한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제2호 (2011년 5월), 17–30

카발리에리 원리의 생성과정의 특성에 대한 고찰

A Study on the Characteristic of Formation of Cavalier's Principle

박선용* Sun Yong Park

이 연구에서는 카발리에리가 제시한 두 가지 불가분량법 사이의 전환에 대해 고찰한다. 불가분량법 사용에 대한 반대에 대응하기 위해, 카발리에리는 그가 처음 제시했던 불가분량법을 수정하였다. 이 과정에 대한 분석을 통해, 이 연구에서는 카발리에리가 불가분량과 관련된 패러독스를 피하기 위해 도형의 밀도를 반영하는 방향으로 불가분량법을 바꾸었다는 면과 함께, 라카토스의 이론에 근거해, 이러한 전환이 불완전한 보조정리 합체법으로서의 특징을 지니고 있음을 밝힌다.

This study inquires into the change between two method of indivisibles, which Cavalier suggested. To cope with the objection of use of indivisibles, he modified his first method of indivisibles. Through the analysis of this transition, this study reveals the feature that Cavalier changed into reflecting the density of the figures so as to avoid the paradox related to the indivisibles and this change has the aspect of incomplete lemma-incorporation method according to Lakatos' theory.

Keywords: 카발리에리의 원리(Cavalier's principle), 불가분량(indivisibles).

1 서론

고대로부터 새로운 도형의 넓이나 부피를 구함에 있어 복잡한 계산 대신에 발견술적 도구인 불가분량을 이용하는 방법이 사용되어 왔다. 카발리에리(1598 ~ 1647)는 이러한 불가분량법을 사용한 17세기의 수학자로서 널리 알려져 있다.

카발리에리의 불가분량법에 대한 연구는 일부 수학사학자와 이탈리아 학자들 사이에서 제한된 형태로만 이루어져왔다. 심지어, 그의 대표저작인 1635년의 〈불가분량의 기하학〉의 번역 작업만 하더라도, Evans[7], Smith[16] 등에 의해 일부 내용만이 영어로 번역되어 학계에 알려지다가 1966년에 이르러 Lombardi-Ladice에 의해 비로소 현대 이탈리어로 번역될 정도였다. 또한, 카발리에리의 〈불가분량의 기하학〉, 〈여섯 개의 기

* 교신저자
이 연구는 2011학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임
MSC: 01A20 ZDM: A30
제출일: 3월 8일 수정일: 4월 16일 게재확정일: 5월 6일

하학 문제〉(1647년)에서 사용된 언어는, 어려운 책으로 최고상을 줄 수 있다는 악명을 가질 정도로, 매우 난해한 것으로 알려져 있다. 이러한 상황 속에서, 카발리에리의 불가분량법 대한 연구는 그 유명도에 비해 잘 이루어지지 않았던 것이다[1, 8].

그런데 최근 Anderson[1], Giusti[11], Mancosu[14]의 연구에 의해 카발리에리의 불가분량법에 대한 몇몇 새로운 면들이 드러나게 되었다. 특히, 이 새로운 연구들은, 카발리에리가 연속체를 불가분량의 총합[1])으로 간주한 것이 아니며 불가분량법에 단지 양의 이론을 접목하려 했고 그가 두 가지 불가분량법을 사용했다는 점을 밝히면서, '카발리에리의 원리'로 알려진 두 번째 불가분량법의 최초 모습인 첫 번째 불가분량법을 수학사학계에 널리 전파했다고 할 수 있다.

하지만 이들 연구에서는 첫 번째 불가분량법에서 두 번째 불가분량법으로의 전환이 어떤 의미가 있는지에 대한 충분한 논의가 이루어지지 않았다고 볼 수 있다. 첫 번째와 두 번째 불가분량법 사이의 차이와 그 전환 자체에 대해서는 다루었지만 그 전환의 성격에 대한 수학사적 고찰이 이루어지지 않았던 것이다. 이런 점에 주목해, 본 연구에서는 카발리에리가 불가분량법의 전환을 시도했던 의도를 규명하면서 그 전환의 성격을 규정짓고자 하였다.

2 카발리에리의 두 가지 불가분량법

카발리에리는, 어떤 기준(regula)에 평행하게 움직이는 선(또는 면)의 수직적 이동(rectilinear transit)에 의한 도형과의 교차선(또는 면)을 통해, '도형 F의, 어떤 기준(기준선)에 평행한, 모든 선분' 또는 '입체 S의, 어떤 기준(기준면)에 평행한, 모든 면'이라는 개념을 도입하였다. 그 각각에 대해, Anderson[1]은 $O_F(l)$와 $O_S(p)$라는 현대적 기호를 붙였는데, 이 연구에서도 카발리에리의 불가분량법을 분명하게 드러낼 수 있도록 Anderson의 표현 체계를 사용한다.

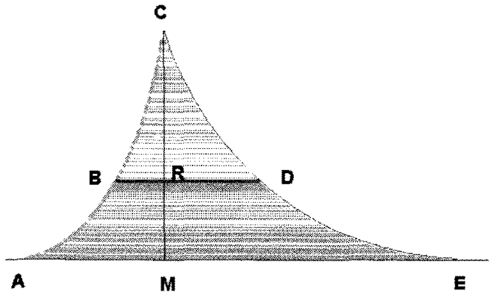
카발리에리의 첫 번째 불가분량법은 〈불가분량의 기하학〉 2권의 명제3에서 나타나는데[2]) 다음과 같이 두 도형, 두 입체를 그 불가분량의 총합의 비에 의해 서로 비교하는 방식이다.

$$F_1 : F_2 = O_{F_1}(l) : O_{F_2}(l), \quad S_1 : S_2 = O_{S_1}(p) : O_{S_2}(p).$$

이 첫 번째 방법의 두 가지 특징에 주목할 필요가 있다. 우선, 카발리에리는 어떤 도형을 그보다 한 단계 낮은 차원의 도형으로 구성된 것으로 간주하여 그 넓이나 부피를 구하지는 않았다는 점이다. 즉, $F = O_F(l)$, $S = O_S(p)$와 같은 식으로 어떤 연속체를 그 불가분량의 단순총합으로 취급하지는 않았다는 것이다. 다음으로, 그의 불가분량법에서는 불가분량을

1) 연속체가 불가분량으로 구성될 수 없다는 입장은 아리스토텔레스 이후 기하학자들 사이에서는 보편적이었는데[4, 7]. 일반적으로 카발리에리는 불가분량에 의한 연속체 구성을 주장한 것으로 알려져왔다[13, 15, 17].

2) 이 연구에서 소개한 카발리에리의 주요 명제들은 Anderson[1], Giusti[11], Mancosu[14] 에서 인용했음을 밝힌다.



〈그림 1〉

하나의 양으로 취급함으로써 〈유클리드 원론〉 5권의 비와 비례 이론을 불가분량의 사이의 비교[3]에도 적용하도록 했다는 점일 것이다[10].

카발리에리는 불가분량 총합 사이를 비교하기 위해 개별적인 불가분량 사이의 비를 활용하는데, 이것은 가비의 리(加比의 理)에 일종의 보간법을 적용한 것이라 할 수 있다.

예를 들어, 〈불가분량의 기하학〉 2권의 명제 4에서는, 〈그림 1〉에서와 같이 두 도형 ACM과 ECM 사이의 비를 $O_{ACM}(l)$과 $O_{ECM}(l)$ 사이의 비로 비교함에 있어, 만약 밑면에 평행이 되는 선분 BR과 RD 사이의 비가 항상 AM과 ME 사이의 비와 같다면, $ACM : ECM = O_{ACM}(l) : O_{ECM}(l) = AM : EM$ 임을 주장한다. 그런데 이것은 $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_1 : b_1 = \cdots = a_n : b_n$ 일 때 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) : (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = a_1 : b_1$와 같은 유한에서의 산술 법칙을 무한의 영역에까지 확장시킨 것으로 볼 수 있다.

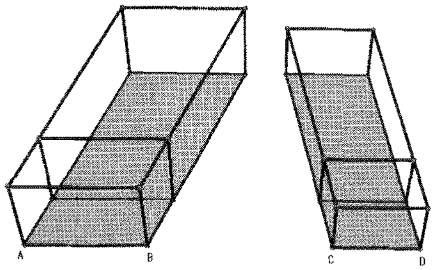
카발리에리는, 부피 사이의 비교 활동을 위해, 어떤 도형F의 모든 선분 $O_F(l)$ 개념을 확장하여, 그 각각의 선분을 한 변으로 하는 모든 정사각형 $O_F(\Box l)$ 개념을 도입하였다.[4] 이와 관련해, 〈불가분량의 기하학〉 2권의 명제 9, 명제 13, 명제 22는 첫 번째 불가분량법을 부피의 영역에 적용할 수 있도록 하는 보조 정리들인데, 특히 명제 13은 뒤에서 살펴볼 두 번째 불가분량법과의 차이를 드러내는 것이기도 하다.

우선, 〈불가분량의 기하학〉 2권의 명제 9는 높이가 같고 대응하는 밑변이 각각 AB, CD인 두 평행사변형 F_a, F_b에 대해 $O_{F_a}(\Box l)$와 $O_{F_b}(\Box l)$ 사이의 비는 AB, CD를 각각 한변으로 하는 정사각형의 비와 같다는 정리로서, 즉 $O_{F_a}(\Box l) : O_{F_b}(\Box l) = \Box AB : \Box CD$ 임을 나타내는 것인데, 〈그림 2〉에서 나타나는 두 입체를 각각 V_a, V_b라고 한다면, 명제 9는 명제 3에 의해 $V_a : V_b = O_{F_a}(\Box l) : O_{F_b}(\Box l) = \Box AB : \Box CD$을 함의한다고 하겠다.

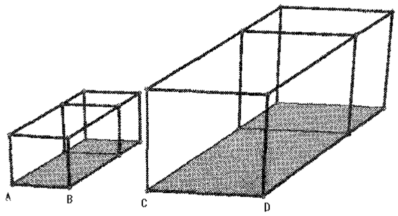
〈불가분량의 기하학〉 2권의 명제 13은 서로 닮은 두 평행사변형 F_a, F_b와 상응하는 변 AB, CD에 대해 $O_{F_a}(\Box l)$와 $O_{F_b}(\Box l)$ 사이의 비는 AB, CD를 각각 한 변으로 하는 정

3) 〈불가분량의 기하학〉 2권의 명제 1에서는 $O_{F_1}(l)$, $O_{F_2}(l)$이 서로 비교가능한 양이라는 것을, 그리고, 명제 2에서는 두 도형 F_1, F_2가 합동일 때, $O_{F_1}(l) = O_{F_2}(l)$이 성립함을 주장한다.

4) 이러한 각각의 정사각형은 도형 F에 수직이 되도록 위치시킨다. 여기서 선분 l, AB를 한 변으로 하는 정사각형은 $\Box l$, $\Box AB$로 나타내기로 한다.



〈그림 2〉



〈그림 3〉

육면체의 비와 같다는 정리로서, 선분 l을 한 변으로 하는 정육면체를 $C(l)$이라고 하면, $O_{F_a}(\square l) : O_{F_b}(\square l) = C(AB) : C(CD)$임을 나타내는 것인데, 〈그림 3〉에서 나타나는 두 입체를 각각 V_a, V_b라고 한다면, 명제 13은 명제 3에 의해 $V_a : V_b = O_{F_a}(\square l) : O_{F_b}(\square l) = C(AB) : C(CD)$을 의미한다고 하겠다. 명제 9와 함께 살펴보게 되면, 명제 13은 높이가 다른 두 입체의 비를 비교할수 있도록 하는 정리임을 알 수 있는데, 이는 카발리에리 첫 번째 불가분량법의 가장 큰 특징이라 할 수 있다.

〈불가분량의 기하학〉 2권의 명제 22는 두 평행사변형 F_a, F_b과 각 대각선에 의해 생성된 삼각형 F_{a1}, F_{b2}에 대해 $O_{F_a}(\square l) : O_{F_{a1}}(\square l) = O_{F_b}(\square l) : O_{F_{b1}}(\square l)$임을 나타내는 것인데, 명제 3에 따르면, 이것은 평행사변형과 그 절반의 삼각형에 의해 생성된 (기울어진) 각기둥과 각뿔의 비가 일정함을 나타내는 것이기도 하다.

〈불가분량의 기하학〉 2권의 명제 24는 원기둥과 원뿔의 비를 구하기 위한 징검다리 역할을 수행하는 정리로서 명제 22에서의 각기둥과 각뿔의 비가 3 : 1임을 보여준다. 즉, "어떤 평행사변형과 그것의 대각선에 대해, 평행사변형의 모든 정사각형은 앞의 대각선에 의해 만들어진 삼각형의 모든 정사각형의 3배이다."는 정리이다. 〈그림 4〉에서의 기호와 관련시켜볼 때, 이 정리는 $O_{ACGE}(\square l) = 3O_{ACE}(\square l)$로 나타낼 수 있고 간략한 증명 과정은 다음과 같다.

(명제 24에 대한 증명 개요) $ACGE$는 평행사변형이고, 선분 RV는 선분 AC에 평행이며 점 D, F, H, B는 각각 선분 AE, EG, GC, CA의 중점일 때,

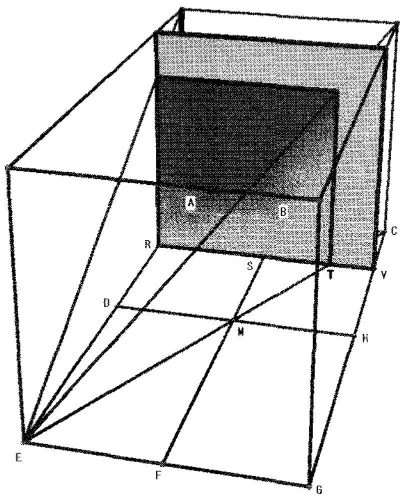
$$\square RT + \square TV = 2\square RS + 2\square TS$$

이므로, 명제 4에 의해,

$$O_{ACE}(\square l) + O_{CEG}(\square l) = 2O_{ABFE}(\square l) + 2\{O_{BCM}(\square l) + O_{MEF}(\square l)\} \tag{1}$$

이 성립한다.

삼각형 ACE와 삼각형 CEG, 그리고 삼각형 BCM과 삼각형 MEF는 각각 서로 합동이기



〈그림 4〉

때문에, 명제 2에 의해,

$$O_{ACE}(\square l) = O_{CEG}(\square l), \quad O_{BCM}(\square l) = O_{MEF}(\square l) \tag{2}$$

이 성립한다.

삼각형 ACE와 삼각형 BCM은 서로 닮은 도형이므로, 명제 13과 명제 22에 의해,

$$O_{ACE}(\square l) : O_{BCM}(\square l) = C(AC) : C(BC) = 8 : 1 \tag{3}$$

이 성립한다.

한편, $ACGE$와 $ABFE$는 높이가 같은 평행사변형이므로, 명제 9에 의해,

$$O_{ACGE}(\square l) : O_{ABFE}(\square l) = \square AC : \square AB = 4 : 1 \tag{4}$$

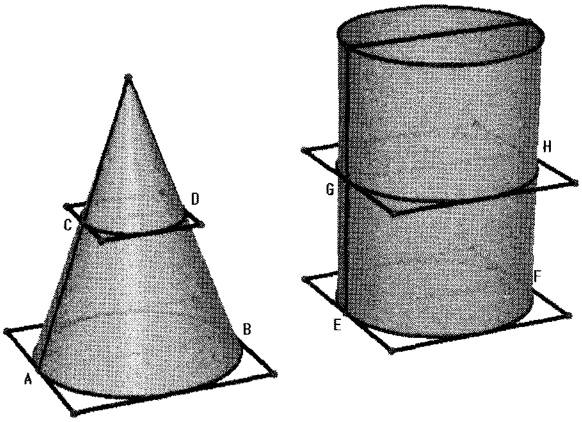
이 성립한다.

앞의 (1), (2), (3), (4)에 의해, $O_{ACGE}(\square l) : O_{ACE}(\square l) = 12 : 4 = 3 : 1$이므로, $O_{ACGE}(\square l) = 3O_{ACE}(\square l)$이 성립한다.

이러한 결과와 닮은 도형의 성질을 이용해, 카발리에리는 밑면과 높이가 같은 원기둥과 원뿔의 비가 3 : 1임을 유도해내는데, 여기서의 핵심적 아이디어는 원뿔의 횡단면끼리와 원기둥의 횡단면끼리가 닮았다는 사실을 활용하는 것이다.

〈그림 5〉에서, 원뿔을 V_1, 원기둥을 V_2, 원뿔의 꼭지점과 밑면의 중점을 가로지른 종단면을 P_1, 원기둥의 윗면과 밑면의 중점을 가로지른 종단면을 P_2, 선분 l을 지름으로 하는 원을 $\bigcirc l$ 이라고 할 때,[5)]

5) $O_F(\bigcirc l)$은, $O_F(\square l)$와 마찬가지로, 도형 F의 모든 선분 $O_F(l)$ 개념을 확장한 것으로서 그 각각의 선분을



〈그림 5〉

원뿔에 있어서는, 명제 4에 의해, $O_{P_1}(\Box l) : O_{P_1}(\bigcirc l) = \Box AB : \bigcirc AB$ 이다.

원기둥의 경우도, 명제 4에 의해, $O_{P_2}(\Box l) : O_{P_2}(\bigcirc l) = \Box EF : \bigcirc EF$ 이다.

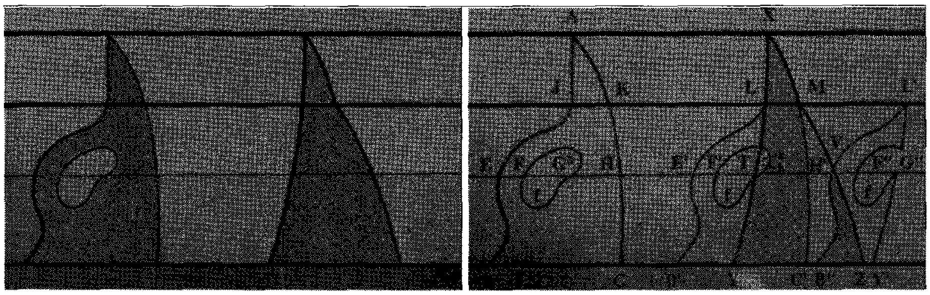
그런데 원뿔과 원기둥의 밑면이 같으므로, $\Box AB : \bigcirc AB = \Box EF : \bigcirc EF$ 이고, $O_{P_1}(\Box l) : O_{P_1}(\bigcirc l) = O_{P_2}(\Box l) : O_{P_2}(\bigcirc l)$, $O_{P_1}(\Box l) : {}_{P_2}(\Box l) = O_{P_1}(\bigcirc l) : O_{P_2}(\bigcirc l)$ 이다.

명제 22에 의해, $1 : 3 = O_{P_1}(\Box l) : O_{P_2}(\Box l) = O_{P_1}(\bigcirc l) : O_{P_2}(\bigcirc l)$ 이므로, 명제 3에 의해,

$$V_1 : V_2 = O_{P_1}(\bigcirc l) : O_{P_2}(\bigcirc l) = 1 : 3$$

이 성립한다.

한편, 카발리에리의 두 번째 불가분량법은 〈불가분량의 기하학〉 7권의 명제 1, 2, 3을 통해 등장한다. 오늘날, 일반적으로 '카발리에리의 원리' 로 널리 알려진 이 정리는 〈불가분량의 기하학〉 2권의 명제 4와 매우 유사해 보이지만 '불가분량의 총합' 개념이 사용되지 않는다는 점에서 차이가 있다.



〈그림 6〉

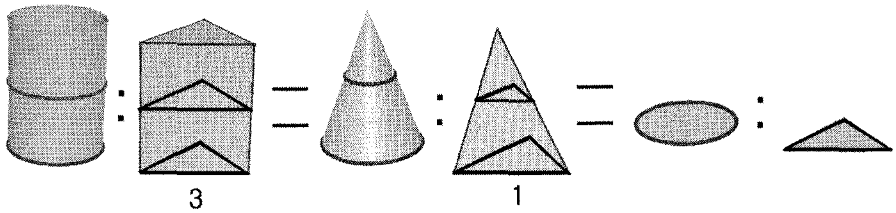
지름으로 하는 모든 원을 의미한다. 이러한 각각의 원은 도형 F에 수직이 되도록 위치시킨다.

〈불가분량의 기하학〉 7권의 명제 1은, 〈그림 6〉에서의 $P_1 = ABC$, $P_2 = XYZ$와 같이, 두 도형이 높이가 같으며, 두 높이 사이에 위치하고 기준선(밑변)에 평행한 직선에 의해 절단된, 도형 내의 대응하는 선분들이 서로 같을 때, $P_1 = P_2$라는 정리이다. 카발리에리는 이러한 두 도형에 대해 '대등하게 유사한(equally analogue)' 것들이라 했는데, 이 조건을 갖춘 두 도형의 넓이가 같음을 포갬 아이디어를 통해 보이려 하였다.

대략적인 명제1의 증명 내용은 다음과 같다. P_1, P_2의 대응하는 선분들이 같은 선상에 있도록 유지하면서 점 A를 점 X 위에 위치시켰을 때, P_1, P_2가 완전히 포개지면 〈유클리드 원론〉 공준 4에 의해 $P_1 = P_2$이다. 만약 부분적으로만 포개진다면, 〈그림 6〉에서와 같이, 공통 도형($XMC'YThL$)과 비공통 도형(P_1의 $LB'YTF'$, P_2의 $MC'Z$)이 동시에 생기게 된다. 그런데 이 두 비공통 도형 역시 '대등하게 유사한' 조건을 만족한다(예: $E'F' = H'V$). 앞의 과정을 반복하면 두 도형을 완전히 포개고 $P_1 = P_2$이 되도록 할 수 있다.

〈불가분량의 기하학〉 7권의 명제 2는 '대등하게 유사한' 평면도형의 대응 선분들이 일정한 비를 유지하면 두 평면도형의 비도 마찬가지라는 정리이고, 〈불가분량의 기하학〉 7권의 명제 3은 '대등하게 유사한' 입체도형의 대응 면들이 일정한 비를 유지하면 두 입체도형의 비도 마찬가지라는 정리이다.

앞서 언급했듯, 카발리에리의 두 번째 불가분량법에서는 '불가분량의 총합' $O_F(l)$, $O_S(p)$와 같은 개념을 매개하지 않고 평면의 넓이와 입체의 부피를 비교 측정한다. 이러한 첫 번째 불가분량법과의 차이는 원뿔과 원기둥의 비를 구하는 절차에 의해 비교적 분명하게 드러난다. 두 번째 불가분량법에서는 이것을 〈불가분량의 기하학〉 7권의 명제 8에서 다루는데 대략적인 내용은 다음과 같다. 원뿔, 원기둥, 삼각기둥, 삼각뿔의 높이가 모두 같고 원뿔과 원기둥의 밑면인 원과 삼각기둥과 삼각뿔의 밑면인 삼각형이 각각 같을 때, 〈불가분량의 기하학〉 7권의 명제 3에 의해, 원기둥과 삼각기둥 사이의 비와 원뿔과 삼각뿔 사이의 비는 모두 그 원과 삼각형 사이의 비와 같게 되므로, 〈유클리드 원론〉 12권의 명제 7("각뿔은 같은 밑면과 높이를 가진 각기둥의 1/3이다.")에 의해, 원뿔과 원기둥 사이의 비도 1 : 3이 된다. 이러한 절차를 도식화하면 〈그림 7〉과 같다.



〈그림 7〉

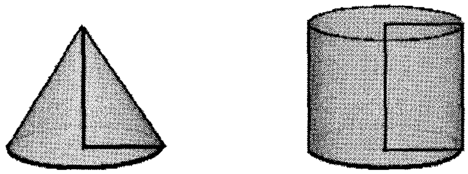
그런데 카발리에리의 두 가지 불가분량법 사이에는 '불가분량의 총합' 개념의 사용 유무

이외에 또 하나의 중요한 차이가 있다. 〈불가분량의 기하학〉 2권의 명제 13에서 드러나듯, 첫 번째 불가분량법의 기본 정리인 〈불가분량의 기하학〉 2권의 명제 3에서는 두 도형이 높이가 다른 경우도 허용하지만, 두 번째 불가분량법에 있어서는 그 적용을 위해서 '높이의 일치' 가 필수적으로 요구된다고 할 수 있다.

그렇다면, 카발리에리가 이처럼 두 가지 불가분량법을 제시한 이유는 무엇일까? 또, 이러한 두 불가분량법 사이의 차이에는 어떤 의미가 담겨있는 것일까?

3 불가분량법과 관련된 패러독스에 대한 카발리에리의 대응

〈불가분량의 기하학〉의 서문에서, 카발리에리는 불가분량을 통해 도형의 부피를 구할 때 발생하게 되는 하나의 역설적 상황에 대해 이야기한다. 그것은 원뿔과 원기둥의 비교 측정에 대한 것인데, 〈그림 8〉과 같이 직각삼각형과 그것의 두 배인 직사각형을 각 높이에 해당하는 축을 중심으로 회전시켜 각각 원뿔과 원기둥을 만들 때에, 그 비가 유지될 것 같지만, 직각삼각형 대 직사각형의 비가 1 : 2인 반면에 원뿔 대 원기둥의 비는 1 : 3이 되는 현상이다[14].

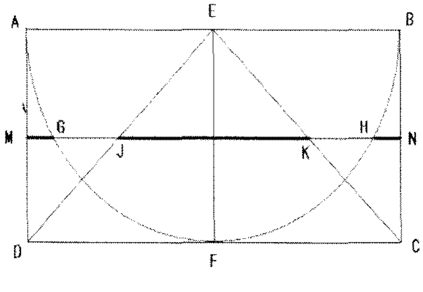


〈그림 8〉

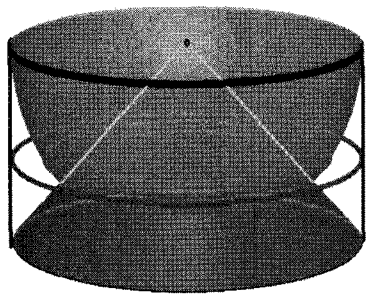
카발리에리는 위와 같은 패러독스에 대한 깊은 고찰을 통해 자신의 불가분량법을 고안해냈다고 말하였다. 이러한 언급은, 카발리에리가 불가분량과 관련된 패러독스에 익숙해 있었을 뿐만 아니라 그것을 제거하는 방향으로 불가분량을 사용하려 했을 것이라는 점을 강하게 암시한다. 이 점에서, 카발리에리가 아르키메데스와 달리 불가분량법의 논리적 결함에 대해 거리낌이 없었다는 Boyer[2, 3]의 평가는 재고할 여지가 있을 것이다. 특히, 1634년 7월 22일 카발리에리가 갈릴레이에게 보낸 서신에서는 불가분량법의 이론적 기반을 튼튼히 다지고자 했던 그의 노력을 엿볼 수 있다; "저의 〈(불가분량의) 기하학〉 5권까지의 인쇄가 이미 완료되었기에, 저는 당신에게 그 책들을 보내서 편하실 때 살펴주시길 부탁드립니다. 만약 당신께서 저의 불가분량의 기초에 대한 생각을 말씀해주신다면 그것은 저에게 큰 도움이 될 것입니다. 제 생각에는 무한히 많은 선분들 또는 평면들이란 개념이 많은 이들에게 어려움을 야기할 것같아, 제 7권을 집필하려고 하는데, 같은 사항들을 다른 방식으로 보이고자 합니다[1, pp. 348–349]."

한편, 갈릴레오와 카발리에리 사이의 일련의 서신에 따르면, 갈릴레이는 그의 제자에게 그릇 패러독스와 동심원 패러독스를 제기하였는데, 이미 1627년과 1629년에 각각 〈불가분량의 기하학〉 5권까지와 6권의 인쇄준비가 완료되었고 당시의 인쇄과정이 매우 길고 어렵다는 점을 고려한다면, 갈릴레오의 의견은 카발리에리가 〈불가분량의 기하학〉 전체의 출간을 다소 늦추면서까지 두 번째 불가분량법을 담은 〈불가분량의 기하학〉 7권을 집필하게 된 일과 밀접한 관련이 있을 것으로 예측된다.

그릇 패러독스는, 불가분량을 일반적인 양처럼 취급할 경우에, 원 상의 무한히 많은 점들이 단지 한 점과 같다는 결론에 이르게 되는 것을 보여주는 것이다 : 직사각형 $ABCD$내부에, 〈그림 9〉와 〈그림 10〉과 같이, 반원 $AEBF$와 등변삼각형 EDC가 위치할 때 축 EF를 중심으로 각 도형을 회전시키면 원기둥, 반구, 원뿔이 생성된다. 이 때, (1) 원기둥에서 반구를 제거했을 때의 그릇 모양은 그 부피가 원뿔의 부피와 같으며, 선분 MN이 선분 DC와 평행하다면, (2) 옆모양이 $MGFD$와 $HNCF$인 그릇 모양의 일부와 그 옆모양이 $JKCD$인 원뿔의 일부도 같고, (3) 앞의 두 입체 각각의 윗면인 도넛 리본면(MG, HN이 폭)과 원(JK가 지름)의 넓이도 같다. 그런데 입체를 불가분량으로 구성된 것으로 간주하고, $V = V_1 + I_1 = V_1 + I_2$일 때 $I_1 = I_2$이 성립한다는 양의 보존법칙을 적용하게 되면, 선분 MN이 선분 AB에 이르게 될 경우에 선분 AB를 지름으로하는 원 AB와 꼭지점 E가 같다는 결론에 이르게 된다[9, 14].



〈그림 9〉



〈그림 10〉

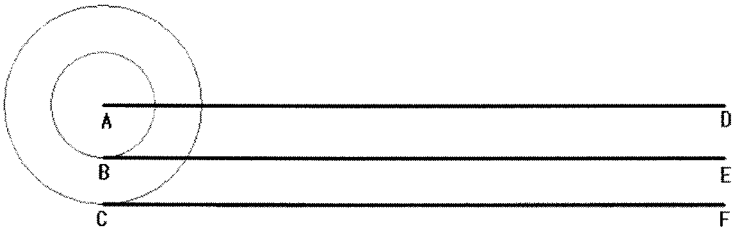
그릇 패러독스와 관련해, 갈릴레오에게 보낸 1634년 10월 2일 편지에서, 카발리에리는 자신의 첫 번째 불가분량법은 불가분량의 무한합 개념, 즉 무한을 이용하지만 새롭게 제기하는 두 번째 불가분량법에서는 그것을 피한다고 밝히면서 그릇의 대원과 원뿔의 꼭지점은 각각의 마지막 불가분량이지만 평면 불가분량과 비교해 상대적 차원이 0이라는 답변을 통해 그 패러독스를 해결하고자 하였다[1, 14].

그런데 이러한 대답은, 연속체가 불가분량의 단순합이 아니라는 것과 함께, 비교 대상이 되는 불가분량이 무엇인지를 명확히 밝히고자 하는 의도를 보여준다. 자신의 첫 번째 불가분량법이 '불가분량으로 구성된 연속체' 라는 오해를 불러일으키기 때문에, 두 번째

불가분량법에서는 불가분량의 총합 개념을 사용하지 않고 불가분량 사이의 비교만을 통해 도형을 비교 측정하는데, 이 때의 불가분량은 대상 도형보다 오직 한 단계 낮은 차원이어야 한다는 것이다. 카발리에리는, 1634년 12월 19일 편지에서도 그릇 패러독스에 관한 의견을 밝히는데, 측정하려는 도형과 기준선(또는 면)에 평행하게 움직이는 선 또는 평면과 만나는 것만을 불가분량으로 인정해야 하기 때문에 그릇과 원뿔의 끝에 해당하는 대원과 꼭지점은 불가분량에서 제외해야 한다고 주장하였다.

동심원 패러독스는, 도형을 불가분량으로 구성되었다고 간주했을 때의 패러독스 중 카발리에리 당시에도 가장 유명한 것으로, 중심이 같고 반지름이 다른 두 원이 있을 때 두 원 위의 점들이 1–1 대응이 되기에 두 원의 둘레길이가 같다는 결론에 이르게 되는 경우이다. 갈릴레이는 카발리에리가 줄곧 1–1 대응에 기초한 불가분량법을 제시했기 때문에, 크기가 다른 두 기하적 대상 사이에서 불가분량 사이의 1–1 대응이 성립하게 되는 상황을 상기시키려 했던 것으로 보인다.

사실, 갈리레오는 1638년 발행한 〈두 개의 신과학(新科學)에 관한 수학적 논증과 증명〉(Discorsi e dimonstrazioni mathematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica)에서도 동심원 패러독스와 유사한 아리스토텔레스의 바퀴 패러독스를 제시하는데, 이는 중심이 같고 반지름이 다른 두 원이 한 바퀴 회전했을 때에, 〈그림 11〉에서 $BE = CF$ 인 것과 같이, 두 원이 진행한 거리가 같아지는 현상을 일컫는 것이다[5, 6, 9].

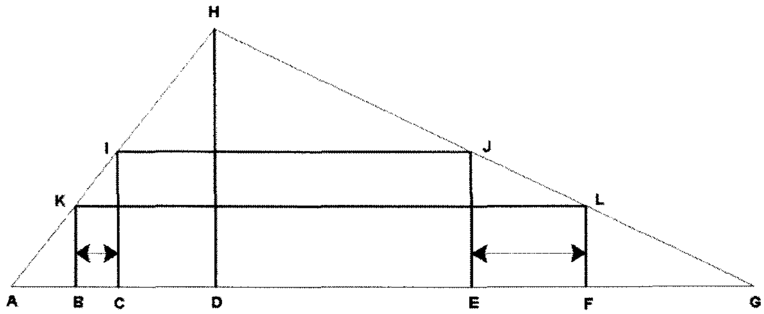


〈그림 11〉

이러한 동심원 및 바퀴 패러독스와 관련해, 카발리에리는 자신의 이론에서 불가분량은 기준선, 기준면과 평행하게 움직이는 선, 면의 수직적 이동에 의한 도형과의 교차로써 결정된다고 하면서, 연속체가 단순히 불가분량의 총합으로 구성된 것으로 보지 않는다는 입장을 거듭 밝힌다. 첫 번째 불가분량법의 기본 전제인 이 수직적 이동 개념을 가지고 동심원 패러독스는 피해갈 수 있는 듯 보인다. 하지만 이러한 접근방식에 의해 불가분량 사이의 1–1 대응에 기초한 패러독스를 모두 해결할 수 있었던 것은 아니다.

예를 들어, 17세기에 동심원 패러독스와 더불어 가장 유명했던 삼각형 패러독스는 첫 번째 불가분량법을 적용하더라도 해결할 수 없다. 〈그림 12〉와 같이, 삼각형 HAG 에서 수선의 발 HD 를 내려 두 삼각형 HAD, HGD 를 만들었을 때, 그 HD 를 동일기준으로 하여 그것과 평행한 IC 유형의 선분들은 '삼각형 HAD 의 모든 선분' $O_{HAD}(l)$ 을 구성하고 IC 유

형의 선분에 1–1로 대응하는 JE 유형의 선분은 '삼각형 HGD의 모든 선분' $O_{HGD}(l)$을 구성한다. 여기서, 〈불가분량의 기하학〉 2권의 명제 3을 적용하면, $HAD : HGD = O_{HAD}(l) : O_{HGD}(l) = 1 : 1$이 성립하게 되므로, 선분 AD와 선분 GD의 길이가 다른 경우에서조차 두 삼각형 HAD, HGD의 넓이가 같다는 결론에 이르게 된다.



〈그림 12〉

이것은 카발리에리의 첫 번째 불가분량법이 적용되지 않는 반례이다. 물론, 카발리에리는 〈불가분량의 기하학〉 1권부터 6권까지 저술하면서 자신의 이론에 이러한 문제가 있다는 것을 충분히 인지하고 있었다. 그렇다면, 카발리에리는 이 패러독스에 대해 어떻게 대처했던 것일까? 이를 위해, 카발리에리가 제시했던 것이 바로 그의 두 번째 불가분량법이라 할 수 있다. 〈여섯 개의 기하학 문제〉에는 이와 관련된 그의 의견이 제시되어 있는데, 〈그림 12〉 에서와 같이, 불가분량 KB, IC와 LF, JE가 대응될 때 그 사이의 거리가 다른 것은 두 도형의 비교 측정에 적용되는 이동(transit)이 서로 다르다는 것을 의미하고 이것이 패러독스의 근본 원인이라고 다음과 같이 밝힌다.

> "앞서 언급했던 삼각형에서의 어려움에 대한 해결은, 실로 짜인 화폭을 생각하면서 명확히 해결할 수 있다. 삼각형 HAD에 HD와 평행한 실이 100줄 있다고 하면, HA 위에 100개의 점의 표시되고, 그 점으로부터 이어, 삼각형 HAG에 AG와 평행한 100 줄의 실을 만들어 HG에 100개의 점을 더 표시하고, 삼각형 HAD에서와 같은 방식으로, 삼각형 HDG에 100 줄의 실을 만들 수 있을 것이다. 그런데 예를 들어 DG가 DA의 2배라 하면, 같은 화폭에서 떼어낸 것이라 상상해볼 때, 삼각형 HDG 위에는 원래 200개의 줄이 있어야 할 것이다. 지금은 100줄의 여유가 있는 것이다: 그런 이유로 삼각형 HAD의 실들보다 밀도가 희박한 것이다. 앞서 말했던 두 삼각형의 모든 선분들에 대해서도 이와 같은 방식으로 설명을 할 수 있다; 사실, 서로 대응되는 모든 선분들에 같은 이동(same transit)이 취해져야 한다는 명확한 규칙에 따라 대응이 이루어지지 않은 것이다[14, p. 124]."

카발리에리는 불가분량과 관련된 여러 패러독스에 대응하기 위해 '높이가 같은 수직방향의 이동'(same rectilinear transit)을 명시화한 두 번째 불가분량법을 제안했다고 하겠다.

4 결론

카발리에리의 첫 번째 불가분량법으로부터 두 번째 불가분량법인 '카발리에리의 원리' 로의 전환은 불가분량법과 관련된 일련의 패러독스에 대응하는 과정 속에서 이루어졌다. 이런 점에서, 이 전환 과정에서 그 반례들을 처리했던 방식은 수학사적으로 분석해 볼만한 가치가 있을 것이다.

라카토스의 이론은, 반례에 대한 처리방식에 의해 수학 발달의 메커니즘을 규명하고 있다는 점에서, 이의 분석을 위한 하나의 잣대를 제공해준다[12]. 이런 점에 착안해, 이 연구에서는 카발리에리의 두 번째 불가분량법으로의 전환을 라카토스의 괴물조정법, 괴물배제법, 예외 배제법, 보조정리 합체법의 관점으로 조명해보고자 하였다.

괴물 배제법(method of monster barring)은 추측을 반박하는 전면적인 반례가 나타났을 때 추측을 유지하는 대신 그 반례를 배제하는 방법인데, 카발리에리가 동심원 패러독스를 수직적 이동이 적용되지 않는 괴물로 간주함으로써 첫 번째 불가분량법을 고수하는 것은 그 전형적 예가 된다. 괴물 조정법(method of monster adjustment)은 전면적인 반례를 반례로 보는 관점을 시정하여 반례를 오히려 예로 취급하게 하는 방법인데, 카발리에리가 그릇패러독스가 자시의 불가분량법에 대한 반례가 되지 않는다고 주장한 것은 이에 해당하는 것처럼 보인다. 하지만 두 번째 불가분량법으로의 전환은 그 자체가 추측을 수정하는 것이기 때문에 이 과정이 추측의 유지를 전제로 하는 괴물 배제법, 괴물조정법으로 특징화되기는 힘들 것이다.

표면적으로, 카발리에리가 취한 두 번째 불가분량법으로의 전환은 반례를 예외로 인정하여 정리의 조건에 첨가시키는 예외 배제법(method of exception barring)에 가까워 보인다. 구체적으로, 비교 대상이 되는 두 도형 또는 입체에 대해 '높이의 일치' 제한조건을 첨가함으로써 삼각형 패러독스와 같은 반례를 없애는 방향으로 불가분량법 정리를 수정한 것처럼 보인다. 그리고 이러한 평가는 카발리에리의 두 번째 방법이 독립적인 정리가 아니며 첫 번째 방법에 대한 보조적 역할을 담당할 뿐이라는 관점[1]에서는 유효해 보인다.

그런데 두 번째 불가분량법에서는 첫 번째 불가분량법에서 핵심적으로 사용되었던 '불가분량의 총합' 개념이 사라진다는 면에서 두 불가분량법 정리 사이에는 근본적 차이가 존재한다. 다시 말해, 두 번째 불가분량법으로의 전환에는 정리의 내용 자체를 유지하면서 예외 조건만을 첨가시키는 예외 배제법으로 설명할 수 없는 측면이 내재해 있는 것이다.

여기서, 카발리에리가 불가분량법을 다루는 과정에서 패러독스가 발생하거나 오해를 일으키는 원인을 불가분량의 총합 개념에서 찾았고 자신의 불가분량법에서 그러한 '모든

선분', '모든 면' 개념을 불필요하도록 '높이가 같은 수직방향의 이동' 을 원래의 추측에 합체시켰다는 점에 주목할 필요가 있다. 사실, 그러한 과정은 증명분석을 통해 숨겨진 보조정리나 조건을 추측에 합체시켜 추측을 개선하는 보조정리 합체법(method of lemma incorporation)으로서의 면모를 보여준다. 그릇패러독스에 대한 분석을 통해, 자신의 불가분량법이 연속체를 불가분량의 총합으로 간주하는 오해를 줄 수 있다는 판단 하에 두 번째 불가분량법으로 전환한 것은 반례에 터한 증명분석을 통해 증명(부분 추측) 중에서 반례의 원인을 찾아 수정한 후 이 때 사용된 개념을 원래의 추측에 합체시키는 특징이 있다. 또한, 삼각형 패러독스에 대응하기 위해, 카발리에리는 이 패러독스의 원인을 '불가분량의 밀도의 차이' 에 두고 이것을 제거하기 위해 '높이의 같음' 개념을 원래의 추측에 합체시키고 이를 이용해 '불가분량의 총합' 개념을 없애 버렸는데 이 역시 발견과 정당화의 논리가 결합된 모습을 보여준다.

하지만 카발리에리가 시도했던 불가분량법의 수정은 불완전했다고 할 수 있다. 라카토스에 따르면, 보조정리합체법은 수학지식 성장에 있어 최선의 방법일 뿐만 아니라 큰 기여를 한다. 하지만 보조정리합체법에 의해 탄생한 카발리에리의 원리는 그러한 결과와는 다소 거리가 있다. 사실, 카발리에리 이후 17세기 후반의 미적분학 발생의 역사는 카발리에리의 보조정리 합체법이 어떤 면에서 부족했는지를 잘 보여준다. 카발리에리의 '높이가 같은 수직방향의 이동' 개념은 순수하게 정적인 기하개념이라 할 수 있다. 카발리에리는 동적인 '변화율' 개념이 아닌 정적인 '밀도' 개념에 기초해 '이동' 개념을 정련하고 불가분량법을 개선했기 때문에, 그 이동 개념은 암묵적으로는 운동을 전제하지만 넓이와 부피의 '변화율' 를 다룰 수 없고 그 변화율의 기준을 일치시키는 도구에 머무를 수밖에 없었던 것이다. 물론, 이러한 사항이 함수와 식 도구를 통해 변화율을 대수적으로 처리했던 17세기 후반의 수학자들과는 차별화되는 부분이고, 카발리에리의 불가분량법이 미적분학의 발생에 미치지 못했던 결정적 이유일 것이다.

참고 문헌

1. Anderson, K., Cavalieri's Method of Indivisibles, Archive for the History of Exact Sciences, 31, (1985), 291–367.
2. Boyer, C. B., A History of Mathematics, 한글 번역판 (2000), 양영오, 조윤동 역, 수학의 역사(상), 경문사.
3. Boyer, C. B., Cavalieri, Limits and Discarded Infinitsimals, Scripta Mathematica, 8, (1941), 79–91.
4. Cajori, F., A Greek Tract on Indivisible Lines, Science, New Series, 48, (1918), 577–578.
5. Daston, L. J., Galilean Analogies: Imagination at the Bounds of Sense, Isis, 75(2), (1984), 302–310.
6. Drabkin, I. E., Aristotle's Wheel, Osiris, 9, (1950), 162–198.

7. Evans, G. W., Cavalieri's Theorem in His Own Words, The American Mathematical Monthly, 24(10), (1917), 447–451.
8. Eves, H., Two Surprising Theorems on Cavalieri's Congruence, The College Mathematics Journal, 22(2), (1991), 118–124.
9. Galilei, G., Two New Sciences, Madison, University of Wisconsin University, 1974.
10. Gandt, D. F., Cavalieri's Indivisibles and Euclid's Canons, Revolution and Continuity, Catholic University of America Press, 1991.
11. Giusti, E., Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles, Bolngna, Edizioni Cremonese, 1980.
12. Lakatos, I., Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery, 한글 번역판 (2001), 우정호 역, 수학적 발견의 논리, 아르케.
13. Malik, M. A., A Note on Cavalieri's Integration, Mathematics Magazine, 57(3), (1984), 154–156.
14. Mancosu, P., Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century, New York, Oxford University Press, 1996.
15. Miller, G. A., A Ninth Lesson in the History of Mathematics, National Mathematics Magazine, 19(2), (1944), 64–72.
16. Smith, D. E., A Source Book in Mathematics, New York, McGraw-Hill, 1929.
17. Wildberger, N. J., A New Proof of Cavalieri's Quadrature Formula, The American Mathematical Monthly, 109(9), (2002), 843–845.

박선용 영남대학교 수학교육과
Department of Mathematics Education, Yeungnam University
E-mail: polya@yu.ac.kr