결정함수 가변스텝 LMS 알고리즘
Deterministic Function Variable Step Size LMS Algorithm

우홍채*
Hong-Chae Woo*

요 약

LMS(least mean square) 적응 알고리즘은 radar, sonar, 음성처리, 이동통신 분야 등에서 중요한 역할을 하고 있다. 이동통신 분야에서는 LMS 적응 알고리즘의 빠른 수렴속도가 더욱 중요하다. 하지만 LMS 알고리즘은 수렴속도가 느리고 일정치 않은 수렴을 하는 문제점을 가지고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 다양한 가변 스텝 LMS 적응 알고리즘들이 최근에 많이 연구되어왔다. 연구된 많은 LMS 알고리즘들은 빠른 수렴속도를 얻기 위하여 복잡한 가변스텝방식을 사용하는데 이는 많은 계산량을 필요로 한다. 따라서 LMS 알고리즘의 최대 장점인 단순성과 강인성을 약화시킨다. 제안하는 결정함수 가변스텝 LMS 알고리즘은 스텝 값을 간단한 결정함수에 따라 결정하므로 단순성을 최대한 강화하면서 빠른 수렴속도를 얻도록 한다.

Abstract

Least mean square adaptive algorithms have played important role in radar, sonar, speech processing, and mobile communication. In mobile communication area, the convergence rate of a LMS algorithm is quite important. However, LMS algorithms have slow and non-uniform convergence rate problem. For overcoming these shortcomings, various variable step LMS adaptive algorithms have been studied in recent years. Most of these recent LMS algorithms have used complex variable step methods to get a rapid convergence. But complex variable step methods need a high computational complexity. Therefore, the main merits such as the simplicity and the robustness in a LMS algorithm can be eroded. The proposed deterministic variable step LMS algorithm is based upon a simple deterministic function for the step update so that the simplicity of the proposed algorithm is obtained and the fast convergence is still maintainable.

Keywords : LMS, Adaptive filter, Computational complexity, Simplicity

I. 서 론

신호의 통계적인 특성이 바뀌거나 잘 알지 못할 때, 적응필터가 흔히 사용된다. 변화하는 환경에 적합한 적응필터 중에서 가장 많이 사용되는 방식이 LMS(least mean square) 필터 알고리즘이다. LMS 적응필터는 매우 단순하여 계산이 간단하고, 환경 변화에 강인한 특성을 보여주고 있다[1]. 하지만 일반 고정 스텝 LMS 적응필터는 최적필터 계수로의 접근이 상대적으로 느리고 수렴 특성 또한 일정하지 못한 문제점을 가지고 있다.

LMS 적응필터에서 최종 평균자승오차(mean square error, MSE)는 적응필터의 스텝 크기에 달려있다. 스텝의 크기를 어떻게 하느냐가 LMS 적응필터의 성능을 좌우하게 된다. 일반적으로 고정 스텝 크기를 크게 하면 수렴 속도는 빨라지지만 최종 MSE 값도 크게 된다. 반대로 고정 스텝 크기를 작게 하면 수렴 속도는 느리지만 최종 MSE 값은 작게 된다. 고정 스텝 LMS 적응필터는 수렴속도와 최종 MSE 값을 절충하여 스텝크기를 결정한다. 일반적으로 LMS 적응필터의 고정 스텝 크기는 경험적으로 결정할 수 밖에 없다. 서로 상반되는 LMS 적응필터의 특성은 지속적으로 새로운 해결책을 찾기 위한 노력을 계속하게 했다. 해결책 중에 가장 많이 추구한 접근방식이 스텝 크기를 바꾸는 가변 스텝크기(variable step size, VSS) LMS 적응필터 알고리즘들이 연구되어 왔다.

일반적으로 LMS 적응필터의 오류값은 스텝 크기를 변화시킬 수 있는 중요한 기준 신호이다[2]. VSS LMS 적응필터에서 초기 단계의 수렴 속도를 높이기 위하여 큰 값의 스텝이 사용되며, 적응필터의 최적 계수에 가까이 다가가면 스텝의 크기를 점차 줄이게 된다. 작은 스텝 크기는 최종 MSE 값을 작게 하기 때문이다. 이러한 방식으로 VSS LMS 적응필터는 빠른 수렴속도와 작은 최종 MSE 값을 얻을 수 있게 된다.

수많은 VSS LMS 적응필터 알고리즘들이 적응필터의 오류값을 활용하여 스텝의 크기를 변화시키는 방식으로 최근까지 제안되고 있다. Kwong 방식은 자승 오류값,

* 대구대학교
투고 일자 : 2011. 2. 9 수정완료일자 : 2011. 4. 28
게재확정일자 : 2011. 4. 30
*이 논문은 2010학년도 대구대학교 학술연구지원(혹은 일부지원)에 의한 논문임.

Mathews 방식은 오류값과 입력값 백터의 내적, Aboulnasr 방식은 오류값의 상관계수, Pazaitis 방식은 오류값의 자승 및 네 제곱값, Shin 방식은 오류값과 초과 오차값, Abusalem 방식은 축적된 오류값, 그리고 Zhang 방식은 오류값의 기울기를 사용한다[2][4-9]. 이러한 방식들은 주어진 조건 하에서는 상당히 좋은 성능을 보여주고 있다. 하지만 성능 향상을 위하여 사용한 가변 스텝값 계산식이 상당히 복잡하게 되는 또 다른 부작용이 발생하게 되었다.

본 논문에서는 가변스텝의 형식을 가진 LMS 적응필터이지만 결정함수를 사용하여 스텝의 크기는 바꾸는 LMS 적응필터를 제안하여, 매우 적은 계산량으로 가변 스텝을 계산하는 방식을 제안한다. 각 장의 내용으로 II장에서는 Haweel의 SVSS(simple VSS) LMS와 제안하는 LMS 알고리즘을 설명하며, III장에서 제안하는 LMS 알고리즘의 시뮬레이션 및 그 성능을 비교한다[3]. IV장은 결론이다.

II. 결정함수 스텝 LMS와 SVSS LMS 적응필터

일반적인 고정 스텝 LMS 적응필터를 수식적으로 표현하고자 한다. LMS 적응필터의 계수는 아래 식으로 나타낼 수 있다.

$$W(n+1) = W(n) + \mu e(n) X(n) \tag{1}$$

식(1)에서 $W(n)$은 시간 함수로 표현된 적응필터의 계수 백터이며, μ는 고정 스텝값이다. $e(n)$은 오류값, $X(n)$은 입력신호 벡터다. 가변 스텝값을 구할 때 가장 많이 사용되는 신호 값인 $e(n)$에 대한 식은 아래와 같이 표현된다.

$$e(n) = d(n) - X^T(n) W(n) \tag{2}$$

식(2)에서 $d(n)$은 원하는 신호값으로 최적필터계수 W_{opt}와 측정 오차신호 $\xi(n)$으로 식 (3)처럼 나타낼 수 있다.

$$d(n) = X^T(n) W_{opt} + \xi(n) \tag{3}$$

최종초과오차 $\epsilon(n)$는 식(4)처럼 정의된다. 만일 LMS의 계수 $W(n)$이 최적필터계수 W_{opt}와 일치하게 되면 $e(n) = \xi(n)$이 되고, 최종초과오차 $\epsilon(n) = 0$이 된다.

$$\epsilon(n) = e(n) - \xi(n) \tag{4}$$

최적필터계수와 현재시간의 적응필터계수 사이의 차 $v(n)$은 아래와 같다.

$$v(n) = W_{opt} - W(n) \tag{5}$$

식(1)에서 고정 스텝 대신에 가변 스텝 $\mu(n)$은 넣으면 VSS LMS 적응필터 알고리즘 식(6)이 된다.

$$W(n+1) = W(n) + \mu(n) e(n) X(n) \tag{6}$$

최적한 $\mu(n)$을 얻기 위한 다양한 가변스텝 알고리즘들이 계속해서 연구되고 있다. 대표적인 방식들을 살펴보자.

$$\mu(n) = \alpha \mu(n-1) + \gamma e(n)^2 \tag{7}$$

식(7)은 Kwong 방식의 VSS LMS 적응필터에서 가변스텝을 갱신하는 식으로 오류 값의 자승 값 $e^2(n)$을 사용한다[2].

$$\mu(n) = \mu(n-1) + \rho e(n) e(n-1) X^T(n) X(n-1) \tag{8}$$

식(8)은 Mathews가 제안한 방식의 가변스텝 갱신 식으로 인접한 오류값과 입력값 백터의 내적으로 가변스텝을 바꾼다[4].

$$\begin{aligned} p(n) &= \beta p(n-1) + (1-\beta) e(n) e(n-1) \\ \mu(n) &= \alpha \mu(n-1) + \gamma p^2(n) \end{aligned} \tag{9}$$

식(9)의 Aboulnasr 방식의 변형 가변스텝(modified VSS, MVSS) 갱신 식에서는 알고리즘의 강인성을 확보하기 위하여 인접한 오류 값의 상관계수를 사용한다[5].

$$\begin{aligned} p(n) &= \beta p(n-1) + (1-\beta) e^2(n) \\ f(n) &= \beta f(n-1) + (1-\beta) e^4(n) \\ C(n) &= f(n) - 3p^2(n) \\ \mu(n) &= \mu_{\max}(1 - e^{-\alpha C(n)}) \end{aligned} \tag{10}$$

식(10)의 Pazaitis 방식의 가변스텝 갱신 식에서는 오류값의 제곱값인 $e^2(n)$ 및 $e^4(n)$을 사용한다[6].

$$\begin{aligned} \bar{g}(n) &= \beta \bar{g}(n-1) + (1-\beta) \frac{X(n)}{\| X(n) \|^2} e(n) \\ c &= \frac{\sigma_\xi^2}{L \sigma_x^2} \\ \mu(n) &= \frac{\mu_{\max} \| \bar{g}_n(n) \|^2}{\| X(n) \|^2 (c + \| \bar{g}_n(n) \|^2)} \end{aligned} \tag{11}$$

식(11)의 Shin 방식의 가변스텝 갱신 식에서는 $e(n)$의 평균 자승값과 초과오차값의 평균 자승값의 비율을 활용한다[7].

식(9)~식(11)에서 가변스텝 갱신을 위하여 사용한 식을 살펴보면 계산량의 복잡성이 상당히 크게 증가하고 있음을 알 수 있다. 가변스텝 갱신에 사용되는 계산량의 증가는 고정스텝 LMS 방식에 비하여 계산량 증가가 지나치게 높아진다. 따라서 LMS 적응필터 방식의 최대 강점인 단순성을 약화시키게 되고, 결과적으로 강인성도 저하될 수 있다.

가변스텝 방식을 추구하고 양호한 수렴특성을 유지하면서 최대한으로 가변스텝 계산식을 단순화한 VSS LMS 적응필터 방식을 본 연구에서 제안하고자 한다. Haweel 방식의 단순(simple VSS, SVSS) LMS 적응필터에서는 오차값의 부호값으로만 가변스텝을 갱신한다[3].

$$\mu(n) = \alpha \mu(n-1) + \gamma sign(e(n-1)) \tag{12}$$

Haweel 방식의 가변스텝 갱신 특성을 분석한 후 적합한 결정함수를 선택하여 스텝값을 가변토록 한다. 결정함수로 스텝값을 구하기 때문에 가변스텝 계산이 매우 단순한 결정함수(deterministic function VSS, DFVSS) LMS 적응필터가 될 것이다.

SVSS LMS 적응필터의 성능을 통신채널 왜곡을 유발하는 선형분산채널에 대해 적응등화기를 적용하여 그 특성을 분석한다. 분석에 사용한 적응등화기 시스템은 그림 1에 있다[1].

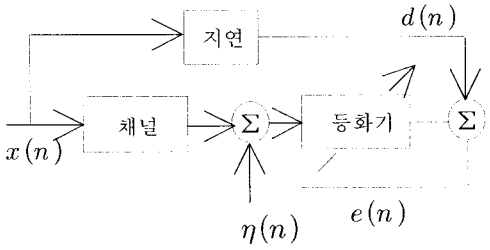

그림 1. 적응등화기의 구성도
Fig. 1. Block diagram of adaptive equalizer

그림 1에서 입력 $x(n)$은 랜덤 2진열로서 $x(n)=\pm 1$ 값을 가지며, 평균은 0이며, 분산은 1로 하였다. 통신채널의 임펄스 응답 모델은 가장 많이 사용되는 raised cosine 형태의 식(13)으로 나타내었다.

$$h(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}[1+cos(\frac{2\pi}{B}(n-2)], n=1,2,3\\ 0, otherwise\end{cases} \quad (13)$$

식(13)에서 계수 B는 통신채널에서 신호 크기에 대한 왜곡에 관련되어 있다. B 값이 증가하면 왜곡도 커진다. B 크기는 적응등화기 입력의 상관 매트릭스의 고유값 분산에 관련된다. 여기서는 B=3.1 값을 사용하였다. 양극 신호입력 $x(n)$이 채널을 통과할 때 가우시안 잡음 $\eta(n)$이 들어가게 된다. LMS 적응필터 형태의 적응 등화기는 통신채널에서 발생하는 왜곡을 상쇄한다. 얻고자 하는 신호 $d(n)$은 $x(n)$의 지연된 신호값으로 구한다.

일반적인 LMS 적응필터의 특성은 가변스텝과 학습곡선(learning curve)을 조사함으로서 알 수 있다. 식(14)의 학습 곡선은 시험 입력 샘플을 여러 번 반복 실현한 후 그 오차 $e_i^2(n)$을 평균하여 얻는다.

$$J(n)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}e_i^2(n), \quad n=1, \cdots, N-1 \quad (14)$$

식(14)에서 $e_i^2(n)$은 i 번째 실현된 샘플의 시간 n에 대한 자승 오류값이다. K는 전체 실현 회수를 나타낸다. 각각의 실현에서 사용한 입력 샘플의 개수는 3000개이며 식(14)의 자승평균오차 계산을 위하여 50번 반복 실현하여 그 평균을 구하였다.

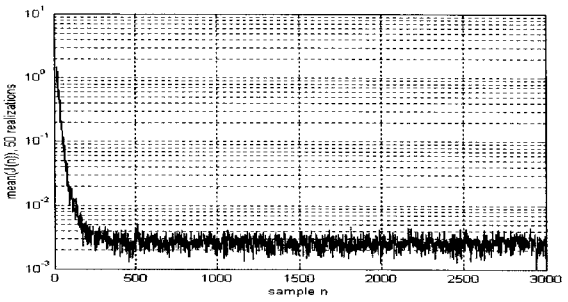

그림 2. SVSS LMS 학습곡선
Fig. 2. Learning curve of SVSS LMS

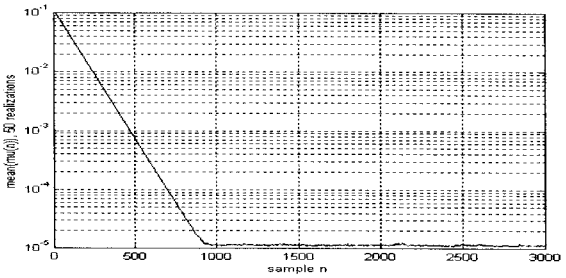

그림 3. SVSS LMS 가변스텝
Fig. 3. Variable step in SVSS LMS

SVSS LMS 적응필터의 성능평가를 위하여 사용한 각 상수 값들은 $\alpha=0.99$, $\gamma=10^{-6}$, $\mu_{max}=0.1$, $\mu_{min}=10^{-5}$이다. 최초 스텝 $\mu(0)$은 0.01로 하였고, 통신채널에 더하여지는 가우시안 잡음 $\eta(n)$의 분산은 10^{-3}으로 하였다. 적응등화기의 필터계수는 11로 하였다.

분석된 Haweel 방식의 가변스텝 갱신의 특성에서, 제안하는 결정함수 가변스텝(DFVSS) LMS 적응필터의 가변스텝 갱신 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu(n)=\alpha\mu(n-1)-k \quad (15)$$

식(15)에서 k는 양수값을 가지며, $k=10^{-8}$ 값을 사용하였다. 식(12)의 SVSS LMS 적응필터의 가변스텝 갱신 식에서 $\mu(n)$은 그림 3에서처럼 지수 함수적으로 일정하게 감소하므로 $sign(e(n-1))$ 항은 초기단계에서 동일한 마이너스 부호가 연속적으로 나타날 수 있으며 또한 식(12)에서 γ 값은 매우 작은 값이므로, 식(15)의 가변스텝 갱신 식은 식(12) 가변스텝 갱신 식을 더욱 단순화 한 것이다.

III. 시뮬레이션 결과 및 성능비교

Haweel 방식과 DFVSS LMS 적응필터의 성능을 가변스텝 변화곡선인 그림 3과 그림 5에서 살펴보면 거의 같은 모양임을 알 수 있다. DFVSS LMS 적응필터의 가변스텝은 최대값 $\mu_{max}=0.1$에서 시작하여 샘플값이 증가함에 따라 점점 감소하여 1000 샘플 근처에서 최소값 $\mu_{min}=10^{-5}$에 도달한다. 식(15)은 곱셈 1번과 뺄셈 1번의 매우 간단한 계산으로 가변스텝을 갱신하고 있다.

가변스텝 LMS 알고리즘에서 계수의 평균 수렴은 가변스텝 값의 평균 $E\{\mu(n)\}$이 잘 알려진 조건인 식(16)을 만족하면 된다[1].

$$0 < E\{\mu(n)\} \leq \frac{2}{\lambda_{max}} \qquad (16)$$

λ_{max}는 입역 벡터의 자기상관 매트릭스의 최대 고유값이다. 따라서 식(15)은 결정함수이므로 $E\{\mu(n)\}=\mu(n)$이 된다. 식(15)은 식(17)으로 나타낼 수 있다.

$$\mu(n) = \alpha^n \mu(0) - k\sum_{i=0}^{n}\alpha^{n-1} \qquad (17)$$

식(17)에서 k가 매우 작은 값이므로 식(18)으로 근사할 수 있다.

$$\mu(n) \approx \alpha^n \mu(0) \qquad (18)$$

식(18)은 DFVSS LMS 적응필터의 $\mu(n)$ 값이 식(16)의 수렴조건을 만족할 수 있음을 보여준다. $\mu(n)$은 최소 스텝값 μ_{min}로 이하로 되면 μ_{min}로 고정된다. 최소 스텝값에 도달한 후에는, 그림 4의 학습곡선을 보면 계속하여 평형상태에 머물러 있음을 알 수 있다.

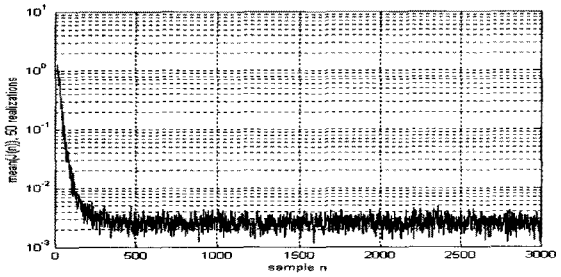

그림 4. DFVSS LMS 학습곡선
Fig. 4. Learning curve of DFVSS LMS

그림 4에서 결정함수 VSS LMS 적응필터의 학습곡선 특성을 살펴보면 그림 2의 SVSS LMS의 학습곡선과 거의 같은 특성을 나타낸다.

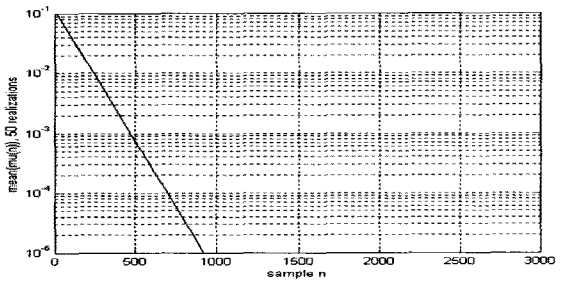

그림 5. DFVSS LMS 가변스텝
Fig. 5. Variable step in DFVSS LMS

이러한 유사성은 DFVSS LMS 방식으로 적응필터를 사용하여도 거의 같은 성능을 얻을 수 있다는 것을 보여준다. SVSS와 DFVSS LMS 적응필터 모두가 약 500샘플 이전에 최적 적응필터 계수에 도달하였음을 알 수 있다.

이제 제안한 DFVSS LMS 적응필터의 성능을 Aboulnasr 방식의 변형 가변스텝(modified VSS, MVSS) LMS 적응필터의 성능과 비교하여 본다. MVSS 방식은 오류값의 상관관계 값을 가변스텝 갱신에 활용하기에 강인한 방식이며 성능 또한 우수한 방식으로 알려져 있다[5]. 그림 6은 DFVSS와 MVSS LMS 적응필터의 학습곡선이다. 두 방식의 학습곡선이 거의 일치하고 있다. 매우 단순한 DFVSS LMS 방식을 사용하여서도 우수한 수렴특성을 얻고 있음을 보여주고 있다. 그림 7은 두 방식의 가변스텝 갱신에 대한 변화곡선으로 MVSS 방식이 약간 위쪽에 있으며, MVSS 방식이 1000 샘플을 지나서 최소 가변스텝 값에 조금 늦게 도달 하고 있다.

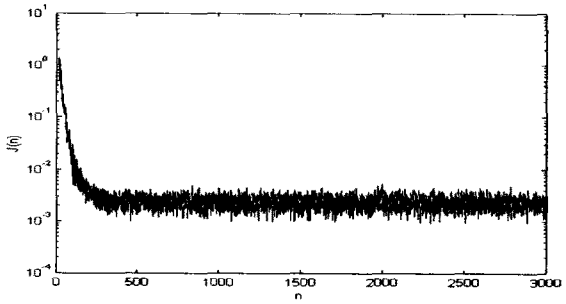

그림 6. DFVSS와 MVSS LMS 학습곡선
Fig. 6. Learning curve of DFVSS and MVSS LMS

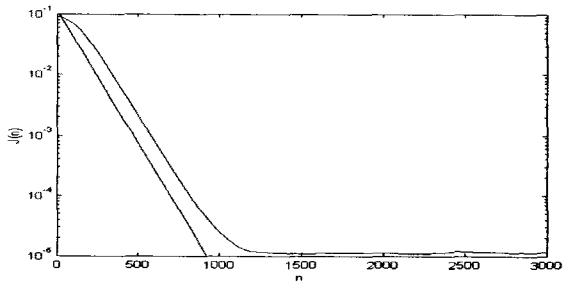

그림 7. DFVSS와 MVSS LMS 가변스텝
Fig. 7. Variable step in DFVSS and MVSSLMS

SVSS와 DFVSS LMS 방식에서는 통신채널의 특성이 갑자기 달라질 경우 적응할 수 없는 문제점이 있다. SVSS LMS 방식에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 오류값의 자승값 변화를 감지하여 통신채널의 특성 변화를 검출한다[3]. 이러한 검출 방식을 DFVSS LMS에서도 동일하게 적용할 수 있을 것이다.

IV. 결 론

VSS LMS 적응필터 알고리즘에서 우수한 성능을 얻기 위하여 가변스텝의 계산에 높은 복잡도를 갖는 식을 사용하고 있다. 제안하는 알고리즘에서는 가변스텝을 갱신하기 위하여 곱셈 1번과 뺄셈 1번의 매우 단순한 결정함수를 사

용하였다. 제안한 DFVSS LMS의 수렴특성은 SVSS LMS 및 MVSS과 동일하였다. 향후 제안한 알고리즘을 다양한 응용사례에 적용한 연구는 지속적으로 필요하다.

참고 문헌

[1] S. Haykin, *Adaptive filter theory,* Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2002.

[2] R. H. Kwong and E. W. Johnstone, "A variable step size LMS algorithm," *IEEE Trans. on Signal Processing,* vol. 40, pp. 1633-1642, Jul. 1992.

[3] Tarek I. Haweel, "A simple variable step size LMS adaptive algorithm," *Int. J. Circ. Theor. Appl.,* vol. 32, pp. 523-536, 2004

[4] V. J. Mathews and Z. Xie, "A stochastic gradient adaptive filter with gradient adaptive step-size," *IEEE Transactions on Signal Processing,* vol. 41, no. 6, pp. 2075-2087, 1993.

[5] Tyseer Aboulnasr and K, Mayyas, "A robust variable step-size LMS-type algorithm: analysis and simulations," *IEEE Trans. on Signal Processing,* vol. 45, no. 3, pp. 631-639, Mar, 1997.

[6] D. I. Pazaitis and A. G. Constantinides, "A novel kurtosis driven variable step-size adaptive algorithm," *IEEE Transactions on Signal Processing,* vol. 47, no. 3, pp. 864-872, 1999.

[7] Hyun C. Shin, A. H. Sayed, and Woo.J. Song, "Variable step-size NLMS and affine projection algorithms," *IEEE Signal Processing Letters,* vol. 11, no. 2, pp. 132-135, 2004.

[8] Khaled F. Abusalem, Yu Gong, " Variabe step LMS algorithm using the accumulated instantaneous error concept," *Proceedings of the World Congress on Engineering,* vol. 1, 2008.

[9] Yonggang Zhang, Ning Li, Jonathon A. Chambers, and Yanling Hao, " New gradient-based variable step size LMS algorithms," *EURASIP journal on advances in signal processin.* 2008.

우 홍채(Hong-Chae Woo)

1980년 2월 경북대 전자공학과(공학사)
1988년 12월 Texas A&M 대학교 전기과(공학석사)
1991년 12월 Texas A&M 대학교 전기과(공학박사)
1979년 12월 ~ 1985년 12월 국방과학연구소, 연구원
1992년 3월~ 현재 대구대학교 정보통신공학부, 교수
※주관심분야 : 멀티미디어신호처리, 음성처리, 부호이론