bonvik, A.M., Y. Dallery, and S.B. Gershwin, “Approximate analysis of production system operated by a CONWIP/finite buffer hybrid control policy,” *International Journal of Production Research*, Vol.38, No.13(2000), pp. 2845-2869.
- [9] Duenyas, I., W.J. Hopp, and M.L. Spearman, “Characterizing the output process of a CONWIP line with deterministic processing and random outages,” *Management Sciences*, Vol. 39, No.8(1993), pp.975-988.
- [10] Gstettner, S. and H. Kuhn, “Analysis of production control systems kanaban and CONWIP,” *International Journal of Production Research*, Vol.34, No.11(1996), pp.3253-3273.
- [11] Heidergott, B., *Max-plus Linear Stochastic Systems and Perturbation Analysis*, Springer, 2006.
- [12] Jodlbauer, H. and A. Huber, “Service level performance of MRP, kanban, CONWIP and DBR due to parameter stability and environmental robustness,” *International Journal of Production Research*, Vol.46, No.8(2008), pp. 2179-2195.
- [13] Muckstadt, J.A. and S.R. Tayur, “A comparison of alternative kanban control mechanism : I. background and structural results,” *IIE Transaction*, Vol.27(1995), pp.140-150.
- [14] Muckstadt, J.A. and S.R. Tayur, “A comparison of alternative kanban control mechanism : II. experimental results,” *IIE Transaction*, Vol.27(1995), pp.151-161.
- [15] Rhee, Y. and H.G. Perros, “Analysis of an open tandem queuing network with population constraint and constant service times,” *European Journal of Operational Research*, Vol.92(1996), pp.99-111.
- [16] Seo, D.W., “Application of (Max, +)-algebra to the waiting times in deterministic 2-node tandem queues with blocking,” *J. KORMS Society*, Vol.30, No.1(2005), pp.149-159.
- [17] Seo, D.-W., “Application of (Max, +)-algebra to the waiting times in deterministic 3-node tandem queues with blocking,” *J. KORMS Society*, Vol.30, No.2(2005), pp.73-80.
- [18] Spearman, M.L., D.L. Woodruff. and W.J. Hopp, “CONWIP : a pull alternative to kanban,” *International Journal of Production Research*, Vol.28, No.5(1990), pp.879-894.
- [19] Spearman, M.L. and M.A. Zazanis, “Push and pull production systems : issues and comparisons,” *Operations Research*, Vol.40, No.3 (1992), pp.521-532.