한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제2호 (2011년 5월), 71–89

F. Klein의 수학교육에 대한 고찰

A Study of the mathematics education of F. Klein

강현영 Hyun Young Kang

이 글에서는 19세기 후반부터 수학교육개혁 운동에서 지도적인 역할을 하였던 F. Klein의 수학교육에 대해 재음미하고 시사점을 논의한다. Klein의 초기 수학교육에 대한 관점을 보여주는 1872년 'Erlanger Antrittsrede'와 현대 수학교육과정의 기초이며 널리 알려진 1905년 'Meraner Lehrplan für Mathematik'를 중심으로 고찰한다. 이를 바탕으로 수학교육의 목적과 방법, 교사교육의 중요성 등의 교육적 시사점을 논의한다.

This article discusses and reviews the mathematics education of F. Klein who had a leading role in the reform movement of mathematics education from the late 19th century. We are mainly investigated the 'Erlanger Antrittsrede' in 1872 that showed Klein's view on early mathematics education and the 'Meraner Lehrplan für Mathematik' in 1905 that widely known, the basis of the curriculum of modern mathematics education. Based on this, We discusses the educational implications-the purpose and methods of mathematics education, teacher education and so on.

Keywords: F.Klein, 수학교육(Mathematics education), Erlanger Antrittsrede, 메란 교육과정(Meraner Lehrplan für Mathematik)

1 서론

19세기 말 근대 사회는 산업혁명의 발전으로 새로운 모습의 시대적, 사회적 상황과 밀접하게 관련되어 고전 교양교육과 생활준비로서의 교육의 대립이라는 교육적 문제를 야기하게 된다. 수학교육계에서도 당시의 시대적 상황과 사회적 요구에 부합하는 수학교육의 필요성을 인식하고 수학교육을 개선하려는 움직임이 일어나게 된다. 독일에서도 19세기 말 산업혁명의 시기가 도래하면서 산업과 과학이 비약적으로 발전하여 과학이 장려되고 교육 문제가 활발하게 연구된다. 독일의 수학교육을 개선하려는 적극적인 시도가 이루어졌으며 그 중심에는 F. Klein이 있었다.

1872년 Erlangen 대학교 교수 임명을 받은 Klein은 전통에 따라 자신의 전공분야에 대한 취임 강연을 하였고, 그것은 그 당시 존재하였던 모든 기하학을 요약하여 기하학

MSC: 97D20 ZDM: A3D3O
제출일: 3월 4일 수정일: 5월 7일 게재확정일: 5월 16일

에서 새롭고 풍요로운 연구방향을 제시하였던 '에를랑겐 목록(Erlangen Programm)' 이다. 그동안 Klein의 '에를랑겐 목록(Erlangen Programm)' 은 잘 알려졌고 이에 대한 연구 및 논의가 활발히 이루어져 왔다(김성숙 외, 2004; Hawkins, 1984; Birkhoff & Bennett, 1988; Glas, 1993). Klein의 수학교육 개혁운동 역시 주목을 받아왔다. NCTM Standard와 관련하여 Klein의 수학교육 내용을 논의하거나(McComas, 2000) 독일에서 교육제도 발달의 한 과정으로서 그의 수학교육 개혁 운동을 고찰한(Schubring, 1989; Pyenson, 1983) 연구가 있었다. 그 외에도 Klein이 현대 수학과 수학교육에 끼친 영향에 대해 개괄적인 논의가(이상구, 함윤미, 2006; 김성숙, 김주영, 2004) 있었으나 수학교육과 관련된 Klein의 일차적인 문헌에 대한 면밀한 고찰을 통한 논의가 본격적으로 이루어지고 있지 못하다.

교육과학기술부는 2008년 하반기부터 '창의적 인재 육성' 이란 국가경쟁력 강화 차원에서의 수학교육 강화를 위한 '수학교육 내실화 방안' 을 수립하고(교육과학기술부, 2008), 이를 실현시키기 위하여 새로운 수학과 교육과정 개정 사업을 추진하였다. 이에 부응하여 현재 '창의 중심의 미래형 수학과 교육과정' 개발이 진행되고 있는 중이다. 국가교육과학기술자문회의 교육과정위원회에서 '2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정 개선 방향' 에서 제시한 수학적 창의성, 인성의 강조, 수학적 과정의 강화 등을 토대로 하여 교육과정을 개발하고 있다. 이러한 시점에서 비록 시대적으로 과거이지만 현재 수학교육 과정에 기틀을 제공한 F. Klein의 수학교육 이념과 그가 제시한 수학교육과정을 직접 살펴보고 그 의의를 되새겨봄으로써 앞으로 개발되는 수학과 교육과정에 대한 시사점을 생각해 볼 필요가 있다.

이에 따라 이 글에서는 1차 세계대전 이전의 20년간 번성하였던 교육개혁 운동에서 지도적인 역할을 하였던 F.Klein의 1872년 'Erlanger Antrittsrede' 와 1905년 'Meraner Lehrplan für Mathematik' 를 중심으로 그의 수학교육적인 측면에 대해 살펴보고자 한다. 'Erlanger Antrittsrede' 는 1872년 Erlangen 대학교 교수 임명 당시 전공분야에 관한 것과 더불어 수학교육과 관련하여 발표된 다른 강연으로서 수학교육에 관한 Klein의 초기 관점이 분명하게 나타나있으며 이후 그의 수학교육과 관련된 활동에 대한 방향을 제시하고 있다. 'Meraner Lehrplan für Mathematik' 은 1905년 메란 시에서 열렸던 수학-과학자 위원회에서 제안된 Gymnasium[1]에서의 수학과 교육과정으로[2] 오늘날 중등학교 수학교육과정의 근간이라 할 수 있다. 'Meraner Lehrplan für Mathematik' 은

1) Gymnasium : 고전어 교육을 주로 하며 초등학교와 대학을 연결하는 중, 고등학교로 9년제

2) 당시 위원회 위원들은 그 당시 교육에서 수학적 과학적 요소의 중요한 역할을 강조하고자 하였다. 이러한 목적을 위하여 세 가지 지침에 동의한다. 첫째, 중등학교에서는 언어나 역사 분야에만 또는 수학, 과학 분야에만 교육이 집중되어서는 안된다. 둘째, 학교에서 수학과 과학은 언어와 동일한 가치가 있다. 각 교과의 목적은 교양교육으로서 제공되는 것이다. 셋째, 위원회는 세 종류의 중등학교(Gymnasium, Realgymnasium, Oberrealschule)가 동일하다는 것을 확언한다(Pyenson, 1983, p.95).

Klein의 수학교육 목적을 토대로 공간 직관과 함수적 사고를 강조하면서 수학교육과정으로 구체화하고 있다. 1872년 'Erlanger Antrittsrede' 발표 후 수학교육과 관련하여 많은 강연과 발표된 글과 저서가 있지만 이 글에서는 Klein에게 가장 중심이거나 우리에게 가장 많이 알려졌지만 구체적인 내용에 대한 고찰이 부족한 'Erlanger Antrittsrede' 와 'Meraner Lehrplan für Mathematik' 에 대해 고찰하고자 한다. 이에 따라 먼저 두 문헌의 배경으로서 그 당시 독일의 교육 상황을 살펴보고 이어서 'Erlanger Antrittsrede' 와 'Meraner Lehrplan für Mathematik' 의 내용을 구체적으로 살펴보도록 한다. 마지막으로 두 글에서 수학교육적 함의점을 논의하면서 마치도록 한다.

2 독일의 교육과 F. Klein

Klien의 수학 개혁 운동이 전개 되었던 시기에 독일의 전반적인 교육 상황을 살펴보고 그에 따른 Klein의 수학교육 개혁운동이 어떻게 전개되었는지 살펴보도록 한다. 20세기에 들어와서도, 독일의 교육은 19세기 신인문주의[3)]의 지배하에 있었으며, 전통적인 고전어 및 문학교육이 우위를 차지하고 있었다. 그 결과 시대적 진보와 교육 사이에 괴리가 생기게 되었고 교육 개혁의 요구가 증대되었다.

18세기 중엽 Halle 대학의 Wolf는 신인문주의 운동을 시작하면서 수학의 실용적 가치가 아닌 형식도야적 가치를 역설하였다. 신인문주의에 따르면, 중등학교는 그리스에서 완성된 문화의 전형을 통해 인간의 정신을 개발해야 하며, 고전을 통해 형성되는 교양은 진리에 대한 명석한 감각과 미에 대한 바른 정서를 제공한다. 이러한 신인문주의 사상은 대학 입학의 특권을 독점하게 된 Gymnasium에 받아들여졌다. 19세기 초반 독일의 교육은 신인문주의 사조에 따라 철학적 문학적 경향이 강하였으며 고전 연구를 중시하여 그리스어와 라틴어 교육을 강조하였으나 19세기 중엽에 이르러 자연과학이 점차 중시되게 되었다. 이 시기 독일에서는 관료적 정치 체제가 출현하면서 극단적인 통제와 감독 하에 형식적인 교육이 이루어지게 된다. 신인문주의자인 Humbolt는 독일 중등학교의 목적을 일반교양의 함양으로 하고 철학, 수학, 어학, 역사를 중등학교 교육의 주요 과목으로 삼고 수학에 더 많은 수업 시간을 할애하였다. 그러나 Humbolt의 개혁안은 여러 사람들의 반발을 불러 일으켰고, 결국 중등학교에서 수학 시간이 줄어들게 되었다.

Humbolt 이후 중등교육을 담당한 프러시아의 L. Wiese는 종교적인 가치를 강화하기 위하여 고전 학문을 더욱 강조하였다. 그러나 자연과학은 일반적인 덕성 함양이나 심성 교육과는 무관하며, 수학은 지성을 훈련하는 데 도움이 되지만 대학에서 가르치는 고등 수

3) 신인문주의는 18세기 후반 당시의 계몽정신이 너무 지성으로 기울어져서 정서를 무시하는 것에 대한 반동으로 그리스의 이상을 부흥시켜서 인간성의 원만한 발달을 꾀하고자 한다. 고전문화에의 동경을 원동력으로 하면서도 낡은 인문주의가 지나친 언어주의 · 라틴어 편중주의에 기울어져 있는 것에 반대하여 그리스어를 존중하고, 그리스 문학 · 그리스 미술 속에 담겨 있는 인간성을 존중하고자 하였다.

학은 중등학교에 적당하지 않다고 생각하였다(Pyenson, 1983, p.13). 1852년에서 1875년까지 Wiese는 Gymnasium 교육과정에서 자연과학을 없애고 수학도 축소하였다. 그러나 1870년과 1880년 사이 독일 사회 전반에 자연과학과 공업의 중요성이 재인식되면서, Realgymnasium이 급속히 성장하게 되었고 수학의 응용에 대해서도 다시 고려하게 되었다.

19세기 Realgymnasium에서는 전문적인 기술에 필요한 수학이 다루어진 반면, Gymnasium에서는 인문교육으로서 유클리드 원론을 중심으로 하는 형식적인 수학교육이 이루어지고 있었다. 이 시기에 기술의 기초로서 수학의 특권적인 역할은 점점 의문시되어, 공학자와 기술자들 사이에서 '반-수학(anti-mathematics)' 운동이 증가하였다(G. Schubring, 1989, p.181). 1900년 '반-수학' 운동의 결과 수학 시간이 감소하게 하였다. 이러한 상황에서 Klein은 기술교육 기관에서 수학교육의 위기를 극복하고 Realgymnasium과 Gymnasium에서 공히 추구해야 할 수학교육의 모습을 정립하기 위한 개혁 운동을 시작한다.

1888년 Klein은 인문교육과 과학교육이 분리된 것을 고등교육 기관에서 통일하기 위하여 기술대학(technical college)을 대학(university)에 통합하려는 아이디어를 제안하였으나 공학자들의 거센 반발로 실현되지 못한다. Klein은 독일에서 수학교육 제도의 근본적인 개혁이 단순히 기술대학을 대학에 통합하는 조직상의 개편만으로는 성취되기 어렵다고 생각하게 되었다(Schubring, 1989; Pyenson, 1983). Klein은 교사 교육의 개선에 관심을 갖고, 수학 수업에서 형식적이고 추상적인 접근을 지양하고 실제적이고 직관적인 방식으로 접근해야 한다고 주장하였다. Klein의 노력의 결과, 1898년 프러시아의 교사 자격시험을 위한 규정에 응용수학이 도입되었다. 프러시아의 기술 대학에서 처음으로 수학은 학문의 한 분야로 도입되었고, 예비 수학교사는 기술 대학에서 3학기 동안 응용수학을 공부하도록 하였다.

1892년 Klein은 Göttingen 대학에서 수학과 물리학의 통합 교육과정을 개설하였고, 기하학적 직관을 강조하면서 응용수학과 순수수학을 연결하려고 하였다(Pyenson, 1983, p.58). 1899년 기술대학이 대학과 동등한 지위를 얻은 후, 기술 교육이 확장됨에 따라 수학의 역할은 점점 더 중요해졌다. Klein은 그 당시 여러 종류의 학교[4] 특성에 너무 고착되는 것은 수학교육을 위험하게 만든다고 생각하였다. Klein은 각 형태의 중등학교 교육에서부터 고등교육까지 자유롭고 유연한 이행이 제공된다면 이러한 위험은 줄어들 것이라고 믿었으며, 이를 위해서는 결국 중등학교의 수학교육과정의 개혁이 필요하다고 생각하였다(Schubring, 1989, p.185).

Klein은 수학과 과학 교육과정 개혁을 위하여 교사, 과학자, 기술자들의 이해와 협조를

4) 1882년 완성된 학제에 따르면 Gymnasium, Realgymnasium, Oberrealschule의 세 가지 종류의 중등학교가 있었다.

구하고자 다양한 노력을 기울였으며, 폭넓고 강력한 동맹을 만들고자 하였다. 프러시아 정부도 개혁 운동을 지원하여 각 종류의 몇 개의 중등학교가 실험 연구학교로 지정되었다. 적극적인 교사들은 Klein이 주장한 함수 개념의 정신을 구체화한 새로운 교육과정을 도입하기도 하였다(Schubring, 1989, p.188). 1904년 Breslau 회의에서 교육위원들은 수학과 과학에서 학교 개혁을 평가하고 변화를 제안한 후, 1905년 Meran에서 모임을 가졌다. 이 위원회에서 Klein의 주도하에 독일 수학교육의 헌장이라고 불리는 Meraner Lehrplan이 작성되었다.

IMUK(Die Internationale Mathematische Unterrichtskommission)가 1908년 4번째 국제 수학자 회의에서 결성되면서 Klein은 회장으로 선출되었다. Klein은 국제적인 조직의 지원을 통해 개혁 운동을 확장, 강화하고자 하였다. Klein의 이러한 노력은 독일뿐 아니라 다른 여러 나라에도 많은 영향을 끼쳤다.

Klein이 활동했던 19세기 말과 20세기 초는 당시 독일 교육의 사상적 바탕인 신인문주의 교육에 반대하는 개혁 운동이 대대적으로 전개되던 시기였다. 19세기 후반의 교육 개혁가들은 고전만을 중시하는 신인문주의 교육에 반대하여 수학교육 및 과학교육의 개혁을 주장하였다. Klein은 수학을 인간 지식의 다른 어떤 분야에도 구속되지 않는 인문학의 하나로 생각하였다.[5](Pyenson, 1983). 신인문주의자들은 자유교육이란 고전을 가르치는 일이라고 좁게 이해하였으나, Klein은 수학을 통해 문명의 발달과 자연의 법칙을 이해하게 하여 인간의 정신적인 삶을 제고한다는 새로운 과학적 인문주의를 자신의 교육 개혁의 바탕에 두었다고 할 수 있다.

3 Klein의 수학 교육에 대한 Agenda: Erlanger Antrittsrede

1872년 Klein은 알려진 대로 Erlangen 대학에서 교수로 취임하면서 관례상 취임연설을 한다. 그 유명한 "Vergleichende Betrachtungen ueber neuere geometrische Forschungen" (기하학에서 최근 연구에 대한 비교연구)라는 취임연설은 그동안 나타났던 다양한 기하들을 분류하는데 편리한 수단으로서 군 개념이 어떻게 적용되는지 보여주었다. 그러나 이외에 다른 연설문이 함께 발표되었는데, 그것이 바로 수학교육이 주제인 "Erlanger Antrittsrede" 이다. 일반적으로 수학사가들이 "Erlanger Programm"에 교육프로그램이 딸려있었다는 사실을 간과하였다는 것은 분명히 놀라운 일이다.(Rowe, 1983, pp.450–451). 이 절에서는 F. Klein이 1872년에 발표한 "Erlanger Antrittsrede"의 내용에 대해 상세히 살펴보도록 한다.

다음은 1923년 Klein 자신이 쓴 "Erlanger Antrittsrede"에 대한 논의에서 그가 수학교

5) Klein, Vorträge über den mathematischen Unterricht ann den höheren Schulen: I. Von der Organisation des mathematischen Unterrichts(Leipzig, 1907), pp.136-137

육에 대한 주제를 발표하였음을 말한 것의 일부이다.

> 12월 나의 취임식 연설에서, 온전한 교육에 대한 모든 지식과 이상의 조화는 전문적인 연구 때문에 무시되어져서는 안된다는 것을 주장하면서, 나의 교수 계획에 대한 상세한 프로그램을 발표하였다(Klein, 1923; Rowe, 1983 재인용).

1872년 Klein의 널리 알려지지 않은 다른 취임식 강연은 잘 알려진 Erlanger Programm 만큼 고려되어야 할 필요가 있다. Klein이 20년 뒤 수학개혁 운동을 좌우하게 될 모든 주요한 논점이 있기 때문이다(Pyenson, 1983, p.54). Klein의 "Erlanger Antrittsrede"의 중요성을 강조한 Karl-Heinz Manegold(1970)에 따르면, Klein의 취임 연설 이후의 교수 그리고 그와 관련된 조직적인 활동에 대한 핵심적인 요소를 포함하고 있다고 주장한다. Klein의 자서전 초안에서 자신의 증언에 따르면 "Erlanger Antrittsrede"에서의 관점과 제안들은 "나의 이후의 활동을 위한 근본적으로 안내하는 원리들이다"라고 말하고 있다(1923, 18; Rowe, 1985 재인용).

Klein의 "Erlanger Antrittsrede"에서는 수학교육 전반에 대한 목적에 대해 논의되고 있다. Klein(1872)은 "수학적 지식은 실제적인 이익을 수반하기 때문이 아니라 더 높은 의미에서 풍부하고 숭고한 기쁨의 근원이 될 수 있기 때문에, 다른 많은 과학의 영역으로 들어가기 위한 전제 조건이 되기 때문에, 수학적 지식의 부족은 유감스러운 일"이라고 하면서 연설을 시작한다. Klein은 수학이 무미건조하고 지루한 교과이며 필요악과 같은 종류라는 의견에 대하여 반대하며 수학적인 연구를 통해 성취하면서 생기는 상호 관련된 통찰력에 대한 매력을 경험해 보았던 사람은 이러한 판단을 결코 하지 않는다고 말한다. 이러한 것은 수학의 연역적인 측면만이 아니라 귀납적이고 유추적인 측면에서 직관적으로 이해하면서도 느낄 수 있다고 말한다.

> 외관상 어려운 과제가 보조방정식의 도움으로 단순하고 쉽게 해결되었을 때 초심자가 놀라움을 경험합니다. 뒤따르는 논리적인 통찰력을 통해 맛보는 기쁨은 어떤 분야에서도 독자적인 연구를 하였던 사람이 맛보는 연구 성과와 비교가 안 될 정도로 더 높은 수준의 기쁨에 이릅니다. 그러나 수학적인 연구 성과가 단순히 연역적인 활동에만 있다는 생각을 해서는 안됩니다. 그와는 반대로 제 1의 요구사항은 단지 유추에 의해 종종 도움을 받는 귀납적으로 진행되는, 어떤 관계에 대한 정확함을 직관적으로 예측하는 것입니다(Klein, 1872).

Klein(1872)에 따르면, 수학은 결코 단순히 닫혀있고 완성된 교과가 아니라 오히려 다른 것과 함께 강력하게 발달하고 있는 중이라고 주장한다. 또한 수학의 응용적, 실용적인 측면을 강조한다.

> 수학은 단순히 자신만을 위해 존재하는 것은 아닙니다. 수학 연구가 제공하는 형식적인 교육적 가치뿐 아니라 다른 과학을 위해서도 존재합니다(Klein, 1872).

Klein(1939)에 따르면, 그리스 수학에는 유클리드 원론으로 대표되는 논리적 연역을 통해 형식적인 체계를 추구하는 측면과 더불어 아르키메데스 수학으로 대표되는 응용에 대한 광범위한 관심을 추구하는 측면이 있다. 유클리드 원론의 역사적 중요성은 의심할 여지가 없으나, 일련의 생각을 발생적으로 제시하고 새로운 발견의 실마리를 제공하여 지식의 진보를 이끌었던 아르키메데스적인 수학의 중요성 또한 잊어서는 안 된다.

순수수학이 수학 그 자체만을 직접적인 대상으로 한다면, 응용수학은 물리적인 사실로 표현된 수학, 자연현상 또는 생활현상에 '표현' 된 수학으로, 대표적인 예로 자연과학에의 응용을 들 수 있다.

> '응용' 이라는 말에 관하여, 나는 다른 과학의 발달에서 수학에 의해 수행된 이론적인 공헌을 더 생각할 것입니다. 특히 수학의 연구가 가진 형식 교육적 가치를 생각할 것입니다. 나 자신의 교육 배경인 물리학에서 수학적 개념을 적용시키는 것에 대해 좀 더 이야기하고자 합니다. 내가 이해하는 한, 그 유사한 관찰들은 일반적으로 수학의 응용, 특히 자연과학에의 적용을 위한 것입니다(Klein, 1872).

수학은 과학 연구의 도구이며, 그 응용의 범위는 자연과학, 공학, 통계학 등 광범위하다. Klein(1872)은 특히 수리물리학에서 수학이 어떻게 핵심적인 역할을 하는지, 물리적인 현상을 종합하는 데 수학적인 방법이 어떻게 사용되는지 구체적으로 설명하였다. 그러나 Klein은 "Erlanger Antrittsrede"에서 신인문주의 전통 아래 수학 교과의 '형식' 을 중요시하면서 수학교육에서 사고 훈련, 이해, 수학적 안목의 중요성을 강조하였다.[6] 다음은 Klein이 "Erlanger Antrittsrede"에서 수학 교과의 형식을 강조한 부분이다.

> 수학교육에 대한 전체적인 목적에 관하여, 특히 우리가 대학에서 전하려고 애쓰는 형식(form)에 관하여 말하고자 합니다.
>
> 수학의 가치는 이것이 분명히 과소평가되어서는 안되는 것임에도 불구하고, 수학의 응용을 통해 얻어지는 지식에 있다기보다는 순수 수학으로 공부하는 것을 통해 얻어지는 정신의 훈련에 있다고 주장하고자 합니다.

6) 수학교육에 대한 Erlangen대학 취임 연설은 Klein이 수학교육에 있어서 신인문주의의 전통적인 프러시아 견해라는 평가를 받는다(Schubring, 1989, p.183; Rowe, 1985, p.127).

> 형식적인 교육의 도구로서 수학-이것은 내가 자연과학과 의학을 배우는 학생들이 기억하길 간청하는 핵심적인 측면입니다. 자연과학 분야의 학생들은 수학을 배우는 첫 번째 학기에 한 개 또는 그 이상의 수학 강연에 등록할 가치가 있다는 것을 분명히 알게 될 것입니다.

Klein은 전통적인 신인문주의적 입장에서 수학의 심미적 특성과 수학 교과의 형식적인 교육적 가치에 대해 강조하고 있다(Pyenson, 1983; Rowe, 1985). 또한 이러한 수학교육에서 가장 중요한 문제는 '무관심의 문제' 이며 가장 중요한 고려사항이라고 말하고 있다.

Klein이 수학의 형식적인 가치를 강조하고 있지만, 이것은 당시 독일 수학교육에 만연해 있던 형식주의와는 본질적으로 다른 것이다(Rowe, 1985, p.127). Klein은 "Erlanger Antrittsrede"에서 그 당시 독일에 만연해 있던 형식주의를 다음과 같이 비판하고 있다.

> 수학적인 조작을 위한 올바른 의식을 발달시키거나 또는 기하에 대한 생생하고 직관적인 이해를 개선하는 것 대신에, 교실에서의 수업 시간은 생각 없이 형식만을 배우거나 근본적인 기초가 없는 사소한 기교만을 연습하는 데 시간을 보냅니다(Klein, 1872).

Klein에게 있어서, 기교만을 연습한 학생들이 스스로 아이디어를 구상하지도 못하고 친숙하지 않은 질문에 전혀 답하지 못하는 상황, 수학이라는 교과가 교육의 빈곤함과 무관심으로 인하여 가치 없는 것으로 간주되는 상황은 매우 유감스러운 것이었다.

Klein은 수학교육에 있어서 무엇보다 중요한 점은 수학의 '형식' 과 '응용' 모두가 존중되어야 하며 수업에서도 균형을 이루어야 한다는 점이었다. 당시 독일의 교육에서 인문교육과 과학교육 사이의 분리된 상황을 언급하면서 조화롭게 통합되어야 함을 주장하고 교육의 조화로운 통합을 위하여 적절한 수학교육의 필요성을 역설한다.

> 인문 교육과 과학 교육 사이의 분리를 언급하는 것입니다. 수학 그리고 수학과 관련된 분야는 이것에 의해 자연과학으로 분리되었고, 그래서 이러한 것을 위해 수학에 대한 필요불가결성을 올바르게 고려해야 합니다.

> 나는 너무 머지않은 장래에 이러한 입장(태도)이 다시 균형을 이룰 것이며 곧 양극화된 요소들이 조화롭게 함께 결합되는 통합된 교육이 탄생하게 되길 바랍니다.

Klein에 따르면, 수학적 사고는 단순하게 순간적으로 고무될 수 있는 것이 아니기 때문에 자신이 꾸준히 그리고 부지런히 공부해야만 하고 연습되어야 한다. 그러나 무엇보다도 요구되는 것은 살아있는 교육으로 수학에 대한 더 많은 관심과 그리고 구체적인 것에 대한

활발한 취급임을 강조한다. 비본질적인 것에서 본질적인 것을 분리하는 능력, 어떠한 요소에 대한 논리적인 설명만이 아니라 강의의 기술, 모델을 만들고 그리는 것 등을 연습하여야 한다.

Klein은 무엇보다도 교사 교육의 중요성을 강조하는데, 대학의 수학교수로서 가치가 있는 것은 바로 교사 교육의 분야로서 수년간 보지 못해왔던 수준에서 예비 교사 자격을 위한 수학교육의 기준을 만들어야 한다고 주장한다. 만약 교사를 더욱더 잘 교육한다면, 오랫동안 위탁되었던 형식이 새롭고 활력 있는 내용으로 채워지게 되며, 수학교육은 저절로 개선될 것이라고 하였다.[7)]

> 자신의 분야에서 현재 지식을 가지며 그것의 더 나은 발달을 따를 수 있는 능력이 있는 학과 위에 있는 미래 교사를 원합니다. 따라서 최소한 독립적인 연구를 수행할 만큼 충분히 이끌어 주기를 희망합니다.

이를 위하여 독립적인 연구와 실제 그리고 적절한 실제적인 교육과정에서 구성적인 연습을 위한 세미나가 필요함을 주장하였다.

4 Klein의 수학 교육 실천: Der Meraner Lehrplan für Mathematik

이미 언급한대로 1904년 Breslau에서 수학자와 과학자들의 회의가 열렸고, 이 회의에서 Klein은 "그래프로 표현된 함수 개념이 수학 교수의 중심적인 관념으로 형성되어야 하고, 자연스러운 결과로서 미적분의 요소들은 9학년 교육과정에 포함되어야 한다"고 주장하였다. Klein은 회의에서 매우 강력한 인상을 남겼고, Breslau Kommission으로 알려진 위원회는 함수를 중심으로 하는 학교수학 교육 개혁안을 만들기로 하였다. 1905년 Meran에서 Klein을 위원장으로 하는 위원회는 학교수학을 종합적으로 조직하고 연속적으로 통합하는 방안으로 메란 교육과정을 제안하였다. 이 절에서는 Klein이 수학교육의 실제적인 실천방안으로서 현대 수학교육 과정의 기초라고 할 수 있는 Meraner Lehrplan für Mathematik(1905)에서 강조하였던 중심 문제와 그 내용을 살펴보도록 한다.

메란 교육과정은 중등 교육기관에서 수학 교과의 위상에 대해 언급하면서 시작하고 있다. "수학 교과는 타 교과보다 정신 계발에 적절하고 다른 개념 및 영역과 관련되며 존재하고 있는 지식과 새로운 지식을 유기적으로 연결하고 그 지식 자체 내에서의 연결과 학교에서 다른 교육과의 연결을 단계적으로 점진적으로 만들어 간다"는 것이다. 다음과 같은 원칙에 부합하도록 교육과정을 만들고 실행하고자 하였다.

7) 그동안 이러한 방향에서 일해 왔던 교사들의 수가 적지 않았기 때문에, 많은 측면에서 개선되어 왔으며 머지않아 김나지움에서 수학교육의 근본적인 개선이 획득될 것이라고 희망한다(Klein, 1872).

> 수학의 형식 도야적 가치가 충분히 인정된 입장에서, 모든 일방적이고 실제적으로 무의미한 특별한 종류의 지식들을 제거하고 우리 주변 현상계에 대한 수학적 관찰 능력을 가능한 한 발달시키는 것에 관심을 두도록 한다. 여기서 두 가지 특별한 과제 즉, 공간적 직관 능력 강화와 함수적 사고 습관의 교육이 그것이다 (Klein, 1905).

"Erlanger Antrittsrede"에서 강조하였듯이 수학의 형식적 가치 아래 수학 교과를 통해 무의미한 지식이 아니라 우리 주변을 수학적 안목으로 볼 수 있는 능력을 육성하고자 하였다. 이미 알려진 대로 공간직관 능력과 함수적 사고라는 두 축을 중심으로 메란 교육과정을 구성하고자 하였다.

메란 교육과정에서는 다음과 같은 문제를 강조하고 있다. 첫째, 일반적인 관점에서 불필요한 다수의 소재를 제거한다. 둘째, 광범위한 교사의 자율권을 부여한다. 셋째, Oberprima(9학년)의 수학 수업의 궁극적인 목표로서, 학교에서 다루어지는 수학적 주제 조직에 대한 학문적 개관, 수학적 이해 능력과 개인의 과제 수행을 위한 그 적용, 정확한 자연에 대한 지식과 현대 문명에 대한 수학적 의미를 통찰하도록 한다. 넷째, Gymnasien에서 수학 수업 시간의 증가를 희망한다.

특히 훈련을 전제로 한 숙달, 기하학적 작도에 대한 분석적 변형의 영역, 초심자들이 너무나도 이해하기 어려운 추상적인 해석과 증명 등을 제거하여 "많은 학생들이 불필요한 것으로부터 벗어나게 함으로써 수학 교육의 성공에 다가설 수 있도록 하기 위한 것"이다. 그러나 이미 습득한 수학적 지식의 사용에 대한 확신과 수학적 사고의 논리는 결코 포기되어서는 안 된다고 강조하고 있다. 그리고 강의 방법이나 세부적인 문제의 선택 등과 관련하여 교사의 자율권을 부여하고자 하였는데, Gymnasium의 Oberprima(9학년)의 수학 교육 과정 중 미적분에 접근하기 위한 입문 단계에서 어떤 형태가 더 유용한지에 대해 교사에게 선택권을 부여하고자 하였다. Oberprima(9학년) 수학 수업과 관련하여 특별한 직업에서 요구되는 유용한 지식 뿐 아니라 더 깊이 있는 수학적 관점을 위한 기초를 얻게 되도록 하고자 함을 명시하고 있다. 특히 당시 3시간의 수학 수업시간의 부족함을 설명하고 있는데, 무엇보다 "고등학교는 한편으로는 사물에 담겨있는 중요한 측면에 대해 꽤 깊은 정도까지 습득하는 일반적 도야적인 시기이며 또 다른 한편으로는 더 넓은 분야를 실제적으로 이용, 관찰하는 과정으로서의 역할을 수행하기 때문이다".

Gymnasien의 메란 교육과정의 전반적인 내용과 각 학년에서 다루는 주요한 내용을 정리하면 다음과 같다. Sexta[8]에서는 제한된 범위 내에서 정수의 사칙 연산과 분수 계산의 준비로써 간단한 소수 연습을 한다.

8) Sexta : 9년제 Gymnasium의 제 1 학년(우리나라의 초등학교 5학년), Quinta(2학년), Quarta(3학년), Unterteria(4학년), Obertertia(5학년), Untersekunda(6학년)

Quinta의 Rechnen(계산)에서는 소수를 이용한 계산 연습과 단위에 대한 응용을 통해 그 범위를 확장시킨다. Propädeutische Raumlehre(기하학 입문)에서는 공간 직관에 대한 기본 개념을 소개한다. 공간 확장, 평면, 선, 점 등을 주위의 사물로 설명하고, 다양한 입체를 통해 그 개념을 명료하게 한다. 자와 컴퍼스를 사용하는 훈련이 지속적으로 이루어진다.

Quarta의 Rechnen(계산)에서는 형식적인 공식의 과도한 사용을 피하면서 비례법의 사용을 학습하고 일상생활에서 일어나는 과제를 통해 퍼센트 계산의 간단한 경우를 다룬다. 이전에 풀었던 과제에 대해 정해진 숫자 대신 문자를 사용하게 하여 산술(Arithemetik) 수업의 준비를 한다. Raumlehre(기하)에서는 직선, 각, 삼각형에 대해 다루며, 형태의 구성을 바탕으로 간단한 평행사변형 정리를 다룬다.

Unterteria의 Arithemetik(산술)에서는 문자 공식을 통해 사칙 연산의 체계적인 총괄이 이루어진다. 상대적인 양에 대한 산술 법칙이 등장하며 양의 변화에서 지속적으로 나타나는 함수적 성질의 지속적인 강조와 음수의 양을 고려하면서 문자식의 값을 구하는 연습을 계속한다. Raumlehre(기하)에서는 평행사변형 이론을 확장하여 사다리꼴, 원에 대한 기본적 정리를 다루며 교과 과정과 긴밀하게 연결된 작도를 다룬다.

Obertertia의 Arithemetik(산술)에서는 문자식, 특히 다항식의 분석을 다룬다. 변수에 대한 양에 대한 종속성을 다루며 간단한 선형 함수의 그래프 표현이 등장하고 방정식의 풀이를 위해 그래프 표현을 사용한다. Raumlehre(기하)에서는 복잡한 직선의 경계를 갖는 형태에 대한 겉넓이 비교와 겉넓이 계산이 이루어진다. 평면의 곡선 경계에 대한 근사계산이 등장한다.

Untersekunda의 Arithemetik(산술)에서는 제곱근, 하나의 미지수를 갖는 이차 방정식 및 그 응용, 계수와 제곱근 사이의 관련성, 그래프 표현과 관련된 이차식에 종속되어있는 변수에 대해 고찰한다. 직선과 포물선의 교점을 통해 한 개의 미지수를 갖는 이차 방정식의 과제를 해결하고 그래프 표현을 고찰한다. Raumlehre(기하)에서는 닮음이론, 원에서의 비율, 다각형의 근접을 통한 원주와 넓이에 대한 근사치 계산, 삼각형의 각과 변의 길이에 대한 상호 종속 관계를 상세히 다룬다. 실제적인 과제를 부여하고 이러한 것에 대한 종속성을 다루고, 삼각법을 위한 준비로써 표를 통해 배열하고 확인한다.

Obersekunda[9]의 Arithemetik(산술)에서는 제곱의 개념을 확장하고 로그의 개념과 응용을 다룬다. 처음에는 등차수열과 등비수열을 도입한다. 등비수열은 간단하고 실제적인 과제를 통해 복리계산과 이자 계산에 응용된다. 진수와 로그의 상호 종속성을 그래프로 표현한다. 계산자[10] 이용하고 두 개의 미지수를 갖는 이차 방정식을 계산과 그래프 표현을 통해 해결한다. Raumlehre(기하)에서 구성적인 평면기하와의 연결 선상에서 삼각법을

9) 9년제 Gymnasium의 Obersekunda(7학년), Unterprima(8학년), Oberprima(9학년)은 상급 학년이다.

10) 로그의 원리를 응용하여 정수 · 소수의 곱셈과 나눗셈을 비롯하여 제곱근풀이, 세제곱근풀이 또는 삼각비 등의 근사계산을 간단하게 처리할 수 있는 계산 기구.

다룬다. 각의 변화와 각도 측정 공식을 통한 함수의 변화 사이의 상호종속성을 규정하고 그러한 종속성에 관한 그래프 표현을 다룬다.

Unterprima의 Arithemetik(산술)에서는 기하와 물리(특히 역학) 분야의 여러 가지 예를 사용하여 증가와 감소의 전체 과정에 따라 미분과 적분 개념의 결과적인 고려 하에 지금까지 등장한 함수를 종합적으로 고찰한다. 연습용으로 제시되는 예를 통해 조합론의 간단한 정리와 간단한 연습을 한다. Raumlehre(기하)에서는 투영의 중요한 요소를 고려하면서 부피를 측정, 연습한다. 지도 사영 수업을 포함하여 수학적 지리학을 다룬다.

Oberprima에서는 해석 기하학적 관점과 종합 기하학적 관점에서 원추곡선 및 천문학의 기본 요소에의 그 응용, 계산상으로 그리고 그래프를 통해 수행되어야 하는 중요한 과제를 통한 학교 수학 교육의 전 분야에 걸친 복습, 역사적 관점과 철학적 관점을 고려한 회고를 제안하고 있다.

메란 교육과정에 대한 해석에 따르면(1905), 저학년의 계산지도에서 인위적인 상황이 아닌 실제로 발생하는 상황들을 취급하는 일상생활의 과제를 도입하도록 한다. 일반적으로 교육받은 성인들이 필요로 하는 교육으로서 그리고 산술의 준비가 되도록 할 것을 요구하고 있다. 기하교육은 자연스러운 직관과 연결되고 실질적인 측정에서 시작하도록 한다. 간접 증명은 가능한 피하고 건전한 이해가 되는 증명을 다루도록 한다. 평면기하는 3차원의 실제적인 공간과의 관계 속에서 통합되어야 한다. 함수적 사고 습관은 양과 위치의 변화를 통해, 전체 사태의 변화에 대한 끊임없는 고찰을 통해 기하에서도 단련될 수 있다. 작도는 교과과정과 밀접하게 연결 짓도록 하고 분석을 통해 실제로 해답에 이르는 과정을 중요시한다. 그래프 표현을 강조하며 고학년 수학 수업에서 실제적인 함수적 이해를 통해 자연스럽게 산술과 기하 분야가 내부적으로 연결될 수 있는 기회를 갖도록 한다. 특히 마지막 학년에서는 반성을 통한 종합이 이루어지도록 한다. 구술시험에서는 암기보다는 이해에 무게를 둘 것을 권고하고 있다.

메란 교육과정의 내용을 살펴 본 바에 따르면, 다음과 같은 원리를 바탕으로 메란 교육과정을 조직하였다고 할 수 있을 것이다(Coleman, 1942; McComas, 2000). 첫째, 교육은 지금까지 보다 지적인 발달의 자연스러운 과정을 적용하여야만 한다. 둘째, 새로운 지식은 아이들이 이미 가지고 있는 지식과 유기적으로 결합되어야만 한다. 셋째, 주제의 다양한 부분들 사이에서 그리고 주제와 교육과정에서 한 주제와 다른 부분들 사이의 상호관계가 확립되어져야만 한다. 넷째, 수학의 형식적 교육의 가치에 대해 완전히 재인식하면서, 실제적인 중요성이 없는 모든 편파적인 특별한 지식을 배제하면서, 수학교육은 주변을 수학적으로 볼 수 있는 능력이 가능하도록 개발시켜야만 한다. 다섯째, 수학교육의 특별한 목적은 공간 지각력과 함수적 사고 습관의 함양이 되어야만 한다. 여섯째, 초보자에 의해 자주 오해되는 추상적인 개념과 증명은 교육의 보다 높은 단계로 옮겨야만 한다. 일곱 번째, 기하 교육은

직관, 지각 그리고 실제적인 측정에서 시작되어야만 한다. 기하 교육에서 학생들이 즉시 분명한 것을 증명하게 하지 않도록 주의해야만 한다.

메란 교육과정의 내용과 그 조직 원리는 현재 수학교육과정의 내용과 조직 원리의 근본 바탕을 이룸을 알 수 있다.

5 F. Klein의 수학교육에 따른 시사점

20세기 초 Klein은 과학기술 및 산업 발전에서 비롯된 시대적 요구에 부응하여 수학교육 개혁 운동을 선도하였고, 함수를 중심으로 하는 새로운 수학교육과정을 만들어 오늘날의 수학 교육과정의 바탕을 제공하였다. 지금까지 F. Klein의 "Erlanger Antrittsrede"과 "Meraner Lehrplan für Mathematik"을 살펴본 바에 따라 수학교육적인 측면에서 몇 가지 시사점을 생각해보도록 한다.

5.1 수학교육의 목적

Klein은 일반교양 교육으로서의 수학교육 이념 아래 수학의 이론적인 측면과 실제적인 측면을 통합하여 학교수학을 통해 현대 과학문명 및 문화의 바탕을 이해하게 하고자 하였다. Klein은 교과의 '형식'을 강조하는 인문주의 전통의 기본적인 아이디어를 계승 발전시켜 수학의 '형식'을 강조하고, 수학적 지식이 풍부하고 숭고한 지적 희열의 근원이라고 하면서 수학을 공부하는 과정에서 이루어지는 정신 도야를 강조하였다.

Klein은 수학의 근본적인 목적은 "세상의 존재에 관한 바른 전제를 근거로 한 바른 고찰이 외부세계를 지배할 수 있다는[11] 올바른 신념을 갖도록 하는 것"이라고 하면서(Klein, 1902, pp.129), 수학의 형식적인 교육적 가치와 심미적 특성에 대해 강조한다. Klein은 '형식'의 의미를 명확히 설명하고 있지는 않지만 수학의 형식도야적 가치를 통해 정신의 훈련이 가능하다고 말한 것과 신인문주의적 전통 속에서 교육의 문제를 바라보았다는 점을 단서로 하여 그가 생각한 '형식'의 의미를 짐작해 볼 수 있다. 교과를 통해 형식을 배웠다는 것은 교과에 내재된 사고방식을 익혔음을 뜻하는 것이다. 따라서 수학의 '형식'을 이해했다는 것은 수학의 독특한 개념, 논리, 준거를 사용하여 사고할 수 있는 통찰력을 얻게 되었다는 것을 말한다. 수학을 배우는 것은 수학을 통하여 도야된 정신이 인간, 현상, 사물에 관하여 판단하고 추리하는 데 유용하기 때문이다. Klein이 주도한 메란 교육과정의 마지막 학년에서 수학의 궁극적인 목표 중 하나로 제시된 "자연에 대한 정확한 지식과 현대 문명에 대한 수학적 의미 통찰"에서 엿볼 수 있듯이, 수학을 공부하는 이유는 현상을 올바른 안목으로 파악하려는 데에 있다(강현영, 2008). Klein에 따르면, 수학은 단순히 문제해결의 수단이

11) richtiges Nachdenken auf Grund richtiger Prämissen die Außenwelt beherrschen läßt

아닌 형식의 습득을 통한 정신도야의 기회를 제공해준다는 점에서 특별한 의미를 가진다. 이러한 점은 현재 우리나라 수학교육의 목적을 생각해 볼 때 시사점을 줄 수 있다.

현재 연구되고 있는 2009 개정교육과정에서 초등학교와 중학교 교육과정상의 교육 목표를 "수학의 지식과 기능을 습득하고, 수학적 사고와 의사소통의 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰함으로써 합리적이며 창의적으로 해결하는 능력을 기르고, 수학 학습자로서 바람직한 인성과 태도를 기른다"(창의 중심의 수학과 교육과정 개정 시안 연구, 2011, p.20) 라고 제시하고 있다. 이는 교육과정 시안 연구에서 새롭게 강조되고, 최근 교육계에서도 인성을 강조하고 있음을 반영하고 있다. 수학 교과를 통해 여러 현상과 문제를 수학적으로 해결하는 과정에서 바람직한 인성과 태도를 기른다는 것은 Klein에 따르면 현상을 수학적 안목으로 올바르게 파악하여 인간, 현상, 사물에 대하여 올바르게 판단, 추리할 수 있는 능력을 가진다고 말할 수 있을 것이다.

Klein이 수학의 형식과 수학 학습을 통한 정신도야를 강조하는 것은 사물이나 현상을 보는 틀로서의 수학적 지식을 강조한 것으로 볼 수 있다. Klein에게 있어서 수학은 각각 관련된 현상을 보는 개념적 수단이며, 수학을 배울 때 우리는 그 개념적 수단으로 관련된 현상을 '보는' 일을 배우는 것이다. 수학의 가치는 생활의 문제를 해결하거나 필요한 정보를 제공해 줄 수 있는가에 그치지 않고, 사물이나 현상을 파악할 줄 아는 안목을 가져다 줄 수 있는가에 의해 정당화된다고 말할 수 있다. Klein의 수학교육 사상 이면에 있는 수학의 교양교육적 의미는 국민 기초교육으로서의 수학교육의 교육적 의미를 생각해 볼 때 매우 필요하다.

5.2 통합적이고 유기적인 수학교육

Klein은 수학의 형식을 통해 정신도야를 이루고, 응용을 통해 문화의 의미를 이해하는 수학교육을 추구하기 위하여 중요한 점은 수학교육에서 수학의 '형식'과 '응용' 모두가 존중되어야 하며 수업에서도 균형을 이루어야 한다는 점이다.[12)]

Klein은 수학의 형식이 수학의 응용을 통해서만 실현될 수 있다고 주장하면서 형식의 이해의 바탕이 되는 응용을 강조하였다. Klein에 의하면, 순수수학은 응용수학을 포함하여 수학의 분리된 분야들을 결합하고 종합하는 틀이 된다(Pyenson, 1983, p.56). 추상적인 수학의 형식은 외부세계와 구체적인 관계가 있고, 순수수학은 자연뿐 아니라 경제, 정치, 상업적인 생활, 현대 문명을 이해하고 바라보는 데 필수적이라는 것을 강조하였다(Pyenson, 1983, p.85). Klein은 응용 수학자가 순수수학에 대한 경의를 잃어버리지 않고 순수 수학자는 응용 분야의 중요성을 의식하도록 해야 한다고 하였다.

12) Klein은 순수 수학과 응용수학 사이의 분열을 막기 위해서 수학에서 기하학적 모델을 사용할 것을 권고하였다(Pyenson, 1983, p.56).

Klein이 강조하는 수학의 응용에는 이미 형식이 가정되어 있으며 수학을 응용함으로써 그 형식이 실현된다. 형식을 통한 정신 도야는 형식이 가정되어 있는 수학을 여러 분야에 응용하는 과정에서 이루어진다. 수학의 응용을 통해서 형식을 실현한다는 것은 외부 사물과 현상을 다룸으로써 사물과 현상의 본질을 추구하는 것으로 볼 수 있다. 교과는 구체적인 내용들의 집합이며 내용을 통해서만 형식을 가르칠 수 있다. 수학의 형식도 그 내용인 수학의 '응용'을 통해서 가르칠 수 있다는 것이 Klein의 생각이라고 할 수 있다. Klein은 수학교육의 온전한 모습을 드러내기 위해서는 수학의 형식과 응용 양자 중 어느 하나도 없어서는 안된다고 생각한 것이다. Klein이 수학교육에서 형식과 응용을 강조하는 것은 인간의 이해는 현상에서 벗어날 수 없으며 바로 그 현상에서 출발하여 현상을 지극히 탐구해야만 한다는 것을 보여주고 있다고 볼 수 있다. Klein은 수학의 형식과 응용을 모두 강조하여 수학교육의 온전한 모습을 드러내려 하였던 것이다.

Klein은 중등학교 수학은 평균 재능을 가진 인간 정신이 도달할 수 있는 수학으로서, 인류 문화에 대한 이해의 보편적 기초를 제공할 수 있어야 한다고 주장하였다. 그는 중등수학교육의 이상적인 목적은 보편적 교양이라고 하면서, 수학은 하나의 유기체이므로, 그 각 부분이 능동적이고 생생한 관계 안에서 가르쳐져야 한다고 말한다.[13] 수학에는 다양한 분야가 있고 이 분야들이 서로 관련을 맺으면서 수학을 이루고 있다. 총체적 관점에서 Klein은 기하와 대수의 배타적이고 분리적인 수학교육을 비판하였다. 통합적이고 유기적인 올바른 수학교육의 목적에 부합하지 않는 불필요한 요소를 제거하고 학생들에게 적절한 내용을 유기적으로 구성하고자 하였다. Klein은 "교재는 백과사전식 나열이 아니라 그 자체로 완성된 하나의 체제로 제시되어야"(1902)함을 강조하고 메란 교육과정에서도 여러 가지 수학적 개념을 유기적으로 구성하고자 하였다. 뿐만 아니라 "수학적 사고방식은 학교의 수업을 통하여 독자적으로 형성됩니다. 그러나 수학의 내용은 학교에서 가르치는 그 밖의 다른 과목, 즉 일반 교육과정에 들어있는 여러 교과목들과 함께 가능한 한 생동적인 관계 속에서 보완되어야 합니다(1904)"라고 하며 자연과학의 여러 분야와 관련짓고자 하였다. 보편적 교양 형성을 목적으로 하는 수학 수업은 상이한 사고방식을 밀접하게 관련시켜 수학의 각 부분이 생생한 관계 속에서 이해되도록 하는 것이다. 또한 Klein은 교과의 심리와 논리가 조화롭게 하나의 총체로 통일되어야 함을 강조한다. 아동은 자신의 경험을 근거로 활동을 통해 수학을 재발견해야 하므로, 처음에 생활과의 관련에서 출발하여 점진적으로 논리적 완성에 이르게 하는 것이 바람직하다. 이러한 방법은 학습자로 하여금 현실을 수학적 수단으로 조직하는 지혜를 얻게 한다. Freudenthal(1983)은 수학은 상식으로부터 출발하여 내용과 형식의 교대 작용을 거치면서 점진적으로 형식화되어 가는 인간의 활동이라고 본

13) F. Klein and R. Schimmack(1907), Vorträge über den Mathematischen Unterricht an den Höheren Schulen

다. 이러한 입장은 수학은 현상에서 출발하여 현상을 정리하고 조직하는 수단으로 논리적 완성에 이르게 한다는 학교수학의 인간화를 추구한 Klein의 입장과 상통하는 것으로 볼 수 있다.

5.3 수학교육과정의 원리와 방법 : 공간직관 함양과 함수적 사고 교육

교육과정을 계획하는 일은 모든 학년의 수준을 통틀어 가르쳐야 할 수학적 개념 또는 원리들을 확인하고 그것을 각각의 학년 수준에서 어느 정도로 정확하고 치밀하게 가르칠 것인가를 결정하는 일이다. 여기서 수학적 지식의 핵심적인 아이디어를 학년 수준에 맞게 표현하는 일이 무엇보다도 중요하다.

Klein은 수학교육에 있어서 일방적인 형식적 추상적인 접근 대신에 실제적인 교수와 (공간) 직관의 개발을 주장하였다. 수학 수업에서 학생들의 관심을 일깨우고 순수수학과 응용수학 그리고 수학과 다른 여러 분야의 통합을 위하여 기하학적 모델을 사용할 것을 권고하였다. Klein에게 있어서 공간 직관은 유기적인 수학을 이해하기 위한 기초일 뿐 아니라, 모든 수학적 관계를 초등화하는 방법이었다.

Klein이 보기에, 함수는 학교수학을 종합적이고 연속적으로 조직하게 하는 통합원리였다. 함수가 전체 수학 교육과정에 들어 있는 산술, 기하, 대수 등의 여러 내용과 나아가 물리나 경제 등 다른 교과목의 내용과 생동적인 관계를 갖도록 지도하고자 하였다. 그리고 한 단계에서 다음 단계로 진행하면서 학생들이 수학교과의 연속성을 더욱 의식하게 만들기 위해 통합개념으로서의 함수적 사고를 강조하였다.[14]

Klein은 학교수학에서 함수 개념의 논의는 미적분법으로 자연스럽게 연결되고, "미적분의 이해는 우리 주변을 둘러싸고 있는 자연의 가장 단순한 합법성을 이해하기 위해서 반드시 알고 있어야 하기 때문에"(1904) 학교수학에 미적분학을 도입할 것을 주장하였다.

> 미적분학의 근본 원리는 '고등 해석학' 에 속하는 것이 아니라 기초수학에 속한다. 미적분학은 주어진 범위 내에서 학교수학의 한 부분이 되어야 한다(Klien & Schimmack, 1907, pp.111–112)

Klien에 따르면 미적분법은 변화 속에 존재하는 함수적 법칙성을 연구대상으로 하는 과학적 사고의 기본 형식이라고 할 수 있다. 학교에서 미적분 지도 결과 극소수의 학생들만 이해한다는 문제 제기에 대하여, 수업의 추상적인 방식 때문이며 자연스러운 과정으로 보일 수 있도록 구체적으로 설명될 수 있다고 말한다(1902). "학생들은 이것을 배움으로써 '사고의 전환' 을 겪게 된다고 합니다. 제가 제안하고자 하는 교육과정은 학생에게 이러한

14) 수학은 처음부터 끝까지 기하학과 해석학에 의한 함수와 그것의 응용에 관한 이해로 구성되어 있습니다. 오늘의 이 강연을 통하여 강조하고 싶은 점은 다음과 같습니다. 함수는 합목적적인 형태로 반드시 이론 수학 수업의 중심을 차지해야 한다는 것입니다(1904).

사고의 전환을 최대한 겪게 하지 않는 것입니다. 그 대신 학생은 처음부터 이 사고의 전환에 해당하는 수준 높은 사고과정에 익숙해지도록"(1904) 교육과정을 개발하고자 하였던 것이다.

Klein에 의하면, 중등학교 시기는 사물의 중요한 측면을 깊은 정도로 습득하는 일반적 도야의 시기이다. Klein은 상급 학년으로 올라가면서 산술(대수)와 기하가 자연스럽게 연결되는 가운데 다양한 분야에 수학을 실제로 이용함으로써, 교육과정을 따라 배워 온 여러 개념을 종합하도록 한다. 그 과정에서 자연 현상과 현대 문명을 이해하는데 수학적 사고가 지니고 있는 중요성을 이해하는 것이 무엇보다도 중요하다고 보았다. 수학을 통해 자연 현상과 현대 문명을 이해하기 위해서는 학습한 여러 가지 개념을 가지고 우연적이고 상이한 것으로 보이는 여러 현상을 설명하는 원리나 법칙을 탐구하면서 사물이나 현상의 궁극적 의미가 무엇인지를 생각해 보아야 할 것이다.

5.4 성공적인 수학교육의 시작: 교사교육

학교에서 새로운 내용의 도입과 그에 따른 새로운 학교 문화와 수업 문화를 창조하는 등의 교육의 질적 발전은 전문성을 갖춘 교사들의 역량에 달려있다고 할 수 있다. Klein은 자신의 수학교육의 목적을 달성하기 위하여 교사교육의 중요성을 강조하고 있다. 그는 통합적이고 유기적인 수학교육과 새로운 수학의 내용과 조직을 위하여 교사의 역할이 무엇보다도 중요하다고 생각하였다.

> 우리는 지난 십여년 동안 지나치게 추상적인 쪽으로 기울었던 진자를 다시 반대의 극으로 옮겨놓기를 원하지 않습니다. 우리는 단지 진자를 양 극단 사이의 중심에 놓기를 원합니다. 진자의 중심을 잡는 일은 더욱 진보된 교사양성교육을 받은 교사의 과제이며 그 일의 성패는 교사의 기술에 달려있습니다(Klein, 1902).

또한 수학교육 개혁을 위하여 교사의 조건으로 "응용수학은 정규 수학 수업의 필수적인 부분이 되기 위해서 수학 교사는 순수 수학과 응용수학을 가르치는 능력을 겸비해야 한다" 1939, p.15)고 말하고 있다.

교육개혁이나 교육과정 변화가 학교 현장에 정착되기 위해서는 현장 교사들을 대상으로 한 교사 재교육이나 연수 기회를 마련하여야 한다. Klein 역시 이러한 현장 교사의 교육에 대하여 많은 관심을 가지고 지속적인 실행을 하였다. 특히 연로한 교사들에게는 응용수학의 장점은 곧 커다란 곤경을 의미하므로 그들을 위하여 통합된 수학 방학강좌가 이전보다 훨씬 더 많이 개설되어야 한다고 주장하였다.

또한 수학교육의 새로운 요구를 충족하는데 학교의 전통적인 수업방법과 근대의 대학수업의 조건 사이에 날카로운 대립이 있음을 지적하면서, 교사 임용에서 현대적 수업 방식에

대한 요구가 필요함을 역설하고 있다.

> 현대적 수업방식 예컨대 세미나, 도서관의 열람실, 모델수집 등의 요구가 늘어나는 것은 당연합니다. 특히 응용수학에 있어서는 제도실, 회의실, 측지학과 역학을 위한 시험기구 등이 요구됩니다. 모든 대학에서는 최첨단 수업방식을 원하고 있습니다. 응용 수학에 대한 지도는 교사 임용에 있어서도 비중있는 역할을 차지해야 합니다. 그래야만 교사지원자들은 장차 발전가능성을 볼 수 있고 그만큼 노력할 가치를 두게 됩니다(Klien, 1902).

어떤 교육 개혁이든지 실제 학교 현장에서 수업을 담당하고 있는 교사가 변화하지 않으면 그 개혁은 실현되기 어렵다. 이는 새수학 운동의 실패에서도 엿볼 수 있다. 교육의 개혁을 추진할 때 교사를 위에서부터 하달되는 지시를 이행하는 수동적인 존재로 인식해서는 바람직한 결과를 얻기 어렵다. F. Klein은 수학교육 개혁을 하면서 그 중심에 교사를 두고 예비교사 및 교사 재교육을 수행함으로써 학교 수학에 새로운 내용의 도입과 그의 수학교육 이념을 실현할 수 있었던 것이다.

근세 이후 수학을 바탕으로 한 과학기술이 발전하면서 수학의 실용적 측면의 중요성이 점차 커지게 되었다. 여러 가지 생활문제의 해결 및 과학기술 개발에서 수학의 유용성은 의문의 여지가 없는 것으로 간주되었고 이것이 오늘날 수학이 대중교육 중 필수교과로 만든 주요한 원인이라 할 수 있을 것이다. 그러나 모든 국민이 수학자나 과학자나 고급 기술자가 되는 것이 아니라면 일반 국민에게 어떤 점에서 수학교육의 교육적 가치를 주장하며 어떤 방식으로 해 나아가야 할 것인가를 고민하지 않을 수 없다. 현재 우리나라에서는 '창의적 인재 육성'이라는 교육목표에 부응하여 새로운 수학과 교육과정 개정 사업을 추진하고 있다. 특히 수학적 창의성, 인성을 강조하고 수학적 과정을 강화하는 것이 변화된 내용 중 하나이다. F. Klein은 이미 과거의 인물이며 그가 이루어 놓았던 것들 역시 과거의 일이지만 지속적인 교육과정 개정이 이루어지는 시점에서 올바른 학교수학의 이념을 추구하고 실천하는데 시사점과 반성하는 기회를 주고 있다.

참고 문헌

1. 강현영, 「심성함양으로서의 수학교육」, 경문사, 2008.
2. 김성숙, 김주영, 펠릭스 클라인의 수학과 교육 개혁, 한국수학사학회지 17(2004), 4호, 77–86.
3. 이상구, 함윤미, 실버스터와 클라인 그리고 19세기 미국 수학, 한국수학사학회지 19(2006), 2호, 77–88.
4. 창의 중심의 수학과 교육과정 개정 시안 연구(2011), 대한수학교육학회 62회 집중세미나.
5. Coleman, R, The development of informal geometry, Teachers college, *Columbia university contributions to education*, no. 865(1942).

6. F. Klein, 'Erlanger Antrittsred,' A Transcription with English Translation and commentary(1872), D E. Rowe, *Historia Mathematica* 12(1985), 123–141.
7. F. Klein, *Lectures on Mathematics*, Macmillan & Company, 1894.
8. F. Klein, Aber den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 11(1902), 128–141.
9. F. Klein, Der Meraner Lehrplan für Mathematik(1905), *Vorträge über den Mathematischen Unterricht an den Höheren Schulen*, F. Klein and R. Schimmack, Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner(1907), 213–220.
10. F. Klein , Elementary Mathematics; From an advanced standpoint(1939), *Arithmetic · Algebra · Analysis*, New York: Dover Publication.
11. F. Klein and R. Schimmack, *Vorträge über den Mathematischen Unterricht an den Höheren Schulen*, Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1907.
12. Freudenthal, H, *Diactical Phenomenology of mathematical Structures*, Dordrecht: D.Reidel Publishing Company. 1983.
13. McComas. K. K., *Felix Klein and the NCTM's standards—A mathematician considers mathematics education*, Mathematics teacher, vol.93, no. 8(2000), 714-717.
14. Pyenson, L.,*Neohumanism and the persistence of Pure Mathematics in Wilhelmian Germany*, American Philosophical Society. 1983.
15. Rowe. D. E., A Forgotten chapter in the History of Felix Klein's Erlanger Programm, *Historica Mathematica* 10(1983), 448-457.
16. Rowe. D. E., Felix Klein's Erlanger Antrittsrede; A Transcription with English Translation and commentary, *Historia Mathematica* 12(1985), 123-141.
17. Schubring, G., *Pure and Applied Mathematics in Divergent Institutional Settings in Germany: The Role and Impact of Felix Klein*, *The History of Modern Mathematics*, San Diego: Academic press, INC. 1989.

강현영 목원대학교 수학교육과
Department of Mathematics education, Mokwon University
E-mail: hykang@mokwon.ac.kr