한국초등수학교육학회지 15(1) 179-198. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 15(1) 179-198.
2011. 04. 30 April 30. 2011.

수학영재교육 대상자의 수학용어에 대한 오개념 실태 조사[1]

남승인[2]

수학교육의 궁극적인 목표 중의 하나인 문제해결력을 기르기 위해서는 그 기저가 되는 수학적 개념에 대한 이해가 뒷받침되어야 할 것이다. 본 연구는 영재교육 대상자들이 갖고 있는 수학 용어에 대한 오개념의 실태 및 형성 배경을 추정해 봄으로써 수학 오개념 예방 및 교수·학습 프로그램 개발과 지도에서 고려해야 할 정보를 제공하는 데 있다. 이를 위하여 이론적 측면에서 오개념의 의미 및 형성 배경을 살펴보았다. 그리고 오개념 실태를 알아보기 위해 대학부설 영재교육원생을 대상으로 수와 도형 영역의 수학 개념을 진술한 내용을 분석한 결과 수학적으로 올바르게 진술한 학생은 35%정도이며, 개념형성 수준을 4수준으로 나눌 경우 관점에 따라 예(例)와 비례(非例)의 구별할 수 있는 2수준과 개념의 공통적 속성을 인식하고, 자신의 표현으로 기술할 수 있는 3수준인 학생이 대부분이다. 그 배경을 추정해 보면 제한된 범례 제시, 잘못된 선개념, 개념 정의와 개념 이미지 사이의 불균형 등에서 찾을 수 있겠다. 이러한 추정을 바탕으로 수학적 용어에 대한 오개념을 해소 방안을 개괄적으로 정리하였다.

[주제어] 개념, 오개념

Ⅰ. 연구의 필요성과 목적

수학 영재교육의 목표는 자기주도적인 학습 태도와 창의적인 문제해결력을 기르는데 있다고 보겠다. 자기 주도적 학습 태도를 기르기 위해서는 학생 스스로 원리·법칙을 이해하고 이를 활용할 수 있는 학습의 자생력을 갖도록 해야 한다. 그리고 창의적인 문제해결력을 기르기 위해서는 문제해결의 자원이라고 할 수 있는 원리·법칙을 이해하여야 하며, 원리와 법칙의 이해는 그 구성요소인 개념에 대한 올바른 이해가 선행되어야 한다. 개념 습득 능력이 학습 능력을 좌우한다고 볼 수 있다. 이에 따라 최승현(1999)은 '교과의 기본적인 개념형성이 선행되지 않으면 그 교과의 구조와 그 교과를 특징짓는 원리·법칙 및 이론들을 이해할 수 없으며 효과적인 학습이 이루어질 수 없다.'고 개념지도의 중요성을 강조하고 있다.

그러나 교실 현장에서 수학 영재를 지도한 경험을 되뇌어 보면 학생들은 교사가 기대하는 이상으로 개념의 명칭은 많이 알고 있으나 그 의미를 제대로 이해하지 못함으로 해서

---

1) 본 논문은 2008년 대구교육대학교 학술지원연구에 의하여 연구되었음.
2) 대구교육대학교 수학교육과

원리·법칙에 대한 유의미한 이해가 부족한 실정이다. 이로 인해 문제해결 과정에서 종종 오류를 일으키는 경우가 있으며, 창의적으로 문제를 해결하기보다는 기억의 재생과 모방을 통해 기계적으로 문제를 해결하는 경우를 종종 볼 수 있다. 또한 수학적 개념에 대한 구체적인 범례에서 예(例)와 비례(非例)는 구별할 수는 있으나 문자나 기호 등으로 개념을 명확하게 표현하지 못함으로써 고차적인 사고력 학습이 순조롭게 이루어지지 못하고 있다.

오개념은 개인이 가진 일종의 신념체계로써 학생 자신의 지식 체계에 강하게 연결되어 있다. 학문의 특성상 계통성을 지닌 수학학습에서 오개념은 후속학습의 대상인 원리나 법칙의 이해와 새로운 개념형성에 장애가 될 뿐만 아니라 수학학습의 궁극적인 목적인 문제해결력의 장애 요인이다.

본 연구에서는 수학 오개념의 의미와 형성배경을 살펴보고, 영재교육원생을 대상으로 수와 도형 영역의 수학적 개념에 대해 진술한 내용을 바탕으로 오개념의 실태와 그 형성배경을 분석·추정해봄으로써 오개념 형성 예방과 교정지도 및 영재교육 프로그램 개발과 지도 시에 고려해야 할 정보를 얻는 데 있다.

Ⅱ. 수학학습에서 오개념의 의미와 기능

1. 오개념의 의미

개념의 정의가 다양하듯이 오개념에 대해서도 합의된 정의는 없다. Andeson & Joffries(1985. 김부미, 2006에서 재인용)는 '학생들이 수학에서 사용하는 개념 중 그 의미를 수학적 개념과 다르게 이해하거나 잘못 사용하는 개념'으로 정의하고 있으며, Ausubel(1978. 최승현, 1999에서 재인용)은 '학생들이 학습하기 이전부터 이미 각자의 경험을 통해 학습과 관련된 선개념(preconception)을 가지고 있는데 이 선개념이 수학적 개념과 다를 때 이를 오개념'이라 정의하고 있다. 이 밖에 박선화(1993), 김부미(2006)의 의견을 종합하면 오개념이란 '학생들이 이해하고 사용하는 개념이 학교 교육과정에서 정의하는 수학적 개념과 다르게 해석하거나 잘못 사용하는 개념'으로 정리할 수 있겠다. 이러한 오개념은 경험을 통하여 얻어진 신념체계이므로 학생 자신의 지식 체계에 강하게 연결되어 있어서 이후 후속학습의 대상인 새로운 개념형성이나 원리나 법칙의 이해에 장애가 될 뿐만 아니라 수학학습의 궁극적인 목적인 문제해결력에 장애를 일으켜 학습 부진으로 연결될 가능성이 크다.

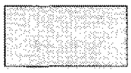
2. 오개념의 기능

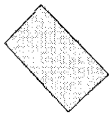
개념은 정신적 실체, 즉 아이디어로써 지적 활동의 범위를 넓히는데 사용되는 것으로 우리가 사고하고 판단하는 것은 개념에 의하여 이루어지는 것으로 볼 때, 개념에 대한 불완전한 이해나 오개념은 사고와 판단에서 혼란과 오류를 일으킬 가능성이 높다. 유아들이 어떤 사실과 관련된 의미를 보존하고 전달하는 역할을 하는 말을 처음 배우기 시작할 때 단어를 중심으로 배우며, 어휘 구사력이나 독해력, 의사소통력 등 언어학습 능력을 신장시키려면 여러 단어와 그 의미를 올바르게 이해해야 하듯이 성공적인 수학학습을 위해서는 여러 가지 수학적 개념을 올바르게 이해해야 한다. 이처럼 수학학습에서 올바른 개념지도의 중요성을 강조하는 것은 오개념은 학습 장애와 학습 부진 요소로 작용하며, 이미 형성

된 오개념은 교정이 힘들기 때문이다. 개념 및 오개념과 관련한 연구(이봉익,1973; 정은실,2001; Ben-Hur,2006; Ashlock,2008)에 의하면 오개념의 기능은 의사소통에서 장애, 동류의 후속학습에서 연속된 오개념 형성, 문제해결 과정에서 오류, 새로운 아이디어 창출 장애 등을 일으킬 가능성이 높은 것으로 나타났다. 본고에서는 오개념의 기능을 학습의 목표적 측면, 과정적 측면, 전이력 측면 등 크게 3가지 범주로 나누어 살펴보았다.

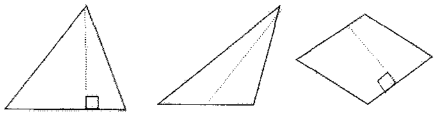
첫째, 오개념은 학습목표 달성을 어렵게 할 수 있다. 개념지도는 수학학습의 초점인 동시에 출발점이다. 수학학습의 목표가 「수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 … 중략…, 여러 가지 문제를 수학적인 방법을 사용하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 데 있다.」 고 볼 때, 수학학습의 궁극적인 목표인 합리적인 문제해결력을 기르기 위한 출발점은 개념지도에 있다고 할 수 있다. 즉 개념은 후속학습 대상인 원리·법칙의 구성 요소인 동시에 발전적으로 고등정신 기능을 요구하는 문제해결력과 수학 창의성 학습을 순조롭게 하는 초석이다. 따라서 오개념은 개념적 지식뿐만 아니라(Fischbein, 1996) 절차적 지식을 학습하는 데 장애를 일으키며, 나아가 문제를 합리적으로 해결하는 데 커다란 장애 요소가 된다.

둘째, 오개념은 학습과정에서 인지적 혼란을 일으킬 수 있다. 초기에 잘못 형성된 개념적 이미지나 오개념은 후속적으로 이루어지는 개념학습에 혼란을 일으킬 뿐만 아니라 나아가 수학에 대한 흥미 상실 등 인지적·정서적 갈등을 일으켜 학습 부진으로 연결될 수 있다(노영아·안병곤, 2007). 예컨대, 가로, 세로라는 개념은 '직사각형에서 직각을 낀 두 변 중 한 변을 가로라면 다른 한 변을 세로'라고 정의하지만 일상용어와 구분하지 않고 [그림 1]처럼 수평방향을 가로, 연직방향을 세로라고 지도할 경우 형성된 오개념은 개념과 개념 이미지 사이의 갈등으로 인하여 [그림 2]처럼 비스듬히 위치한 직사각형에서 어느 변이 가로, 세로인지를 판단하는 데 인지적 혼란을 가져올 수 있다.


[그림 1]


[그림 2]

셋째, 개념 전이력 측면에서 오개념은 개념의 가소성(可塑性)을 약화시킨다. 일단 형성된 개념은 다른 개념으로 확산·연결시켜야 하는데 이를 위해선 이미 형성된 개념은 파괴되어 후속 개념형성에 강박개념으로 남도록 해서는 안 된다. 즉 어떤 수학적 개념이 고정된 개념으로 얽매여 있으면 그 개념의 전이력 및 응용력과 창의력이 부족하게 된다. 예컨대, 높이 개념을 지도할 경우 [그림 3]처럼 도형 내부에 위치하는 사례만 제시하면 둔각삼각형에서는 [그림 4]처럼 잘못 표현하는 경우를 볼 수 있다. 또 높이의 개념은 [그림 3]처럼 변의 수가 홀수인 도형에서는 '꼭짓점에서 밑변에 그은 수선의 길이'로, [그림 5]처럼 변의 수가 짝수인 도형에서는 '평행한 두 변 사이의 거리'를 높이라고 한다. 전자의 개념이 고착활 될 경우 후자의 개념을 형성하는 데는 혼란을 가져올 수 있다. 일단 형성된 개념은 전통적인 교수·학습 과정을 통해서도 쉽게 변화하지 않는다(Ashlock, 2008).'고 볼 때, 초기 개념지도에서 올바른 범례나 개념 이미지가 형성되지 않을 경우 사고의 고착화로 인하여 이전의 오개념은 개념 가소성 약화로 인하여 후속개념 지도에서 연속적으로 오개념을 일으킬 가능성이 높다.



[그림 3] [그림 4] [그림 5]

Ⅲ. 오개념 형성 배경

창의적 문제해결력을 기르기 위해는 그 기저가 되는 개념에 대한 올바른 이해가 선행되어야 한다. 즉 오개념은 문제해결력을 감퇴시킨다고 볼 때, 오개념 예방과 교정을 위해서는 어떤 요인으로 인하여 오개념이 형성되는지를 살펴볼 필요가 있다. 오개념은 문제 해결이나 사고와 판단에서 조직적인 실수를 초래하며, 또 이미 형성된 오개념은 인지적 갈등을 해소하기 위한 색다른 경험이 제공되지 않는 한 교정되기가 어렵다. 수학의 기초적인 개념은 구체적인 경험을 통해 그 범례를 경험하는 것에서부터 얻어진다고 볼 때, 각 개인은 생활과 학습 환경이 다양하기 때문에 오개념이 어떻게 형성되는지를 정확하게 예측하고 판단하는 일은 매우 어렵다.

오개념의 형성 배경에 대해서 Vinner(1994. 류희찬 외 역, 2003에서 재인용)는 개념의 정의와 개념 이미지 사이의 격차로 인하여 인지적 갈등이 발생하며, 이로 인해 오개념이 형성되는 것으로 보고 있으며, Brousseau (1997. 김부미, 2006에서 재인용)는 오개념 발생의 근원을 개체 발생적 근원, 교수학적 근원, 인식론적 근원으로 분류하고 있다. 또 Ben-Hur(2006)는 잘못된 선개념, 불완전한 일반화(undergeneralizations), 과잉일반화(Overgeneralization)등으로 인하여 오개념이 형성되는 것으로 보고 있으며, 최승현(1999)은 오개념의 형성 요인을 내적요인과 외적 요인으로 나누고 있다. 그는 내적 요인으로 학습자의 인지 과정적 특성, 즉 지각과 관련된 사고 양식의 특성과 판단 또는 추론 등의 사고 과정에 관련된 특성으로부터 오개념이 형성될 수 있으며, 외적 요인으로 물리적 환경, 사회·문화적 환경, 학교 환경에 영향을 받는다고 보고 있다.

오개념 형성은 개념을 형성하는 과정에서 학생들의 기존의 인지구조와 외적인 자극(문제 및 학습 상황)사이의 불균형으로부터 초래되는 것으로 볼 수 있다. 이에 따라 본고에서는 최승현(1999)의 분류를 참고하여 오개념 형성 배경을 크게 내적 요인과 외적 요인으로 구분하여 살펴본다.

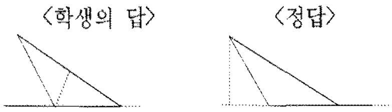
1. 내적 요인

오개념이 형성되는 내적 요인은 학생 개인의 인지적·정의적 특성과 관련이 깊다.

◆ 인지적 요인으로 학생의 인지 능력을 고려하지 않을 경우 오개념이 발생할 수 있다. Ben-Hur(2006)는 '오개념은 심리학적으로 다루어야 하며, 오개념을 교정하기 위한 지도는 오개념이 잠재되어 있는 인식의 구조에 근간을 두고 진행되어야 한다.' 권고는 학생의 인지 구조와 인지 능력은 개념 및 오개념 형성과 관련이 깊은 것으로 생각할 수 있다. Piaget는 '학습자의 인지 능력에 맞지 않는 학습 내용이 제시될 때 오개념이 형성되며, Ausubel은 새로운 성행 개념에 잘못 연결될 때 오개념이 형성된다(최승현, 1999).'고 보고 있다. 이 밖에 Bruner의 '표기법 이론'이나 van Hiele의 기하적 사고력 발단 단계이론, Skinner의 '프로그램 학습이론'이나 Thorndike의 '준비성의 법칙' 등의 공통점은 학생의 인

지 능력, 즉 학생들의 사고수준을 고려한 학습지도가 이루어져야 인지적 갈등이 최소화되어 오개념이나 오류 발생을 예방할 수 있을 것이라고 본다.

◆ 정의적 요인으로 학습에 긴장감이나 집중력 부족, 지나친 일반화나 불완전한 일반화는 오개념 형성과 관련이 있다. 학습 문제의 근원으로써 오개념을 설명하려 하지 않고 교사들은 학생의 부주의나 게으름의 산물로 오개념이 형성된다는 것을 비판할 수도 있다. 그러나 '신념, 태도, 흥미, 욕구, 감정 등 정의적 요인은 수학 교수·학습에서 중요한 역할을 한다(Hart & Walker, McLeod. 권성룡 외, 2005에서 재인용).'고 볼 때, 학습 태도와 습관은 오개념 형성과 관련이 깊다. 예컨대, 수업에 대한 긴장감이나 집중력 부족으로 형성된 잘못된 선개념이나 개념 이미지는 새로운 개념의 의미를 축소·왜곡함에 따라 오개념이 형성될 수 있다. 또, 23=20+3으로부터 2x=20+x라고 생각하는 것처럼 학습 습성에서 개념이나 원리·법칙에 대해 지나친 일반화(판단의 비약)나 [그림 6]처럼 삼각형의 높이는 삼각형 내부에 존재하며, 꼭짓점과 가장 긴 변에 그은 수선이라고 높이 개념을 제한하는 불완전한 일반화 등은 오개념을 형성시킬 가능성이 높다.



[그림 6]

2. 외적 요인

외적 요인은 교수·학습 환경과 밀접한 관계가 있다. 최승현(1999)은 오개념 형성의 외적 요인을 물리적 환경, 사회·문화적 환경, 학교 환경으로 분류하고 있다. 물리적 환경은 학습자의 주변에 있는 모든 물체 및 물리적 현상으로 구성되며, 사회·문화적 환경은 인적 요인(가족 등 주변 사람)과 물적 요인(TV 등 문화적 매체)으로 구성된다. 그리고 학교 환경은 인적 요인(교사, 동료 등) 과 물적 요인(교과서, 수업 매체)으로 구성되는 데 이들과 상호작용하는 과정에서 오개념이 형성되는 것으로 보고 있다.

어린이가 처음 말을 배울 때, 그들 스스로 배우기보다는 주변의 인적·물적 환경의 영향을 크게 받는 것처럼 수학적 개념 형성에 커다란 영향을 미치는 외적 요인 중 학생의 학습과 직접적으로 상호작용하는 대상은 교사, 교과서, 부모와 동료, 대중 매체 등을 생각할 수 있다.

◆교사 요인 : 교사의 자질은 교육의 성패를 좌우할 만큼 학생의 학습에 가장 큰 영향력을 미치는 사람은 교사이다. 특히 인지적 구조가 미분화의 상태에 있으며, 호기심 및 주위 환경의 자극에 민감한 초등학생을 지도하는 과정에서 교사의 역할은 매우 중요하다. 오개념 형성과 관련된 교사 변인으로써, ① 교사가 개념에 대한 이해가 부족하거나 잘못된 설명, ② 교수·학습 과정의 비약이나 소홀함 등 미숙한 교수법(Ben-Hur, 2006), ③ 개념에 대한 탐구 및 활용 기회 부족, ④ 선수학습 상태의 미확인, ⑤ 유의미한 이해중심의 학습보다 기억중심의 교수·학습, ⑥ 용어나 기호의 조기도입 등을 들 수 있다.

◆교과서 요인 : 교과서는 교육 목적에 따라 학습시킬 필요가 있다고 인정된 지식 및 기능과 관련된 문화적 소재를 간결·명료하게 제시한 자료이다. 교사의 입장에서 본다면, 교과서는 교육과정에 근거하여 학생들이 실제로 배워야 할 내용을 보다 구체적이고 단순화하여 배우기 쉬운 형태로 제시해 놓은 하나의 자료일 뿐이다. 그러나 학생의 입장에서

볼 때, 교과서는 그들이 학습해야 할 내용을 제시한 하나의 모델로써 일정한 수준과 범위까지 스스로 읽고 이해하고, 제시된 문제를 해결하는 등 자기 주도적 학습을 지원하는 표준화된 자료이다. 오개념 형성과 관련된 교과서 변인으로써 ① 개념 진술의 오류나 불명료함, ② 용어의 잘못된 선택 및 문장의 문법적 구조에 따른 의미의 차이(황홍섭 · 류옥선, 2003), ③ 개념 진술의 부족이나 생략 등을 들 수 있다.

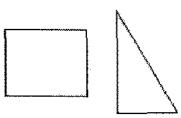
◆부모와 동료 요인 : 일상에서 정신적 부담을 덜 느끼며 자연스럽게 의사소통과 정보를 교류할 수 있는 대상이 부모와 동료이며 학생들은 일상에서 이들과 상호 교류하는 과정에서 형식적 · 비형식적 수학을 학습하게 된다. 오개념 형성과 관련된 부모나 동료의 변인으로써 부모나 동료가 가지고 있는 오개념이 자연스럽게 전이되며, 특히 일상생활 언어와 규약적 언어인 수학적 용어를 혼용함에 따라 오개념이 형성될 수 있으며, 때로는 언어를 경솔하게 사용하거나 사물들에 대해 언어를 오용함으로써 오개념이 형성될 수 있다.

◆대중 매체 요인 : TV나 라디오 등 대중매체가 학생들의 개념 체계에 주는 영향력은 막대하다. 이러한 매체에서 전달되는 내용 중에는 흥미 위주의 경솔한 언어나 오락성 언어 등은 오개념을 형성시킬 수 있다. 예컨대, 숫자 '63'을 읽을 경우 '예순 셋', 또는 '육십 삼'이라고 읽어야 함에도 '육십 셋'으로 읽거나 '+, -, ='등을 각각 '플러스, 마이너스, 이퀄'등 외래어와 외국어를 우리말과 혼용함으로써 오개념이 형성될 수 있다.

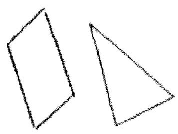
• 참고서나 사전 및 웹사이트(Website)등에 진술된 개념의 의미의 차이로 인해 오개념이 형성될 수 있다. 대부분의 학생들은 교과서에 진술된 개념을 표준으로 생각하고 있으나 학생들이 개인별로 손쉽게 접촉할 수 있는 참고서나 사전 및 웹사이트 등에서 잘못된 진술은 개념의 혼란 및 오개념을 형성할 수 있다.

◆그 밖의 요인 : • 언어 사용의 불명료성에서 오개념이 생길 수 있다. 개념을 정의한다는 것은 어떤 대상이나 현상에 이름을 짓는 것과 같다(Vinner, 1994. 류희찬 외 역, 2003에서 재인용). 특히 상 · 하위 개념이 밀접한 관계에 있는 개념 정의에 있어서는 언어의 사용에 신중하지 못할 경우 오개념이 형성될 가능성이 높다. 예컨대, 사다리꼴을 '적어도 한 쌍의 대변이 평행한 사각형'으로 정의하기도 하고, '한 쌍의 대변만이 평행한 사각형'으로 정의하기도 한다. 만일 첫 번째 정의에 따르면 평행사변형은 사다리꼴이지만, 두 번째 정의를 따르면 평행사변형은 사다리꼴이 아니다. 이처럼 언어 사용의 불명료성은 개념의 혼란을 가져올 수 있다.

• 개념 정의와 개념 이미지가 상충될 경우 오개념을 형성할 수 있다. 예컨대, 직사각형과 직삼각형을 지도할 경우, 학습 초기에 수학적 다양성이나 지각적 다양성을 소홀히 한 채 한정된 예를 제시하거나 [그림 7]처럼 바른 위치의 도형만 제시하여 개념을 지도할 경우 이 때 형성된 개념 이미지는 [그림 8]처럼 비스듬히 위치한 도형은 직사각형이나 직삼각형이 아닌 것으로 생각할 수 있다.



[그림 7]



[그림 8]

위에 열거한 오개념 형성의 요인은 어느 한 요인이 독립적으로 영향을 미칠 수도 있으나 복합적으로 작용하면서 오개념 형성에 영향을 미치는 것으로 볼 수 있다. 이러한 여러

요인에 따라 학습 초기에 형성된 오개념은 장기기억에 저장되기 때문에 전통적인 교수방법을 통해서는 쉽게 올바른 개념으로 대체되거나 변화되기가 어려우므로 초기의 개념지도가 올바르게 이루어져야 할 것이다.

Ⅳ. 연구 내용과 방법

1. 조사 대상

대구시 A영재교육원의 수학반 학생 80명(5학년: 40명, 6학년: 40명)이다. 조사 대상학생들은 각 학교별로 학교장 추천을 받은 학생(5학년: 288명, 6학년: 255명)을 대상으로 3단계 선발과정을 거쳐서 선발된 학생들이다. 1단계는 정규 교육과정에서 요구하는 수준의 학업성취도 평가와 2단계는 고차적인 사고력이 요구되는 수학 창의적 문제해결력 검사를 통하여 교육대상자의 2배수인 80명을 선발 하고, 3단계는 이들을 대상으로 수학 실험 · 실습 및 면접을 통하여 각 학년별로 최종 선발된 40명으로 약 8개월 동안 영재교육원에서 교육을 받은 학생이다.

2. 조사 내용 및 방법

• 2-6학년 수학교과서에 진술되어 있는 개념 및 수학 교수 · 학습에서 사용하고 개념 중 수와 도형 영역에서 사용 빈도가 높은 개념(용어) 17개를 무작위로 추출하였다.

• 조사 대상은 다음 <표 1>과 같으며, 교과서에 진술되지 않는 개념, 교과서에 문장으로 진술되지 않고 구체적 사례로 제시되는 개념, 교과서에 문장으로 진술된 개념 등으로 분류하였다.

• 조사 방법은 질문지법을 따랐으며, 응답형식은 각 용어의 의미를 자유롭게 진술할 수 있는 자유반응형으로 조사하였다.

<표 1> 조사 대상

영역	조사 대상 개념
수	홀수와 짝수(○), 약수와 배수(●), 분수(◇), 기약분수(●) 약분과 통분(●)
도형	가로와 세로(○), 높이(●), 선분(●), 직선(●), 변(◇), 각(●), 대각선(●), 예각과 둔각(●), 삼각형(●), 직사각형(●), 사다리꼴(●), 합동(●)

※ 교과서에 진술되지 않는 개념:○, 구체적 사례로 제시된 개념:●, 교과서에 문장으로 진술된 개념:◇

3. 등급 분류 준거 및 분석 방법

• 등급 분류 준거는 California 평가 프로그램의 일반화된 4단계 평가 척도(Stenmark, 1991)를 번안하여 개념의 이해 수준을 다음 <표 2>처럼 3단계로 단순화하여 분류하였다.

• 분석 방법은 진술 내용을 총괄 배점(holistic scoring)방식으로 분석하여 각 등급별 빈

도를 백분율로 통계 처리하였다.

• 내용 준거는 초등학교 교과서 및 수학사전(박을룡 외 4인, 1993)의 진술에 따랐다.

• 등급 부여는 수, 도형 영역의 조사 대상 개념에 대해 그 의미를 서술식으로 진술한 내용을 분석하되 등급 구분의 애매함을 조정하기 위해 수학교육 석사학위 이상의 자격을 소지한 현직 교사 5명의 합의를 거쳤다.

<표 2> 등급 및 분류 준거

등급	등급 분류 준거
A	개념에 대한 올바른 진술
B	진술이 부족 · 불명료하지만 개념의 의미를 이해함
C	개념에 대해 잘못 이해하고 있음

4. 오개념 형성의 배경에 대한 조사

개념 및 오개념 형성 배경은 학생마다 다양하기 때문에 그 근원을 정확하게 파악하는 일은 매우 어려운 일이다. 본 연구에서는 영재프로그램 운영에 참여한 지도교사(전문과정 이상을 이수한 교사) 4명과 석사학위 이상의 자격을 소지한 현직 교사 5명을 대상으로 합동 토론을 통하여 그 배경을 살펴보았다.

V. 연구 결과

1. 개념별 진술 내용 분석

홀수와 짝수 : 2011년부터 적용하는 수학교과서(5-1)에서는 '수 2, 4, 6, 8, 10…과 같이 2로 나누어 떨어지는 수를 짝수라 하고, 1, 3, 5, 7, 9…와 같이 2로 나누어 떨어지지 않는 수를 홀수라고 합니다.'라고 예시와 함께 용어를 정의하고 있다. 그러나 이전 교과서에서는 개념에 대한 정의 없이 예시만 제시하고, '짝수는 어떤 수인가?, 홀수는 어떤 수인가?' 라고 홀수와 짝수라는 분류하도록 하고 있다. 전체의 96%가 개념을 올바르게 이해하고 있으며, 그 중 약 25%의 학생은 n이 정수일 때, 짝수는 2n, 홀수는 2n-1이라는 반응을 보인 것은 사교육을 통한 선행학습의 영향을 받았다고 판단된다.

<표 3> 홀수와 짝수

등급	진술 내용	5학년	6학년	평균(%)
A	• 2의 배수를 짝수, 짝수가 아닌 수를 홀수 • 2로 나누어 떨어지는 수를 짝수, 2로 나누어 떨어지지 않는 수를 홀수라고 한다. • 짝수는 정수 n을 취하면 2n, 홀수는 2n-1로 나타낼 수 있는 정수	95	97.2	96.1
B	• 짝수는 0을 제외한 2의 배수, 홀수는 짝수가 아닌 수	0	2.8	1.4
C	• 홀수는 1부터, 짝수는 2부터 시작하여 2씩 늘어나는 수	5	0	2.5

약수와 배수 : 교과서(5-가)에서는 사례 제시를 통하여 약수와 배수 개념을 정의하고 있다. 완전한 진술은 아니지만 그 의미를 이해하고 있는 학생이 약 87%이다. 한편 약수보다는 배수에 대한 개념 진술이 불완전하거나 오개념을 가진 학생이 약 10%정도 높으며, 약수에 대한 개념 진술 중에는 '나머지 없이', 또는 '나누어 떨어지는'이라는 용어를 생략한 학생이 약 10%정도이다.

<표 4> 약수와 배수

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 배수는 어떤 수를 1배, 2배, … 한 수를 그 수, 또는 어떤 수를 정수 배 한 수이고, 약수는 어떤 수를 나머지 없이 나눌 수 있는 수 • a, b, c∈N일 때, a×b=c에서 c를 a, b의 배수라 하고, a, b를 c의 약수라고 한다. • 정수 a를 정수 b로 나머지 없이 나눌 수 있을 때, a를 b의 배수, b를 a의 약수라 한다.	45	47.2	46.1
B	• 배수는 어떤 수를 여러 번 더하여 나오는 수, 약수는 그 수를 나누어 떨어지게 하는 수 • 배수는 어떤 수의 곱으로 이루어진 수, 약수는 어떤 수로 나누어 지는 수	42.5	38.9	40.8
C	• 배수는 어떤 수를 나눌 수 있는 수이고, 약수를 어떤 수로 나누어 떨어지는 수 • 곱하는 수와 곱해지는 수	12.5	13.9	13.2

분수 : 교과서(2-2)에서는 개념 정의가 없이 등분할의 관점에서 전체와 부분 사이의 관계로 분수를 도입하고, '$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, …… 등과 같은 수를 분수라 한다.'고 사례를 제시하고 있다. 분수의 개념 도입은 학자들에 따라 의견이 다양하지만 일반적으로 등분할의 관점, 비율의 관점. 양의 관점, 몫의 관점(수의 관점)에서 분수 개념을 도입할 것을 권고하고 있다. 약 20%는 나눗셈의 몫으로 분수의 의미를 진술한 반면, '분자와 분모로 이루어진 수'라는 구성 요소로 진술한 학생이 57%이며, <표 5>의 등급 C처럼 15%의 학생은 개념 진술이 올바르지 않다.

<표 5> 분수

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 정수 a를 0 이 아닌 정수 b로 나눈 몫 • 분수 a/b는 1을 b등분하여 a개 모은 수 • a의 b에 대한 비 a:b의 값 • 전체 중에 어느 특정한 부분을 나타내는 값 등	23	28	25.5
B	• 분자와 분모로 이루어진 수	61	53	57
C	• 1보다 작은 수, • 자연수가 아닌 수, • 소수로 고칠 수 있는 수 등	16	15	15.5
무응답		0	4	2

기약분수 : 81%의 학생들은 기약분수의 의미를 올바르게 진술하였다. 그 중에서 약 10% 정도의 학생들은 '분자와 분모가 서로소인 분수'라는 학년 수준 이상의 용어로 진술한 것은 선행학습의 영향을 받은 것으로 생각된다. 반면 19%의 학생들의 진술이 부정확하거나 응답을 하지 못했다.

<표 6> 기약분수

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 분모와 분자의 공약수가 1뿐인 수 • 분자, 분모가 서로소인 수 • 분모와 분자 사이에 공약수를 갖지 않은 분수	84	78	81
B	• 분자가 분모로 나누어떨어지지 않는 분수 • 더 이상 나누어지지 않는 분수	8	5	6.5
C	• 분자가 1인 분수 • 더 이상 쪼개어지지 않는 분수	5	11	8
무응답		3	6	4.5

약분과 통분 : 55.5%의 학생만 약분과 통분의 의미를 바르게 진술하였으며, 44.5%는 진술이 부정확하거나 잘못 진술하고 있다. 잘못된 진술의 내용은 '공약수로 나누는 것'에서 '공약수' 등의 용어를 생략하거나 '최대공약수로 나누는 것'처럼 불필요한 용어인 '최대공약수'라는 용어로 진술하였다.

<표 7> 약분과 통분

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 분모와 분자를 그들의 공약수로 나누는 것을 약분, 분수의 분모를 같게 하는 것을 통분한다고 한다.	58	53	55.5
B	• 분자와 분모를 최대공약수로 나누는 것을 약분, 분모들의 최소공배수로 고치는 것을 통분이라고 한다. • 기약분수로 고치는 것을 약분	34	33	33.5
C	• 분수를 어떤 수로 나누는 것을 약분이라 하며, 곱하는 것을 통분 • 똑같이 나누는 것을 약분, 똑같이 곱하는 것을 통분	8	11	9.5
무응답		0	3	1.5

가로와 세로 : 가로, 세로라는 용어는 교과서에 정의되지 않고 일상용어와 혼용하는 직사각형의 구성 요소이다. 80.5%의 학생은 가로, 세로를 각각 수평 방향과 연직 방향으로 생각하고 있으며, 19.5%의 학생들은 '가로'를 '눕혀진 선' 등으로 그 의미를 잘못 진술하고 있다. 이는 교과서에 정의되어 있지 않는 것도 그 한 요인이지만 개념을 도입할 때, 그 사례로써 수평 방향과 연직 방향을 제시함으로써, 그리고 수평면과 일치하도록 배치한 직사각형만 대상으로 개념을 도입으로써 개념 정의와 개념 이미지가 잘못 형성된 것으로 판단된다. 이러한 오개념 형성을 예방하기 위해서는 올바른 범례 제시 및 언어의 사용을 명확히 할 필요가 있다.

<표 8> 가로와 세로

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 직사각형에서 직각을 낀 두 변 중에서 한 변을 '가로'라면, 다른 한 변을 '세로'라고 한다.	0	0	0
B	• 상하로 늘인 선을 '가로', 좌우로 늘인 선을 '세로' • 바닥에 평행인 선을 '가로', 높이에 평행인 선을 '세로'라 한다. • 수평인 선을 가로, 수직인 선을 세로	82	79	80.5
C	• 아래쪽 선분을 가로, 마주보는 선분을 세로 • 눕혀진 선을 가로, 세워진 선을 세로	15	13	14
무응답		3	8	5.5

높이 : 가로, 세로처럼 일상용어와 혼용하지만 교과서에 개념 정의가 되어있다. 그러나 10%정도의 학생만 개념을 이해하고 있고, 나머지 학생들은 개념의 의미에 혼란을 느끼고 있다. 이 역시 일상의 경험을 통한 선개념으로 인해 개념과 개념 이미지 사이의 갈등으로 인해 개념 정의를 잘못 진술한 것으로 판단된다.

<표 9> 높이

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 삼각형의 꼭짓점에서 밑변에 수직으로 그은 선분 • 꼭짓점에서 그 맞변에 그은 수선 • 평행사변형에서 두 밑변 사이의 거리	8	13	10.5
B	• 밑변에 수직인 선 • 꼭짓점에서 내린 수직으로 내린 선 • 평행인 변 사이의 길이	51	53	52
C	• 맨 아래에서 맨 위로 그은 선분 • 밑과 위의 간격 • 물체의 높은 정도 • 세로의 길이 • 두 변 사이의 길이	36	29	32.5
무응답		5	5	5

선분과 직선 : 교과서(2-1)에 선분은 '두 점을 곧게 이은 선'으로, 직선은 '양쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선'으로 진술되어 있지만 약 10%정도만 올바르게 진술하고, 약 90%의 학생들은 선분의 정의에서 '곧은 선'이라는 단어를 생략한 채 '두 점을 잇는 선', '끝 점이 있는 선'등으로 진술하고 있다. 이러한 현상은 실생활 장면에서 각종 선의 개념 이미지를 구성할 수 있는 대상이 부족한 것도 그 요인으로 작용했을 수 있지만, 상·하위 개념의 연결성 부족과 또 선의 개념을 서로 분리하여 지도하기 때문이라 판단된다. 수학적 개념은 추상적인 것이기 때문에 명확한 개념형성을 위해서는 개념 정의와 함께 구체적인 실험, 실측 등을 통한 확인이 뒤따라야 할 것이다.

<표 10> 선분

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 두 점을 곧게 이은 선 • 두 점 사이를 연결한 가장 짧은 선 • 양끝에 한정되어 있는 직선의 한 부분	3	19	11
B	• 두 점을 이은 선 • 직선의 일부분	74	60	67
C	• 끝이 있는 선 • 도형을 이루는 선 • 점들이 끝없이 이어진 선	20	21	20.5
무응답		3	0	1.5

<표 11> 직선

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 양쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선 • 끝점은 존재하지 않는 곧은 선	8	11	9.5
B	• 곧게 뻗은 선 • 끝이 없는 선 • 양쪽으로 끝없이 늘어나는 선	63	60	61.5
C	• 구부러지지 않는 선 • 길이가 한정되어 있지 않은 선 • 곡선이 아닌 선 • 무한한 길이의 직선	29	29	29
무응답		0	0	0

꼭짓점 : 교과서(2-1)에서는 도형 위 구성 요소의 하나로 용어 정의 없이 변의 개념을 도입하고 있다. 5학년의 32%, 6학년의 47%만 꼭짓점의 개념을 올바르게 이해하고 있다. 진술된 오개념을 살펴보면, 약 50%의 학생들은 꼭짓점과 교점을 혼돈하는 것으로 나타났다. 대부분의 학생들은 제시된 도형에서는 꼭짓점을 바르게 지적하면서도 문장으로 진술하는 데 어려움을 겪고 있다. 이는 교과서에서 용어 정의가 없이 도형의 구성 성분의 하나로 꼭짓점을 제시하고 있는 데 기인한다고 볼 수 있겠다.

<표 12> 꼭짓점

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• (다각형에서) 몇 개의 변이 만남 점, 또는 (다면체에서) 몇 개의 모서리가 공통으로 만난 점	32	47	39.5
B	• 각을 이루는 곳 • 변과 변이 꺾이는 곳의 점	16	25	20.5
C	• 두 선분이 만나는 점 • 도형의 끝 점 • 도형에 있는 점,	52	25	38.5
무응답		0	3	1.5

변 : 교과서(2-1)에서는 도형 위 구성 요소의 하나로 용어 정의없이 변의 개념을 도입하고 있다. 수학사전(박을룡 외 4인, 1993)에서는 '다각형을 형성하고 있는 선분'으로, 국어사전(이희승, 1974)에서 변(邊)을 '다각형의 변두리의 선분'라는 의미를 생각해 보면, '다각형을 둘러쌓고 있는 선분'도 정의에 포함시켰다. 41.5%의 학생들은 변을 '도형을 이루는 선' 등 불완전한 진술을 하는 것은 선과 선분의 의미를 바르게 구별하지 못한 것에 기인하는 것으로 해석할 수 있다. 23%의 학생은 잘못된 개념을 갖고 있다. 이러한 현상은 권유미, 안병곤(2005)의 연구에서도 유사한 결과가 도출되었다.

<표 13> 변

등급	진술 내용	5학년	6학년	평균 (%)
A	• 다각형을 형성하고 있는 선분 • 다각형을 둘러쌓고 있는 선분	32	34	33
B	• 도형을 이루는 선 • 도형에 있는 선분 • 도형을 이루는 선	44	39	41.5
C	• 도형 위의 선 • 도형에서 두 점을 잇는 선분 • 도형의 모서리	24	22	23
무응답		0	5	2.5

각 : 18%의 학생만 올바르게 진술하고 84%는 진술이 불명료하거나 부정확하다. 교과서(3-1)에서는 '한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형'으로 진술하고 있다. 교과서의 진술에서 '직선'이란 용어를 사용하는 것은 '반직선'이란 용어를 사용하지 않기 때문에 대안적인 용어 사용이 불가피하다고 볼 수 있지만 이는 '직선'에 대한 또 다른 오개념을 형성할 가능성을 배제할 수 없다. 이러한 현상을 예방하기 위해서는 각을 정의함에 있어서 '반직선'이란 용어의 사용을 고려해 볼 필요가 있다.

<표 14> 각

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형, 또는 겹쳐진 두 선분 중 어느 한 선분이 일정한 방향으로 회전하였을 때 생긴 도형	13	19	16
B	• 선과 선이 만난 곳 • 두 선분이 교차하는 부분 • 두 선(선분)이 만나 이룬 도형 등	58	60	59
C	• 두 선분 사이의 크기 • 두 선분의 기울기 등	29	21	25
무응답		0	0	0

대각선 : 교과서(4-2)에서 대각선이란 '이웃하지 않은 두 꼭짓점을 이은 선분'으로, 수학사전(박을룡 외 4인, 1993)에서는 '다각형에서 같은 변 위에 있지 않는 두 꼭짓점을 이은 선분, 또는 '다면체에서 같은 면 위에 있지 않는 두 꼭짓점을 이은 선분'으로 정의하고 있다. 그러나 36.5%만 바르게 진술하고, '꼭짓점을 이은 선분', '이웃하지 않는 점을 이은 선', 도형을 가로지르는 선' 등 진술의 일부를 생략하거나 잘못 진술한 학생이 63.5%가 이른다. 진술 내용을 살펴보면, 선과 선분의 개념을 구별하지 못하는 학생이 많다.

<표 15> 대각선

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 다각형에서 이웃하지 않는 두 꼭짓점을 이은 선분, 또는 다각형에서 같은 변 위에 있지 두 꼭짓점을 이은 선분	37	36	36.5
B	• 이웃하지 않는 두 점을 이은 선 • 도형에서 점과 점을 이은 선	29	28	28.5
C	• 두 꼭짓점을 이은 선 • 가로지르는 선 • 기울어진 선	31	28	29.5.
무응답		3	8	5.5

예각과 둔각 : 교과서(4-1)에서 '직각보다 작은 각을 예각', 직각보다 크고 180°보다 작은 각을 둔각'이라고 정의하고 있는 데, 38%의 학생들이 교과서의 진술 방식대로 표현하였으나 62%는 직각을 기준으로 '직각보다 큰 각, 직각보다 작은 각' 등으로 진술하고 있다. 특히 직각은 교과서 진술과 일치하는 학생이 많으나 둔각에 대해서는 각의 범위(90°<둔각<180°)에 진술이 부족하다.

<표 16> 예각과 둔각

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 직각보다 작은 각(0°<예각<90°)을 예각, 직각보다 크고 180도보다 작은 각(90°<둔각<180°)을 둔각	37	39	38
B	• 직각보다 큰 각을 둔각, 직각보다 작은 각을 예각. 또는 90°<둔각	63	61	62
무응답		0	0	0

삼각형 : 교과서(2-1)에서 삼각형을 '3변으로 둘러쌓인 도형'으로 정의하고 있으나 24.5%만 정의를 올바르게 진술하고, 나머지 학생들은 '각이 3개인 도형', '변이 3개인 도형' 등 삼각형의 성질을 정의로 잘못 진술하고 있다. 초등학교의 도형지도에서 정의와 성질을 구별할 필요가 없다고 생각할 수도 있으나, 도형의 변별을 용이하게 하고 올바른 추론을 하도록 하기 위해서는 정의와 성질은 구별하여 지도할 필요가 있다(河部浩一 外 2인, 1973).

<표 17> 삼각형

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 3개의 선분으로 둘러싸인 도형 • 동일한 직선 위에 있지 않는 세 점을 연결한 도형	21	28	24.5
B	• 변과 각이 3개인 도형 • 세 변과 세 각이 있는 도형 • 세 각의 합이 180°인 도형	79	69	74
무응답		0	3	1.5

사다리꼴 : 교과서(4-2)에서는 사다리꼴을 '마주보는 한 쌍의 변이 서로 평행한 사각형'으로 정의하고 있으나 올바르게 진술을 한 학생은 25.5.%이며, 74.5%는 개념에 대한 진술이 부정확하거나 불명료하다. 예컨대, 사다리꼴 정의에서 '마주보는'이라는 용어를 생략하거나 '사각형'이란 용어를 생략한 채 '한 쌍이 평행한 도형 등'으로 진술한 것은 개념 정의에서 상·하위 개념의 연결성 부족이나 언어 사용의 불명료성으로부터 오개념을 형성할 가능성이 있음을 보여주는 사례이다.

<표 18> 사다리꼴

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 한 쌍의 마주보는 변이 서로 평행한 사각형	21	30	25.5
B	• 한 변이 평행한 사각형 • 한 쌍의 변이 평행한 사각형	69.2	54.5	61.9
C	• 밑변과 윗변이 평행한 사각형 • 한 쌍이 평행한 도형 • 마주보는 변이 평행한 사각형 등	9.8	15.5	12.6
무응답		0	0	0

직사각형 : 교과서(3-1)에서 직각사각형을 '네 각이 모두 직각인 사각형'으로 정의하고 있다. 80%의 학생은 바르게 진술하고, 20%의 학생은 '4개의 선분으로 이루어진 도형', 또는 4개의 변과 4개의 각으로 이루어진 도형'등 사각형의 성질을 사각형의 개념으로 잘못 진술하고 있다.

<표 19> 직사각형

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 네 각이 모두 직각(90°)인 사각형 • 네 각의 크기가 같은 사각형	79	81	80
B	• 4개의 선분으로 이루어진 도형 • 각이 4개인 도형, 변이 4개인 도형	21	19	20
무응답		0	0	0

합동 : 교과서(5-나)에서는 합동을 '모양과 크기가 같아서 완전히 포개어지는 두 도형'이라고 정의하고 있다. 합동의 정의는 변환의 관점에서 '포개었을 때, 완전히 겹쳐지는 두 도형', 또는 '대응하는 변의 길이와 각의 크기가 모두 같은 두 도형' 등 2가지 관점에서 정의할 수 있다. '모양과 크기가 같아서 포개었을 때, 완전히 겹쳐지는 도형'으로 진술한 학생은 없으나, '모양과 크기가 같은 도형'이라고 진술한 학생이 57.5%이다. 그 밖의 학생은 합동의 의미는 알고 있으나 표현이 미숙하여 '모양이 같은 도형', '겹쳐지는 도형', '똑같은 도형'등을 진술하고 있다.

<표 20> 합동

등급	진술 내용	5 학년	6 학년	평균 (%)
A	• 모양과 크기가 같아 완전히 겹쳐지는 두 도형 • 모양과 크기가 같은 도형	62	53	57.5
B	• 각의 크기나 변의 길이가 같은 도형 등	24	28	26
C	• 모양이 같은 도형 • 같은 도형 • 겹쳐지는 도형 등	14	19	16.5
무응답		0	0	0

2. 오개념 분석 결과에 대한 논의

본 연구는 영재교육 대상자의 선발과정을 살펴보면, 일반 학급과 학교에서 수학적으로 남다른 재능을 갖고 있다고 판단되는 학생을 추천하고, 이들을 대상으로 각 영재교육 기관별로 일정한 선발기준(학문적성 검사, 창의력 문제해결력 검사, 관찰·추천, 면접 등)을 정하여 그 요건을 충족하는 학생들을 대상으로 교육을 실시한다고 볼 때, 조사 대상 학생들은 일반 학생들에 비하여 학력 수준이 매우 높다고 할 수 있다. 따라서 수학적 개념이나 원리·법칙에 대한 이해력이 매우 우수한 것으로 생각할 수 있다. 그러나 본 연구 결과는 일반인들의 예상과 차이가 있다. 개념에 대한 전체적인 이해도는 6학년이 약간 높았으나 학년 사이에는 유의미한 차이가 나지 않았다. 오히려 '기약분수', '약분과 통분', '합동' 등 5학년에서 취급하는 용어에 대해서는 5학년이 6학년보다 이해도가 좀 더 높은 것으로 나타났다.

교과서에 개념을 범례로 제시한 '홀수, 짝수'에 대해서는 96.1%가 개념을 올바르게 진술하였으나, '분수', '변'의 개념에 대해 올바르게 진술한 학생이 각각 25.5%, 33%로 개념을 올바르게 진술한 빈도가 낮다. 그 배경은 일상에서 활용하는 빈도와 상관성이 있는 것으로 추정된다. 한편 생활용어와 규약용어로 혼용하는 '가로, 세로', '높이'에 대해서 올바르게 진술한 학생은 각각 0%, 10.5%로 매우 낮은 편인데, 그 배경은 초기 개념을 지도함에 있어서 범례로써 수평 방향을 '가로', 연직 방향을 '세로'로 제시함에 따른 잘못된 개념적 이미지 형성과 언어 사용의 불명료화 및 제한된 경험에 대한 비약적 일반화에 기인한 것으로 생각된다. 이러한 현상은 저학년 때 개념형성이 올바르게 이루어지지 않았기 때문으로 추측할 수 있다. 개념 형성 수준은 상대적인 것이며, 합의된 수준 구별은 없지만 다음과 같이 4수준으로 구별할 경우, 조사 대상 학생들의 개념 형성 수준은 4수준에 도달해야함에도 불구하고 언어적 표현력이 부족하여 2수준과 3수준에 있는 학생이 많다.

<표 21> 개념형성 수준

수준	특 징
1수준	주어진 대상을 명확하게 종합적으로 의식하는 수준
2수준	관점에 따라 예(例)와 비례(非例)의 구별. 즉 이질성을 인식하는 수준
3수준	개념의 공통적 속성을 인식하고, 자신의 표현으로 기술할 수 있는 수준
4수준	정의를 문자나 기호로 명확하게 표현하고, 예를 들어 설명할 수 있는 수준

오개념 형성요인은 개인에 따라 다양하기 때문에 정확하게 파악하는 것은 어려운 일이다. 본 연구에서는 영재프로그램 운영에 참여한 교사들이 실제 수업 장면에서 경험한 학생들과의 질의·응답 내용을 바탕으로 오개념 형성 요인을 정리하면 다음과 같다.

• 사교육 등을 통한 설명과 기억 중심의 선행학습으로 인해 개념에 대한 유의미한 이해가 부족하다.

• 교사들의 개념 지도의 소홀. 예컨대, 언어 사용의 불명확성, 제한된 범례 제시, 개념의 외연과 내포 사이의 구별 소홀, 개념에 대한 구체적인 실험·실측의 부족 등을 생각할 수 있다. 이러한 현상은 노영아, 안병곤(2007)의 연구에서도 유사한 결과가 도출되었다.

• 개념의 사례로써 구체적 대상이나 현상에 대해 규약언어인 수학용어와 일상 언어의 혼용하는 속에서 잘못 형성된 선개념 및 '가로, 세로'처럼 개념적 이미지와 개념 정의 사이의 갈등으로 인해 오개념이 형성될 수 있다.

• 교과서에서 개념 예시가 부족하거나 생략된 경우, 예컨대, 선분과 직선처럼 개념 정의에 필요한 범례(examples과 non-examples) 제시가 없거나 개념학습 절차(범례제시→분류→examples로부터 공통성 찾기→개념 정의하기→실험, 관찰을 통한 확인)를 소홀히 다룸으로써 오개념이 형성될 수 있다.

• 참고서나 대중 매체의 영향 등을 생각해 볼 수 있을 것이다. 수학교육에 대한 전문성이 부족한 일반인에 의해 집필되거나 방송되는 불명확하거나 불명료한 수학 용어의 사용은 학생들의 오개념 형성에 영향을 미친다고 볼 수 있다.

이러한 오개념 형성 배경을 교사들이 인지하고 수학적 개념 지도 시 참고자료로 활용할 수 있어야 할 것이다.

VI. 오개념 해소 방안

많은 연구에 의하면 이미 형성된 오개념을 바꾸기가 힘들다고 한다. Ben-hur(2006)는 학생 스스로 오개념을 수정하기가 어렵기 때문에 오개념을 수정하는 과정에 교사가 핵심적인 역할을 담당할 것을 권고하고 있다. 여러 연구에 의하면(Derry, Levin, Osana & Jones, 1998;Lehman, Lempert, & Nisbett, 1988;Nisbett, Fong, Lehman, & Cheng, 1987; Ben-Hur, 2006에서 재인용) 오개념은 심리학적으로 다루어야 하며, 오개념을 바로잡기 위한 지도는 연계된 내용에 잠재되어 있는 인식의 구조에 대해 잘 알아야 하고, 가르치려는 개념과 관련된 다양한 응용활동 중에서 색다른 경험을 제공함으로써 오개념을 바꿀 수 있다고 보고 있다. 즉 학생들이 가지고 있는 선개념을 확인하고, 인지적 갈등을 유발시켜 이를 해소하는 방향으로 교수·학습을 전개해야 할 것이다. 오개념 해소를 위한 일반적인 학습 모형으로 Lawson(1988. 최승현, 1999에서 재인용)은 순환학습 모형으로 탐구단계, 개념 또는 용어의 도입단계, 개념의 응용단계의 세 단계를 제시하였으며, 황홍섭 외 7인(2000. 황홍섭, 류옥성, 2003에서 재인용)은 직관단계, 갈등단계, 조절단계, 균형화 단계 등 4단계를 제시하고 있다. 이들 연구를 종합하여 본 연구자는 다음 5단계를 제안한다.

◆ 1단계는 진단단계로 새로운 개념에 대한 기존의 인지구조를 파악하는 단계로써 새로운 개념을 학습하기 이전에 그 개념에 대한 어떤 선개념이나 오개념을 가지고 있는지를 살펴보아야 한다. 이 단계에서 학생들이 어떤 개념에 대해 어떻게 생각하는지를 미리 파악하고 예측하기 위해 지필, 구두, 면담, 사례 제시 등 여러 도구를 이용한 진단평가를 통하여 오개념의 내용이나 수준을 파악한다.

◆ 2단계는 갈등단계로 학생 자신이 갖고 있는 개념이 오개념임을 깨닫고 이를 수정·보완할 필요성을 느끼게 하는 등 인지적 갈등을 겪도록 하는 단계이다. 이 단계에서 학생들은 어떤 개념에 대해 자신이 생각하고 있는 것을 구두 표현, 문자, 시각화 등 여러 대체 가능한 방법으로 표현하고 동료나 교사, 교과서 등에 진술된 개념과 대조·비교함으로써 자신이 잘못 이해하고 있는 부분을 발견하도록 한다.

◆ 3단계는 조절단계로 오개념에 대한 인지적 갈등을 최소화하는 단계이다. 이 단계는 새로운 경험이나 탐구활동을 통한 새로운 개념 이미지를 형성하고, 자기반성(meta-cognitive awareness)의 기회와 교사나 동료와 함께 오개념에 대하여 토론과 같은 상호작용을 통해 갈등을 최소화하게 된다. '사람들의 경험을 통해 개념을 만들며, 새로운 경험에 적응하는 활동적인 과정을 통해 개념을 발전시킨다(Ben-Hur, 2006).'고 볼 때, 지각적·수학적 다양성을 경험할 수 있는 기회와 다른 사람의 관점을 경청하고, 피드백을 받고, 의견의 일치가 이루어질 수 있는 기회와 환경을 가져야 한다.

◆ 4단계는 균형화단계로 인지적 갈등이 해소되어 올바른 개념이 형성되는 단계, 즉 새로운 지식이 구성되는 단계이다. 인지적 갈등을 해소하는 과정에서는 자기 조정(regulation), 자기 모니터링, 자기 평가가 이루어져야 인지 구조가 평형화된다. 개념은 독립적로 존재하는 것이 아니라 다른 개념들과 관계망을 형성하고 있기 때문에 이 과정에서 그래픽 조직자(Organizers), 예컨대 벤 다이어그램, 개념도, 표, 시각적 표현방식 등은 메타-지식을 발전시키는데 강력한 도구들이다(Ben-hur, 2006). 이러한 도구들은 새로운 개념을 이해·발전시키고, 이전의 개념과 새로운 개념을 연결하여 지식과 정보를 공유하도록 도움

을 준다.

◆ 5단계는 응용단계로 형성된 개념과 용어를 새로운 상황에 적용해 봄으로써 새로운 개념이 인지구조 속에 확실하게 정착되는 단계이다. 국어에서 새로운 단어의 의미를 정착시키기 위해서 짧은 글짓기나 문장 표현을 해 보듯이 새로이 학습한 개념도 그 정착도를 높이기 위해 마음 속에 개념이 정말로 확고해졌다고 결정할 수 있을 때까지 학생들은 새로운 개념을 반복적으로 활용하는 경험을 해야만 한다.

Ⅶ. 결 론

수학영재 교육대상자로 선발된 학생들임에도 불구하고 수학 개념을 올바르게 진술하지 못하는 학생이 예상보다 많았다. 본 연구로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 개념을 문장으로 간결·명료하게 진술할 수 있는 학습 기회가 제공되어야 하겠다. 학생들은 구체적인 범례에서 예(例)와 비례(非例)는 구별할 수 있으나 문자나 기호 등으로 개념을 간결·명료하게 표현하는 능력이 부족하며, 개념의 의미는 이해하지만 부적당 용어나 불분명한 진술 및 용어를 생략하여 진술하는 경우가 있다. 수학적 개념은 단순한 지식의 획득이 아니라 문제 해결이나 고등 정신 기능의 신장의 전제 조건이 된다. 따라서 개념을 적절한 용어를 사용하여 간결하면서도 명료하게 진술할 수 있는 지도가 뒷받침되어야 할 것이다.

둘째, 오개념의 형성 배경은 개인에 따라 다양하다. 면담과 질의·응답, 개념에 대한 다양한 표현 등을 통하여 개인의 기억에 저장된 개념 이미지나 선개념, 그리고 오개념 형성 시기와 배경 등을 역추적하여 인지적 갈등 해소를 통한 교정지도가 이루어져야 할 것이다. 특히 생활용어와 수학용어의 혼용, 선행학습을 통한 개념의 조기도입이나 불명료한 개념 진술 등으로 발생한 오개념의 근원을 파악하여 교정해야할 것이다.

셋째, 개념을 형성했다는 것은 개념의 정의를 외고 있는 상태가 아니라, 그 개념을 다른 개념과 구별할 수 있고 일반화할 수 있는 상태이다. 수학적 개념은 추상적인 것이기 때문에 명확한 개념형성을 위해서는 개념 정의와 함께 구체적인 실험, 실측 등을 통한 확인이 뒤따라야 개념의 혼란이나 오개념을 예방할 수 있을 것이다.

넷째, 도형 영역에서 개념의 정의와 성질을 구별하여 지도할 필요가 있다. 초등학교 시절에는 정의와 성질을 혼합하여 지도해야 한다는 의견도 있으나 이는 또 다른 개념의 혼란을 가져올 수 있다. 그러나 '정의와 성질은 구별하여 지도함으로써 변별을 용이하게 하고 올바른 추론을 할 수 있다(河部浩一 外 2인, 1973).'고 볼 때, 구성 요소파악→공통점을 찾아 정의하기→정의를 이용한 도형의 변별→정의를 이용한 도형의 구성과 작도의 절차를 거치는 것이 오개념을 예방할 수 있을 것이다.

다섯째, 교과서에 진술에서 보다 세심한 배려가 필요하다. 홀수와 짝수, 가로와 세로, 선과 선분 등의 용어는 기초·기본적인 수학 용어로써 개념에 대한 정의가 교과서에 제시되어야 한다. 잘못된 선개념이나 개념 정의가 없이 새로운 개념을 정의하는 것은 오개념을 야기할 수 있기 때문이다. 아울러 개념의 혼란과 오개념을 예방하기 위해서는 초·중등학교 수학교과서 및 사전 등에서 사용하는 수학용어에 대한 일관성 있는 진술이 필요하다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). **수학 5학년-6학년 교과서**. 서울: ㈜천재교육.

교육과학기술부 (2010). **수학 2학년-4학년 교과서**. 서울: ㈜두산동아.

권성룡, 김남균, 김수환, 김용대, 남승인, 류성림, 방정숙, 신준식, 이대현, 이봉주, 조완영, 조정수 (2005). **수학의 힘을 길러주자**. 서울: 경문사.

권유미, 안병곤 (2005). 초등수학교과서에 사용되는 수학용어에 대한 학생들의 이해도 분석. **한국초등수학교육학회지, 2**(2), 137-159.

김부미 (2006). **수학적 오개념과 오류에 대한 인지심리학적 고찰**. 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.

노영아, 안병곤 (2007). 도형 영역의 오류 유형과 원인 분석에 관한 연구. **한국초등수학교육학회지, 11(2),** 199-216.

류희찬, 김인수, 조완영 역 (2003). **고등수학적 사고**. 서울: 경문사.

박선화 (1993). 개념학습에서 인지적 갈등 요인에 대한 고찰. **대한수학교육학회 논문집, 3**(1), 185-194.

박을룡, 김치영, 박한식, 조병하, 정지호 (1993). **콘사이스 수학사전**. 서울: 창원사.

이봉익 (1973). 개념학습에 관한 이론적 연구. **청주교육대학 논문집, 9**, 71-87.

이희승 (1974). **국어 대사전**. 서울: 민중서관.

정은실 (2001). 수학적 개념형성과 그 지도. **진주교육대학교 과학교육연구소, 27**, 95-110.

최승현 (1999). 수학적 오개념 발생에 관한 고찰. **교육과정 평가 연구, 2,** 59-73.

황홍섭, 류옥선 (2003). 초등사회과 지도(地圖)에 대한 오개념 분석과 오개념 학습방안. **한국초등사회과교육학회지, 15,** 271-300.

河部浩一・中島建三・岡淺次郎 (1973). 圖形概念の形成とその指導. 京; 明治圖書出版株式會社.

Ashlock, R. B. (2008). *Error patterns in computation: Using error patterns to help each student*. New York: Allyn & Bacon.

Ben-Hur. M. (2006). *Concep-rich mathematics instruction: Building a strong foundation for reasoning and problem solving*. Alexandria, VA: Assocation for Supervision and Curriculum Development.

Fischbein. E. (1996). The Psychological nature of concepts. In Mansfield, H., Pateman, N. A., & Bednarz, N (Eds.), *Mathematics for tommorrow's young children*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Stenmark, J. K. (1991). *Mathematics assessment: Myths, models, good questions and practical suggestions*. Reston, VA: National council of Teachers of mathematics.

<Abstract>

An Analysis on the Actual Conditions of the Mathematical Misconceptions Held by the Gifted Education Learners

Nam, Seung In[3]

The understanding of mathematical concepts should be backed up on a constant basis in oder to grow problem-solving skills which is one of the ultimate goals of math education. The purpose of the study was to provide readers with the information which could be considered valuably for the math educators trying both to prevent mathematical misconceptions and to develop curricular program by estimating the actual conditions and developing backgrounds of the mathematical misconceptions held by the gifted education learners. Accordingly, this study, as the first step, theoretically examined the meaning and the developing background of mathematical misconception. As the second step, this study examined the actual conditions of mathematical misconceptions held by the participant students who were enrolled in the CTY(Center for Talented Youth) program run by a university. The results showed that the percentage of the correct statements made by participant students is only 35%. The results also showed that most of the participant students belonged either to the level 2 requiring students to distinguish examples from non-examples of the mathematical concepts or the level 3 requiring students to recognize and describe the common nature of the mathematical concepts with their own expressions based on the four-level of concept formulation. The causes could be traced to the presentation of limited example, wrong preconcept, the imbalance of conceptual definition and conceptual image. Based on the estimation, this study summarized a general plan preventing the mathematical misconceptions in a math classroom.

Keywords: conception, mis-conceptions

논문접수: 2011. 03. 16
논문심사: 2011. 04. 04
게재확정: 2011. 04. 14

3) sinam@dnue.ac.kr