한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제2호 (2011년 5월), 61–70

리이만의 생애와 그의 업적에 대한 역사적 소고

A Historical Note on Riemann's life and Achievement

한길준 Giljun Han

본 논문에서는 해석학, 기하학, 정수론, 위상수학, 수리물리학 등 수학의 거의 모든 분야에서 훌륭한 업적을 창출하여 현대의 수학에 가장 큰 영향을 미친 위대한 수학자 중에 하나인 독일의 수학자 리이만(Bernhard Riemann, 1826~1866)의 생애와 그가 이룬 업적을 살펴보고, 리이만 방정식에 대하여 고찰한다.

Bernhard Riemann(1826–1866) is one of the best researchers in almost all branches of mathematics including analysis, geometry, number theory, topology and mathematical physics. In this paper, we survey the Riemann's life and achievements. In addition, we introduce the Riemann 's equation.

Keywords: 리이만(Riemann), 리이만 방정식(Riemann's equation), 리이만 기하(Riemann geometry), 리이만 적분(Riemann integral)

1 서론

본 논문에서는 현대의 수학에 가장 큰 영향을 끼친 수학자 중에 하나인 독일의 수학자 리이만(Bernhard Riemann)의 생애와 그가 이룬 업적에 대하여 살펴본다. 또한 그의 삶에 있어서 당대 또는 그 선대의 위대한 수학자들인 가우스(Gauss), 오일러(Euler), 르장드르(Legendre), 디리클레(Dirichlet), 야코비(Jacobi) 등으로부터 어떠한 영향을 받았는지도 이 논문에서 언급한다. 비록 리이만은 39세의 짧은 생애를 살았고 다른 뛰어난 수학자들과 비교했을 때 많은 양의 논문을 발표하지는 않았지만 그의 연구는 해석학, 기하학, 정수론 분야를 막론하고 수학의 거의 모든 분야로 끊임없이 변화했다. 특히 기하학에서 그가 남긴 가장 뛰어난 업적은 "기하학의 바탕이 되는 가설"이라는 논문을 통해 유클리드 기하학이나 비유클리드 기하학과는 다른 "리이만 기하학"이라는 분야를 정립한 것이다. 이는 60년 후에 아인슈타인의 상대성 이론의 중요한 골격을 이루게 된다. 이와 같이 현대의 고등수학에서 리이만이 남긴 업적의 중요성은 아무리 강조해도 지

이 연구는 2010학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음.
MSC: 01A55, 01A70, 01A60 ZDM: A3D3O
제출일: 3월 25일 수정일: 5월 3일 게재확정일: 5월 7일

나치지 않는다.

따라서 비록 세세히 다루지는 못하였지만 위대한 수학자 리이만의 생애와 그가 남긴 업적을 연구 조사하여 논문으로 발표하는 것은 오늘날 수학을 공부하는 후학들이 위대한 수학자가 지니고 있는 수학에 대한 열정, 수학을 보는 시각, 새로운 문제를 접했을 때 사고하고 연구하는 태도 그리고 실제로 남긴 업적 등을 조금이나마 간접적으로라도 살펴볼 수 있는 기회를 가질 수 있다는 측면에서 상당히 의미 있는 작업이라고 생각된다. 또한 이는 수학사적인 측면에서도 역사상 가장 위대한 수학자 중의 한 사람의 삶을 되짚어보고 그가 남긴 업적의 역사적 흐름을 살펴본다는 측면에서 매우 중요한 의미를 가질 수 있다고 판단된다.

이 논문은 크게 다섯 절로 나누어 둘째 절에서는 리이만의 생애에 대하여 간단히 살펴보고 그의 생애에서 다른 위대한 수학자와의 연관성에 대하여 살펴본다.

또, 셋째 절에서는 리이만이 관심을 가졌던 문제들과 그가 이루었던 업적을 살펴본다. 넷째 절에서는 리이만이 제시한 리이만 방정식(Riemann's equation)에 대하여 살펴보고, 다섯째 절에서 이 연구의 결론을 제시한다.

2 리이만의 생애

리이만(Bernhard Riemann)은 1826년에 동부 독일의 가난한 시골 성직자의 아들로 태어났다. 수학을 공부하는 사람들 중에는 그가 현대의 수학에 가장 큰 영향을 끼친 수학자중 하나라는 사실을 의심하는 사람은 거의 없을 것이다. 그는 이미 고등학교 시절에 그 이전의 위대한 수학자인 오일러(Euler)와 르장드르(Legendre)의 업적을 연구했으며, 특히 르장드르의 수론에 관한 전문서적을 일주일 만에 독파했다고 알려질 정도로 뛰어난 수학적 능력을 가지고 있었다. 그러나 그는 자기 자신의 비범함을 거의 알지 못할 정도로 소심하고 겸손했다. 결국 그는 신학을 공부해 성직자가 되어 그의 아버지를 기쁘게 할 목적으로 19세의 나이에 괴팅겐 대학에 들어가게 된다. 다행스럽게도 그는 곧 이러한 그의 목적에 염증을 느끼고 그의 아버지의 허락을 받아 수학으로 진로를 바꾸기에 이른다. 그 당시 괴팅겐 대학은 전설적인 수학자 가우스가 있었고 그의 존재만으로도 세계 수학의 중심을 이루고 있었다. 그러나 수학을 처음 시작하는 리이만과 같은 학생에게 가우스는 너무나 멀고 범접하기 어려운 존재였다. 결국 그는 1년 후 이러한 만족스럽지 못한 환경을 떠나 베를린 대학으로 가게 된다. 그 곳에서 그는 수학자 디리클레(Dirichlet)와 야코비(Jacobi)를 만나 그들로부터 많은 것을 배우게 된다. 1849년 괴팅겐 대학으로 다시 돌아와 2년 후인 1851년 그는 박사학위를 수여 받는다. 그 후로 8년 동안 그는 심신이 허약해질 정도의 가난을 겪게 되며 또한 그 시기에 그는 위대한 업적을 창출해 낸다. 1854년 그는 괴팅겐 대학에서 학자로서의 첫 단계인 봉급이 지급

되지 않는 강사직(Privatdozent) 제의를 약속 받는다. 가우스가 1855년 사망하고 그의 후임으로 온 후 디리클레는 그가 할 수 있는 모든 방법을 동원하여 리이만에게 도움을 주지만 그 역시 1859년에 사망하고 리이만이 그를 대신하여 정교수로 부임하게 된다. 그러나 계속되는 가난으로 리이만은 결국 그의 건강을 해치게 되어 1866년 39세의 나이에 이태리에서 결핵으로 사망한다. 리이만은 짧은 생애 동안 다른 위대한 수학자에 비해서는 비교적 적은 양의 업적을 발표했지만 그의 업적은 현재 수학의 거의 모든 분야에 영향을 미치고 있고 미래에도 매우 중요한 수학적 사실로 영구히 남아있을 것이다[3].

3 리이만의 업적

리이만의 첫 번째 논문은 1851년에 박사학위 논문으로 작성한 복소 변수 함수의 일반이론에 대한 논문이다[1]. 이 논문에서 그는 (x, y) 평면을 (u, v) 평면 위에 등각적(等角的)으로 사상(寫像)시켜, 한 평면 위의 임의의 단일연결역(單一連結域)이 다른 평면 위의 임의의 단일연결역으로 변형될 수 있는 함수의 존재를 증명하였다. 이것은 아벨리안함수(Abelian function)에 관한 논문으로, 위상수학적 고찰을 해석학으로 도입한 리이만 면(Riemann surfaces)의 개념으로 유도한 것이다. 복소함수론에서의 연구에서 리이만은 유체역학적 고찰에 의해 수학의 다른 많은 영역과 복소함수론 사이에 광범위한 유사성이 있음을 보여주었으며 이로 인해 그는 복소함수의 기하학적인 이론의 기초를 닦아놓게 된다. 그는 코오시–리이만 방정식(Cauchy-Riemann equations)이라고 부르는 이론을 정립하였고 다가함수의 성질을 명확히 하기 위해 독창적인 리이만 면의 도구를 만들었으며 이로부터 리이만의 사상 정리를 이끌어내었다. 가우스는 그의 수학적 업적에 대하여 겉으로는 거의 관심을 갖지 않은 듯 보였지만 그의 공식적인 리포트에는 리이만의 업적에 대한 평가를 다음과 같이 하고 있다.

> "리이만이 제출한 논문으로부터 나는 그가 창조적이고 활동적이며 확실한 수학적 마인드를 가지고 연구하여 논문에서 다루어지는 주제가 매우 훌륭한 독창성을 가지고 있다는 것에 대해서 의심의 여지가 없다고 판단된다."

그 후에도 리이만은 초기하적(hypergeometric)이고 아벨리안함수의 연구에 그의 이론을 적용한다. 그는 해석학과 기하학사이의 연결을 위하여 리이만 면을 이용하였는데 이는 복잡한 함수의 해석적 성질에 대한 기하학적 표현을 가능하도록 했다. 또한 그의 강력한 직관은 그로 하여금 여러 성질을 발견하도록 하였는데, 단순히 폐평면(closed surfaces)의 가능한 형상을 생각하여 이들 평면위에 가상의 물리학적 실험을 수행함으로써 얻은 리이만–로크 정리 (Riemann-Roch theorem) 에 대한 견해가 한 예이다. 복소해석학에서 리이만의 기하학적 방법들은 위상수학의 진정한 출발의 한 구성요소가 되었다.

1854년 리이만은 봉급이 지급되지 않는 강사직(Privatdozent)을 인정받기 위한 시험적인 에세이를 제출할 것을 요구받고 이 시대의 수학에 지워지지 않는 족적을 남기는 또 다른 의미심장한 업적으로 응답한다[3]. 그가 스스로 세운 문제는 함수를 푸리에 급수(Fu-rier series)로 표현하기 위한 디리클레의 조건들(Dirichlet's conditions, 1829)을 분석하는 것이었는데, 이러한 조건들 중에 하나는 함수가 적분가능해야만 한다는 것이었다. 디리클레는 적분가능성과 관련하여 코오시의 정의를 사용하였는데, 이것은 연속이거나 유한개의 불연속점을 가지고 있는 함수에만 적용된다는 것이다. 리이만은 이 정의가 확장될 수 있다고 주장하였다. 이 적분의 정의는 함수가 적분가능하다는 것이 무엇을 뜻하는지를 나타낸 것이다. 다음은 리이만이 제시한 리이만 적분가능한 함수의 정의이다.

정의 3.1: [2] 함수 f가 폐구간 $I = [a, b]$에서 실수집합 R로 가는 유계함수라고 하자. 이때 f가 $[a, b]$에서 리이만 적분가능하다는 것은 다음을 뜻한다.

$L(f) = U(f)$, 여기서 $L(f) = \sup\{L(P; f) \mid P \in P(I)\}$, $U(f) = \inf\{U(P; f) \mid P \in P(I)\}$이고, $P(I)$는 구간 I의 모든 분할들의 집합, $L(P; f)$와 $U(P; f)$는 각각 분할 P에 대응되는 f의 상합(upper sum)과 하합(lower sum)을 의미한다. 이때, 구간 I에서 함수 f의 적분값은 $L(f) = U(f)$이며 $\int_a^b f$ 또는 $\int_a^b f(x)dx$로 표기한다.

그는 오늘날 대부분의 미적분학 교재에서 나타나는 리이만 적분의 개념을 발전시켰고 적분의 가능함수에 대한 판정법을 제시하였으며 푸리에 확장의 허용성에 대한 디리클레의 기준을 일반화시켰다. 이러한 그의 선구자적인 연구는 르벡 적분(Lebesgue integral)의 개념으로 전환되어 좀 더 일반화된 형태의 적분을 이끌어내는 계기를 만들었고 더 나아가 또 다른 새로운 영역의 수학, 실변수함수론의 첫 단계가 되었다. 리이만이 제시한 적분가능함수의 판정법은 다음과 같다.

정리 3.1 (리이만의 적분가능함수 판정법): [2] 함수 f가 폐구간 $[a, b]$에서 실수집합 R로 가는 유계함수라고 하자. 이때 f가 $[a, b]$에서 적분가능하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다. 각각의 $\epsilon > 0$에 대하여, $U(P_\epsilon; f) - L(P_\epsilon; f) < \epsilon$을 만족시키는 $[a, b]$의 분할 P_ϵ이 존재한다.

또한 리이만은 조건부 수렴급수에서 급수의 항의 순서가 바뀜으로써 그 합이 달라질 수 있다는 것을 보여주는 디리클레의 예에 정통했다. 예를 들어,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = \log 2 \tag{1}$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2}\log 2 \tag{2}$$

에서 두 급수는 서로 같은 항을 갖고 있으나 그 합은 서로 다르다는 것을 알 수 있다. 급수 (2)는 급수 (1)의 항의 순서를 재배열하여 급수 (1)에서 제일 먼저 나오는 두 개의

양수인 항을 쓰고 난 후 바로 다음에 제일 먼저 나오는 한 개의 음수항을 쓴다. 또, 그 다음에 나오는 두 개의 양수인 항을 쓰고 두 번째 나오는 음수항을 쓰는 식으로 항을 재배열 한 것이다. 리이만은 임의의 조건부 수렴급수는 항을 재배열하여 그 새로운 급수가 임의로 지정한 합으로 수렴하거나 ∞ 또는 $-\infty$ 로 발산하도록 하는 것이 가능하다는 것을 증명하였다.

리이만은 Privatdozent에 채용되기 위하여 시험적인 에세이 제출이외에 학과의 교수단 앞에서 시험 강의를 할 것을 요구 받는다. 채용 대상자는 세 가지 주제를 제출하는 것이 관례이고 학과의 장은 대개 제출된 세 가지 주제 중 첫 번째 것을 받아들인다. 그러나 리이만은 성급한 나머지 가우스가 60년 동안 숙고해 왔고 그가 전혀 준비하지 못했던 심오한 주제인 기하학의 기초를 세 번째 주제로 제출하게 된다. 당연히 가우스는 이 특별한 채용 대상자의 훌륭하고 창의력이 풍부한 독창성이 어떻게 도전에 맞서는지, 기하학의 기초를 지정했다는 사실에 호기심을 가졌다. 리이만은 재빨리 그 당시의 자신의 다른 관심 분야를 뿌리치고 떠나서 그 후 두 달 동안 강의 원고를 쓴다.

그 결과물은 수학의 가장 위대한 걸작품 중 하나였으며 아마도 그것은 그때까지 가장 중요한 과학 강의 원고라고 알려져 있다[4]. 심지어 가우스도 그 결과에 놀라 열광했다고 알려진다. 리이만의 강의는 비전문적인 언어로 모든 알려진 기하학, 유클리드와 비유클리드의 방대한 일반화를 제공하였다. 이 분야는 현재 리이만 기하학이라고 불리우고 있으며, 순수 수학에서의 대단한 중요성은 별 문제로 하고, 그것은 60년 후에 아인슈타인의 상대성 원리의 확실한 골격으로 판명되었다. 과학의 중대한 아이디어의 대부분처럼 만일 우리가 기술적 세부사항을 무시하고 핵심적인 면에만 집중한다면 리이만 기하학은 이해하기에 아주 쉽다.

가우스가 25년 일찍 발견한 곡면의 미분기하학을 생각해 보자. 3차원 공간에 있는 면이 세 개의 함수, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$에 의해 매개변수를 사용하여 정의된다면 u와 v는 면에 있는 점의 좌표로 설명된다. 두 개의 인접한 점 (u,v)와 $(u+du, v+dv)$사이에 있는 면을 따른 거리 ds는 가우스의 이차 미분 형식인

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

으로 주어진다. 여기서 E,F,G는 u,v에 대한 적당한 함수를 의미한다. 이 미분 형식은 면의 곡선의 길이를 계산하고, 측지선 또는 가장 짧은 곡선을 발견하고, 어떤 점—면을 둘러싸고 있는 것을 전적으로 무시한 모든 점—에서의 면의 가우스 곡률을 계산하는 것을 가능하게 해준다. 리이만은 둘러싸고 있는 유클리드 공간의 아이디어를 버리고, 점들 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$의 연속 n차원 집합체의 개념을 소개함으로써 이것을 일반화하였다. 이 일반화를 통해 인접한 점들 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$과 $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \cdots, x_n + dx_n)$

사이의 임의로 주어진 거리 ds를 이차 미분형식인

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i dx_j \tag{3}$$

으로 생각할 수 있다. 여기서 g_{ij}는 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 적당한 함수이고, g_{ij}의 다른 체계는 논의되고 있는 다양체 위에서의 다른 리이만 기하학을 정의한다. 다음 단계는 이러한 리이만 집합체에 대한 곡률의 개념을 고찰하고, 일정한 곡률의 특별한 경우를 연구하는 것이다. 이 연구는 용량이 큰 컴퓨터에 의존해야 해서 그의 논문에는 포함되어 있지 않지만 사후에 출판된 열전도 논문에는 이 내용이 포함되어 있다. 그 논문에서 그는 리이만 곡률 텐서가 $n = 2$일 때 가우스 곡률로 축소되고, 주어진 이차 거리가 유클리드 거리와 같기 위해서는 리이만 곡률 텐서가 0이 되는 것이 필요충분조건이라는 것을 보여주었다고 명확하게 소개하고 있다. 이러한 관점으로부터, 곡률 텐서는 유클리드 기하학으로부터 공식(3)에 의해 정의된 리이만 기하학과의 편차를 측정한다. 아인슈타인은 이러한 생각을 다음과 같이 하나의 문장으로 요약하였다.

> "n-차원 공간의 리이만 기하학은 곡면의 일반 기하학으로서의 평면기하학을 만들어내는 n-차원 공간의 유클리드 기하학과 유사한 관계를 갖고 있다."

측지선의 물리학적 중요성은 편차의 미적분학에 있어서 해밀턴의 원리에 따르는 결과로서 가장 간단한 형태로 나타난다. 만일 극히 작은 조각이 부득이 곡면 위로 움직인다면, 그리고 만일 그 위에 아무 힘도 가하지 않는다면, 그것은 측지선을 따라 미끄러지듯 나아간다. 이 아이디어의 직접적인 확장은 일반 상대성 이론의 핵심이다. 그리고 그것은 본질적으로 중력 이론이다. 아인슈타인은 곡률과 측지선이 물질의 분포에 의해 결정된다는 리이만 기하학으로서 공간 기하학을 착상하였다. 이 곡면에서 행성들은 그 본질을 아무도 제대로 이해하지 못했던 중력의 불가사의한 힘에 의해 곡선 경로로 끌어당기는 대신에 간단하게 측지선을 따라 관성으로 비행함으로써 태양 주위를 그들의 궤도 안에서 운동한다.

1859년에 리이만은 소수 정리에 노력을 기울인 10쪽 이하의 간단하나 대단히 심오한 논문인 수 이론의 논문을 출판하게 된다[3]. 이것은 순수 수학의 여러 지류에 있어서 조수와 같은 물결을 일으키려고 노력한 것으로 판단된다. 이 영향은 아마도 지금으로부터 수세기 동안 느끼게 될 것이다. 이 논문은 오일러가 한 세기 전에 발견한 주목할 만한 항등식으로부터 출발하며 그 내용은 다음과 같다.

만일 s가 1보다 큰 실수이면 다음 등식이 성립한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \tag{4}$$

우변에 있는 표현은 모든 소수 p에 대하여 $(1+p^{-s})^{-1}$의 곱을 나타낸다. 이러한 등식이 어떻게 성립하는지 이해하기 위하여, $|x|<1$에 대하여 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$ 라고 표현하면 각각의 p에 대하여 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots$$

모든 소수 p에 대하여 이러한 급수를 곱하고, 각각의 정수 $n>1$이 서로 다른 소수의 거듭제곱의 곱으로 유일하게 표현할 수 있다는 것을 상기하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} =&\prod_p \left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)\\ =&1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots\\ =&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\end{aligned}$$

이것이 등식(4)이다. (4)의 좌변에 있는 급수의 합은 실변수 $s>1$의 함수이고, 이 등식은 이 함수의 행동과 소수의 성질 사이의 관계를 확립한다. 오일러는 여러 가지 방법으로 이 관계를 활용하였다. 그러나 리이만은 소수분포의 심오한 특성들은 s가 복소변수일 때에만 얻어질 수 있다는 것을 감지하였다.

그는 결과적으로 얻어진 함수 $\zeta(s)$, 리이만 제타 함수를 아래와 같이 표기하였다.

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots,\quad s=\sigma+it$$

논문에서 그는 이 함수에 대한 여러 가지 성질들을 증명하였는데 간단한 내용은 증명 없이 언급하였다. 그의 사후에 많은 유명한 수학자들은 그가 언급한 명제들을 증명하기 위한 많은 시도를 함으로써 해석학의 새로운 분야에서 풍부한 결과물을 이끌어냈다. 첫 번째 성공은 J. Hadamard에 의해 1893년에 이루어졌는데, 리이만이 예상했던 하나의 예외를 제외하고 모든 명제가 해결되었다[6]. 이 예외가 유명한 리이만 가설(Riemann hypothesis)인데, 이는 $0\le\sigma\le1$에서 $\zeta(s)$의 모든 영점들은 중간선인 $\sigma=\frac{1}{2}$ 위에 놓여 있다는 것이다. 이것은 오늘날 가장 중요한 미해결 수학 문제로 남아있는데, 이는 아마도 사람들의 마음에 이해하기 가장 어려운 문제로 놓여 있을 것이다. 사후의 알려진 그의 논문 중에서 발견된 단편적인 메모에서 리이만은 이러한 정리들은 "출판하기에 충분히 단순화하지 못한 함수 $\zeta(s)$에 대한 표현으로부터 나온다." 라는 문구가 발견된다. 1944년에 이러한 단편들에 대해 Hadamard는 격분하여 "우리는 아직까지 어떤 표현을 할 수 있을지에 대한 가장 최소한의 아이디어도 가지고 있지 않다."과 같이 언급한다. 또, 그는 덧붙여 "일반적으로 리이만의 직관적 통찰은 대단히 기하학적이나 이것은 소수에 대한 그의 회고록의 경우가 아니라 그 직관적 통찰이 가장 강력하고 불가사의한 것

이라는 것이다."고 논평한다.

리이만은 인생의 말년에는 베버(W. E. Bebber)의 영향을 방아서 이론물리학에 흥미를 갖고 물리학에서 자주 사용하는 편미분방정식을 강의하기도 한다.

4 리이만 방정식

이 절에서는 리이만 방정식(Riemann's equation)에 대하여 알아본다[3, 5]. 먼저, 가우스 초기하 방정식(Gauss's hypergeometric equation)을 살펴보자.

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{5}$$

식 (5)는 세 개의 정규특이점(regular singular point) $x=0$, $x=1$, $x=\infty$을 갖고, 각 점 $x=0$과 $x=1$에서 그 값이 0인 적어도 하나의 지수를 갖는다. 한편, 식 (5)는 다음과 같은 형태이다.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{6}$$

위의 식 (6)에서 $t = \frac{1}{x}$로 치환하면 식 (6)은 다음과 같다.

$$y'' + \left[\frac{2}{t} - P\Big(\frac{1}{t}\Big) - t^2\right]y' + \frac{Q(\frac{1}{t})}{t^4}y = 0 \tag{7}$$

이제 식 (6)이 $x=0$, $x=1$, $x=\infty$라는 정규특이점을 갖고 나머지 점들은 특이점이 아니라고 가정하면 $xP(x)$는 $x=0$에서 해석적이고 $(x-1)P(x)$는 $x=1$에서 해석적이며 $x(x-1)P(x)$는 모든 유한값 x에서 해석적이다. 즉,

$$x(x-1)P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{8}$$

이다. 여기서 $x = \frac{1}{t}$로 치환하면 식 (8)은 다음과 같다.

$$\frac{1}{t}\Big(\frac{1}{t}-1\Big)P\Big(\frac{1}{t}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big(\frac{1}{t}\Big)^n$$

따라서

$$\frac{1}{t}P\big(\frac{1}{t}\big) = \frac{t}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(\frac{1}{t}\big)^n = \frac{1}{1-t}\big(a_0 t + a_1 + \frac{a_2}{t} + \cdots\big)$$

이다. 한편, $x=\infty$는 (6)의 정규특이점이므로 이 함수는 $t=0$에서 해석적이다. 따라서 $a_2 = a_3 = \cdots = 0$이고 (8)은 다음과 같이 표현된다.

$$P(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \tag{9}$$

여기서 A와 B는 상수이다. 비슷한 방법으로 $x^2(x-1)^2Q(x)$는 모든 유한값 x에서 해석적이므로

$$x^2(x-1)^2Q(x) = \frac{1}{t^2}\Big(\frac{1}{t}-1\Big)^2 Q\Big(\frac{1}{t}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big(\frac{1}{t}\Big)^n$$

이고,

$$\frac{1}{t^2}Q\Big(\frac{1}{t}\Big) = \frac{t^2}{(1-t)^2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{(1-t)^2}\Big(b_0t^2+b_1t+b_2+\frac{b_3}{t}+\cdots\Big) \tag{10}$$

이다. 앞의 가정에서 $x=\infty$는 (6)의 정규특이점이므로, (10)은 $t=0$에서 해석적이고 따라서 $b_3=b_4=\cdots=0$이고 $Q(x)$는 다음과 같다.

$$Q(x) = \frac{b_0+b_1x+b_2x^2}{x^2(x-1)^2} = \frac{C}{x}+\frac{D}{x^2}+\frac{E}{x-1}+\frac{F}{(x-1)^2} \tag{11}$$

한편, (10)은 $t=0$ 근방에서 유계, 즉 $x^2Q(x)$는 큰 값 x에 대하여 유계이므로 $x^2\big(\frac{C}{x}+\frac{E}{x-1}\big) = x^2\big[\frac{(C+E)x-C}{x(x-1)}\big]$도 유계이고 $C+E=0$다. 따라서 (11)은 다음과 같이 표현된다.

$$Q(x) = \frac{D}{x^2}+\frac{F}{(x-1)^2}-\frac{C}{x(x-1)} \tag{12}$$

따라서 (6)는 다음과 같은 형태를 취한다.

$$y''+\Big(\frac{A}{x}-\frac{B}{x-1}\Big)y'+\Big[\frac{D}{x^2}+\frac{F}{(x-1)^2}-\frac{C}{x(x-1)}\Big]y=0 \tag{13}$$

이제, 정규특이점 0, 1, ∞에 속하는 지수를 각각 α_1과 α_2, β_1과 β_2, γ_1과 γ_2라 하면 다음이 성립한다.

$$m^2+(A-1)m+D=0,$$
$$m^2+(B-1)m+F=0,$$
$$m^2+(1-A-B)m+(D+F-C)=0$$

따라서 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\alpha_a+\alpha_2 &= 1-A, \quad \alpha_1\alpha_2=D,\\ \beta_1+\beta_2 &= 1-B, \quad \beta_1\beta_2=F,\\ \gamma_1+\gamma_2 &= A+B-1, \quad \gamma_1\gamma_2=D+F-C\end{aligned} \tag{14}$$

즉,

$$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1 \tag{15}$$

이다. 따라서 (14)를 이용하면 (13)에서 다음과 같은 리이만 방정식(Riemann's equation)을 얻는다.

$$y'' + \left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{x} + \frac{1-\beta_1-\beta_2}{x-1}\right)y' + \left[\frac{\alpha_1\alpha_2}{x^2} + \frac{\beta_1\beta_2}{(x-1)^2} + \frac{\gamma_1\gamma_2-\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}{x(x-1)}\right]y = 0 \quad (16)$$

5 결론

리이만은 "기하학의 바탕이 되는 가설"이라는 논문을 통해 유클리드 기하학이나 로바체프스키에 의해 발견된 비유클리드 기하학과도 다른 "리이만 기하학"이라는 분야를 정립하여 60년 후에 아인슈타인의 상대성 이론의 중요한 골격을 이루게 하는 등 위대한 업적을 창출한 19세기의 수학자이다. 본 논문에서는 비교적 짧은 생애를 살았고 발표한 논문의 수는 다른 위대한 수학자와 비교하면 그 양이 많지 않지만 수학의 거의 모든 분야에서 획기적인 업적을 남긴 수학자 리이만의 생애와 그가 창출해 낸 대표적인 업적을 살펴보았다. 특히, 그의 생애에서 선대의 위대한 수학자 가우스(Gauss), 오일러(Euler), 르장드르(Legendre), 디리클레(Dirichlet), 야코비(Jacobi) 등으로부터 수학적으로 어떠한 영향을 받았는지 연구·조사 하였다. 또한 해석학에서 그가 남긴 적분가능함수에 대한 정의 및 적분가능함수의 판정법에 대하여 살펴보았으며, 리이만 방정식에 대하여도 살펴보았다. 본 논문을 통하여 독자들이 현대의 고등수학에서 리이만이 남긴 업적의 중요성을 파악하는데 조금이나마 가교 역할을 할 수 있기를 기대한다.

참고 문헌

1. *Grundlagen fur eine Allgemeine, Theorie der Functionen einer veranderlichen complexen Grosse*, in Werke, pp. 3–43.
2. R. G. Bartle & D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 1992.
3. G. F. Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, McGraw-Hill, New York, 1991.
4. D. E. Smith, *A source Book in Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1929.
5. E. D. Rainville, *Intermediate Differential Equations*, Macmillan, New York, 1964.
6. E. C. Titchmarsh, *The Theory of Riemann Zeta Function*, Oxford University Press, London, 1951.

한길준 단국대학교 수학교육과
Department of Mathematics Education, Dankook University
E-mail: gilhan@dankook.ac.kr