韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 25집 제 2호, 2011. 5. 381-402

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 25, No. 2, May. 2011. 381-402

삼각형 넓이 공식의 다양한 변형에 대한 연구

조 도 흔 (경남과학고등학교)
표 명 지 (경남과학고등학교)
장 영 수 (경남과학고등학교)
이 세 찬 (경남과학고등학교)
김 기 수 (경남과학고등학교)
한 인 기 (경상대학교)+

넓이 개념은 수학의 발생 초기에 형성된 중요한 개념의 하나이며, 역사적으로 넓이를 구하는 문제들이 새로운 수학 연구의 중요한 시발점이 된 경우도 많았다. 본 연구에서는 중등학교 수학교과서에서 다루는 삼각형의 넓이 공식을 다양한 방법으로 변형시켜, 삼각형의 몇몇 요소들(변들, 각들, 중선들, 둘레, 외접원의 반지름)로 구성된 새로운 넓이 공식을 유도하여 제시하였다. 본 연구에서 제시된 몇몇 공식들은 과학고등학교 R&E 프로그램의 진행 과정에서 얻어졌다. 본 연구를 통해 얻어진 결과들은 고등학교 수준의 수학 영재교육에서 수학적 발명을 지향하는 교수-학습 과정에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

1. 서 론

넓이 개념은 수학의 발생 초기에 형성된 중요한 개념의 하나이다. 실제로 서양 수학의 출발로 꼽는 고대 바빌로니아의 점토판이나 고대 이집트의 파피루스에 몇몇 다각형의 넓이를 구했다는 기록이 남아있으며(안재구, 2000; 한인기, 2005), 동양 수학의 고전인 구장산술에도 다양한 도형의 넓이를 계산하여 실생활의 문제들을 해결하는 것이 제시되어 있다.

수학의 역사적 발달 과정을 보면, 넓이 개념은 다른 수학적 개념들을 발명하는 중요한 동기가 된다. 예를 들어, 아르키메데스는 포물선의 넓이를 구하기 위해 실진법(method of exhaustion)을 사용했는데, 후에 이 방법은 구분구적법을 발명하는 중요한 바탕이 되었으며, 그리스 수학의 3대 작도불능문제의 하나인 원의 넓이를 구하는 원적문제는 무리수 π의 연구나 근사적 계산 방법을 연구하는 중요한 시발점이 되었다.

* 접수일(2011년 3월 25일), 심사(수정)일(1차: 2011년 4월 28일, 2차: 5월 4일), 게재확정일자(2011년 5월 6일)
* ZDM분류 : D53
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 삼각형, 넓이, 헤론의 공식
+ 교신저자

넓이 개념은 학교수학에서도 폭넓게 다루어지고 있다. 초등학교 5학년에서 넓이 개념과 다각형의 넓이 공식들이 도입되며, 중학교 3학년에서 사인을 이용한 삼각형의 넓이 공식이 제시되며, 고등학교 1학년 수학에서는 사인을 이용한 삼각형의 넓이 공식, 헤론의 공식(심화과정으로), $S=\frac{abc}{4R}$과 같은 공식이 도입되고, 고등학교의 미적분학 영역에서는 정적분을 이용하여 다양한 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

우리나라의 수학교과서들을 분석해 보면, 넓이 개념은 주로 계산적인 측면, 즉 다각형 또는 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이 계산의 측면에서 다루어지고 있음을 알 수 있다. 학생들이 다양한 도형의 넓이를 구하는 경험은 의미있는 수학적 활동이라 할 수 있다. 그러나 넓이를 계산하는 것만으로 넓이 개념이 가지고 있는 다양한 가능성을 충분히 활용했다고는 할 수 없을 것이다.

본 연구에서는 중등학교 수학교과서에서 다루는 삼각형의 넓이 공식을 다양한 방법으로 변형시켜, 삼각형의 몇몇 요소들(변들, 각들, 중선들, 둘레, 외접원의 반지름)로 구성된 새로운 넓이 공식을 유도하고, 이에 관련된 교수학적인 논의를 제시할 것이다. 이를 통해 기존의 중등학교 수학교과 내용을 바탕으로 하여 새로운 수학적 발명으로 향하는 흥미로운 수학적 활동의 가능성을 모색할 것이다. 본 연구를 통해 얻어진 결과들은 학생들의 창의적 활동을 자극하는 자료가 될 수 있을 것이며, 고등학교 수준의 수학 영재교육에서 수학적 발명을 지향하는 교수-학습 과정에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

2. 삼각형 넓이 공식의 새로운 변형과 수학적 지식의 확장

중등학교 수준의 수학 영재교육에서 수학적 지식의 변형, 발명, 확장이 다양하게 연구될 수 있다. 특히 과학고등학교나 과학영재학교에서 대부분의 학생들은 R&E(Research and Education) 프로그램에 참여하게 되는데, 이 프로그램의 목적들 중의 하나가 창의적인 문제해결을 통한 새로운 수학적 탐구라고 할 수 있다. 실제로 과학고등학교 또는 과학영재학교 학생들이 R&E를 통해, 수학적으로 또는 교육적으로 의미있는 결과를 얻었다는 것이 보고되고 있다(방승진 외, 2007; 유익승 외, 2007, 김수환 외, 2007; 한인기 외, 2008 등). 여기서는 과학고등학교의 R&E 프로그램에서 다루어진 삼각형 넓이 공식의 새로운 변형과 이를 통한 수학적 지식의 확장을 고찰할 것이다.

(1) 삼각형 넓이 공식의 새로운 변형

우리나라의 중등학교 수학교과서에서는 삼각형의 넓이를 구하는 공식으로 $S=\frac{1}{2}ah_a$, $S=\frac{1}{2}bc\sin A$, $S=pr$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $S=\frac{abc}{4R}$ 등과 같은 식들이 제시되어

있다(이때 S는 삼각형 ABC의 넓이, a, b, c는 삼각형의 변 BC, AC, AB의 길이, p는 둘레의 절반, r은 내접원의 반지름, R은 외접원의 반지름, h_a는 꼭짓점 A에서 그은 높이의 길이).

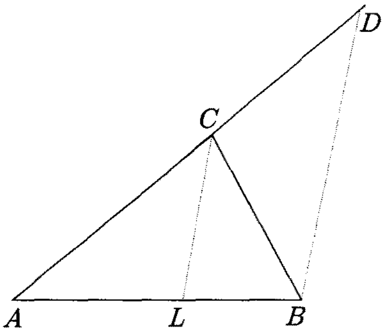
이들 넓이 공식은 서로 밀접하게 관련되어 있다. 실제로 $S=\frac{1}{2}ah_a$에 사인의 정의를 이용하면 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$이 유도되며, 삼각형 ABC의 꼭짓점 A, B, C를 각각 내심 I와 연결하여 삼각형 IAB, IBC, IAC를 생각하여 삼각형 넓이 공식 $S=\frac{1}{2}ah_a$을 이용하면 $S=pr$이 얻어진다. 그리고 공식 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$에 코사인 정리를 이용하면, 헤론의 공식 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$이 얻어지며, 사인 공식을 이용하면 $S=\frac{abc}{4R}$가 얻어진다.

결국 삼각형의 넓이 공식 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$, $S=pr$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $S=\frac{abc}{4R}$은 $S=\frac{1}{2}ah_a$에 수학적 지식들을 결합시켜 얻어진 삼각형 넓이 공식의 새로운 변형이라 할 수 있다. 즉 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$는 $S=\frac{1}{2}ah_a$을 b, c, $\angle A$을 이용하여 표현한 것이고, $S=pr$은 p, r을 이용하여 삼각형의 넓이를 표현한 것이고, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$는 p, a, b, c를, $S=\frac{abc}{4R}$은 a, b, c, R을 이용하여 삼각형의 넓이를 표현한 것이다.

이때 다음과 같은 질문을 가질 수 있다: 삼각형의 넓이를 구하는 공식의 새로운 변형은 만들 수 있을까? 실제로 중등학교 수학교과서에서는 a, h_a를 이용한 공식($S=\frac{1}{2}ah_a$), b, c, $\angle A$를 이용한 공식($S=\frac{1}{2}bc\sin A$), p, r을 이용한 공식($S=pr$), p, a, b, c을 이용한 공식($S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$), a, b, c, R을 이용한 공식$\left(S=\frac{abc}{4R}\right)$만 다루기 때문에, 앞의 물음에 대해서는 진지하게 탐구되지 못하고 있는 것이 사실이다.

Kushnir(2005)의 연구에 a, b, l_c를 이용하여(l_c는 꼭짓점 C에서 그은 각의 이등분선의 길이), 삼각형 ABC의 넓이를 구하는 문제가 소개되어 있다. Kushnir는 자세한 풀이방법은 제시하지 않고, 문제해결을 위한 방향만 제시하였다.

Kushnir의 방법을 바탕으로 자세한 해결 방법을 살펴보자. 삼각형 ABC에 각의 이등분선 CL을 생각하자(<그림 1>). 이제 점 B를 지나 CL에 평행한 직선을 긋고, 직선 AC와의 교점을 D라 하자.



<그림 1>

선분 CL과 BD가 평행하므로, 삼각형 ALC와 ABD는 닮음이 된다. 그러므로 $\angle CBD = \angle LCB$, $\angle LCB = \angle LCA$, $\angle LCA = \angle CDB$이며, 이로부터 $\angle CBD = \angle CDB$이고, 삼각형 CBD는 이등변삼각형이 된다. 삼각형 ALC와 ABD의 닮음으로부터 $\frac{CL}{DB} = \frac{AC}{AD}$이다. $CL = l_c$, $DB = x$, $AC = b$라 놓자. 삼각형 CBD가 이등변삼각형이므로, $CB = CD = a$이고 $AD = b + a$이다. 결국 $\frac{l_c}{x} = \frac{b}{a+b}$가 되며, $x = \frac{l_c(a+b)}{b}$이다.

이제 삼각형의 넓이 공식 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$에서 $\sin C$를 a, b, l_c로 나타내자. 각 C는 이등변삼각형 CBD의 한 외각이므로, $\angle C = \frac{\angle CBD}{2}$이며, $\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\sin CBD\cos CBD$이다. 이등변삼각형 CBD에서 $\sin CBD = \frac{\sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}{a} = \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2a}$이며, $\cos CBD = \frac{x}{2a}$이다. 결국 삼각형의 넓이 $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{bx\sqrt{4a^2 - x^2}}{4a}$가 된다. 이제 $x = \frac{l_c(a+b)}{b}$을 S에 대입하여 정리하면, $S = \frac{l_c(a+b)\sqrt{4a^2b^2 - l_c^2(a+b)^2}}{4ab}$이고, 이로부터 a, b, l_c를 이용한 삼각형 ABC의 넓이에 대한 식이 얻어진다.

삼각형의 요소인 a, b, l_c를 이용하여 삼각형의 넓이를 나타낸 것은 삼각형 기하학의 새로운 탐구 방향을 제시하는 흥미로운 시도라 할 수 있다. 실제로 지금까지는 삼각형 ABC의 몇몇 요소들이 주어진 경우에 삼각형 ABC를 작도하는 작도문제의 해결이 주로 연구되어 왔다(예를 들어, Argunov & Balk, 1957; Lopes, 1996; Prasolov, 2009).

(2) 삼각형 넓이 공식의 새로운 변형과 수학적 지식의 확장

Kushnir의 변형 방법에서는 삼각형의 넓이 공식 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$에서 $\sin C$를 a, b, l_c로 나타내어 삼각형 넓이 공식의 새로운 변형인 $S=\frac{l_c(a+b)\sqrt{4a^2b^2-l_c^2(a+b)^2}}{4ab}$을 얻었다. 이것은 삼각형의 넓이 공식(중등학교 수학교과서에서 다루어지는)을 바탕으로 수학적 탐구활동을 통해 새로운 수학적 발명으로 나아가는 한 예라고 할 수 있다. 이러한 과정을 창의성, 수학적 지식의 성장이라는 측면에서 논의할 수 있다.

창의성의 사전적 의미로, 교육심리학 용어 사전(한국교육심리학회, 2000, p.399)에서는 창의성을 '새롭고 독창적이고 유용한 것을 만들어 내는 능력 또는 전통적인 사고방식을 벗어나서 새로운 관계를 창출하거나 비일상적인 아이디어를 산출하는 능력'으로 규정하면서, 창의성의 특징으로 새롭고 독창적인 관계나 산출물을 만들어내는 것을 강조하였다. 이러한 측면에서 보면, 공식 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$으로부터 변형을 통해 알려지지 않았던 공식 $S=\frac{l_c(a+b)\sqrt{4a^2b^2-l_c^2(a+b)^2}}{4ab}$을 유도한 것은 창의성의 범주에 포함시킬 수 있을 것이다. 그리고 본 연구에서 제시할 다양한 삼각형의 넓이 공식들은 창의성과 관련된 산출물이라 할 수 있다.

한편 교육학 용어사전(현종익·이학춘, 2002, p.615)에 의하면, 이러한 창의적 활동은 분할 결합에 의한 창조라 할 수 있는데, '분할 결합에 의한 창조는 현재 있는 것을 구성요소까지 분해·분석하여, 그 요소적 기능을 그대로 혹은 모양을 조금 바꾸거나, 다시 조립하여 새로운 것을 만들거나 새로운 목적에 사용하는 것'이다. 본 연구에서는 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$의 구성 요소인 $\sin C$를 분석하여, $\sin C$를 a, b, l_c를 이용하여 나타낸 다음, 원래의 식에 대입시켜 새로운 삼각형의 넓이 공식을 만드는 과정을 제시하였다. 특히 본 연구에서는 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$에 파푸스의 중선 정리, 코사인 정리를 이용하여 변들, 각들, 중선들을 이용하여 삼각형의 넓이 공식을 유도할 것이며, $S=\frac{1}{2}ac\sin B$, $S=\frac{abc}{4R}$, 헤론의 공식에 파푸스의 중선 정리, 코사인 정리, 사인 정리 등을 이용하여 각들, 중선들, 변들을 포함하는 새로운 공식들을 유도할 것이다. 이들은 분할 결합에 의한 창조에 관련될 수 있다.

에르든에프·한인기(2005, p.68)는 수학적 창의성의 교육과 관련하여, '교육과정에 제시되어 있거나 교과서를 통해 학생들에게 전달되는 지식은 후에 스스로 지식을 축적하기 위한 바탕이 되고 골격이 되어야 한다. 그러므로 학생들이 미지의 세계에서 길을 찾고 스스로 지식의 영역을 확장하는 방법을 터득하도록 하는데 교육의 초점을 맞추어야 한다'고 주장하면서, 수학적 창의성 교육에서 기존의 수

학적 지식의 확장의 중요성을 강조하였다. $S=\frac{1}{2}ab\sin C$의 변형인 $S=\frac{l_c(a+b)\sqrt{4a^2b^2-l_c^2(a+b)^2}}{4ab}$가 $\sin C$를 a, b, l_c를 이용하여 나타낸 다음, $S=\frac{1}{2}ab\sin C$에 대입하여 얻어졌다는 것을 감안하면, $S=\frac{l_c(a+b)\sqrt{4a^2b^2-l_c^2(a+b)^2}}{4ab}$는 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$의 확장이라 할 수 있다. 그리고 본 연구에서 제시되는 삼각형의 넓이 공식의 변형들은 학교수학에서 배우는 수학적 지식을 확장하는 예들이 될 수 있으며, 수학적 창의성의 교육에서 의미로운 자료로 활용될 수 있을 것이다.

한편 수학적 지식의 성장이라는 측면을 살펴보자. Lakatos(1976)는 추측과 반박의 방법을 통해 수학적 지식의 성장을 구체적으로 제시하였다. Lakatos는 '다면체에서 면의 개수를 f, 꼭짓점의 개수를 v, 모서리의 개수를 e라 할 때, $v-e+f=2$'라는 원시추측을 만든 다음, 이 추측을 부분추측들로 분해하였다. 그리고 각 추측에 대한 반례를 찾아, 괴물배제법, 괴물조정법, 예외배제법, 보조정리합체법으로 반례들을 제거하면서 새로운 추측을 만들면서 수학적 지식이 성장하는 과정을 생생하게 제시하였다(괴물배제법, 괴물조정법은 반례들을 제거하지만 이때 새로운 추측은 만들어지지 않음). Lakatos는 보조정리합체법을 수학적 지식의 주된 방법으로 간주하였는데, 이 방법에서는 이전의 추측을 끊임없이 변형시키면서 반례로부터 안전한 새로운 추측들이 만들어진다. 이것이 바로 수학적 지식의 성장에 있어 중요한 원동력이다. 이러한 측면에서 보면, 본 연구에서 중등학교 수학교과서에 제시된 삼각형의 넓이 공식을 변형시켜 새로운 공식들을 생성하는 것은 수학적 지식의 성장 과정과도 관련시킬 수 있을 것이다. 비록 본 연구에서는 반례를 통한 수학적 지식의 역동적인 성장 과정을 연구의 대상으로 삼지는 않았지만, 기존 지식의 변형을 통한 새로운 지식의 생성 과정을 보여줌으로써 수학적 지식의 성장의 한 부분을 보여줄 수 있을 것이다.

3. 삼각형의 넓이를 구하는 다양한 식들의 탐구

Kushnir의 넓이 공식 변형을 통한 새로운 공식 발명의 방법을 통해, 삼각형의 넓이를 삼각형의 다양한 요소들을 이용하여 나타낼 수 있을 것으로 추측할 수 있다. 예를 들어, 삼각형의 각, 삼각형의 변, 중선의 길이, 각의 이등분선의 길이, 높이의 길이, 내접원의 반지름, 외접원의 반지름, 둘레 등을 이용하여 삼각형의 넓이 공식을 유도하는 연구가 가능할 것이다.

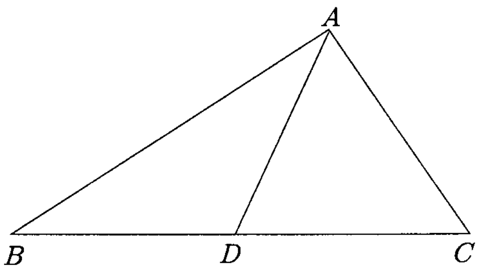
과학고등학교의 영재학생들이 Kushnir와 같이 새로운 탐구의 방향을 개척하는 것은 여러 가지 이유(예를 들어 수학에 대한 폭넓은 시각, 다양한 수학적 방법의 획득, 시간적 여유 등)로 인하여 현실적으로는 그 가능성이 희박하다. 그러나 Kushnir가 제시한 것과 같은 수학적 방법을 학습한 후에, 학생들이 비정형적인 문제 상황에 이 방법을 적용하여 수학적 발명에 이르도록 하는 것은 충분히 가능

성있는 교수학적 접근이 될 수 있다.

넓이 공식 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$, $S=\frac{abc}{4R}$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$을 변형시켜, 삼각형의 변들, 각들, 중선, 외접원, 둘레 등으로 삼각형의 넓이를 나타내는 몇몇 새로운 공식을 살펴보자. 여기서 논의되는 수학적 발명의 일부 내용은 R&E 프로그램에서 Kushnir의 넓이 변형의 방법을 학습한 다음에, 과학고등학교 학생들의 연구 활동을 통해 얻어진 것들이다.

문제 1. a, $\angle B$, m_a[1](단 m_a는 꼭짓점 A에서 그은 중선의 길이)

풀이. <그림 2>와 같은 삼각형 ABC에서 변 BC의 길이 a, $\angle B$, 중선 AD의 길이 m_a를 이용하여 삼각형 ABC의 넓이를 구해보자. 이를 위해, 삼각형의 넓이 공식 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$를 생각하자. $S=\frac{1}{2}ac\sin B$에서 c를 a, $\angle B$, m_a로 나타내면, 구하는 식을 얻게 된다.



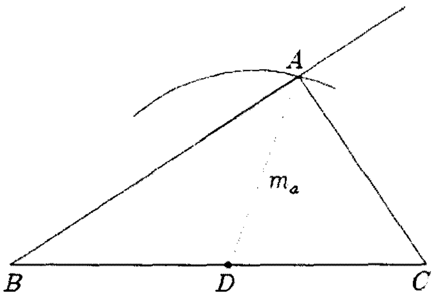
<그림 2>

파푸스의 중선정리에 의해, $b^2+c^2=2\left(m_a^2+\frac{a^2}{4}\right)\cdots$①이다. 한편, 삼각형 ABC에 코사인 정리를 사용하면, $b^2=c^2+a^2-2ac\cos B\cdots$②이 얻어진다. 이제 등식 ②를 ①에 대입하면, $a^2+2c^2-2ac\cos B=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$이 된다. 이제 얻어진 등식을 c에 대해 내림차순으로 정리하면, 이차방정식 $2c^2-2(a\cos B)c+\frac{a^2}{2}-2m_a^2=0$이 된다. 근의 공식을 이용해 c를 구하면 $c=\frac{a\cos B\pm\sqrt{a^2\cos^2 B-a^2+4m_a^2}}{2}$이 된다. 얻어진 c에 대한 식을 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$에 대입하면, 삼각형 ABC의 넓이를 구하는 새로운 식 $S=\frac{a\cos B\pm\sqrt{a^2\cos^2 B-a^2+4m_a^2}}{4}\cdot a\sin B$가

1) 'a, $\angle B$, m_a을 이용하여 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라'는 의미임.

얻어진다.

얻어진 넓이 공식에는 '±'부호가 포함되어 있는데, 이것의 의미를 살펴보자. 이를 위해, a, $\angle B$, m_a이 주어진 경우에 삼각형 ABC의 작도 방법을 살펴보자. a, $\angle B$, m_a이 주어지면, 다음 작도 순서에 의해(<그림 3>) 삼각형 ABC가 얻어질 수 있다.



<그림 3>

(1) 길이가 a인 선분 BC를 작도한다.

(2) 선분 BC의 중점 D를 표시한다.

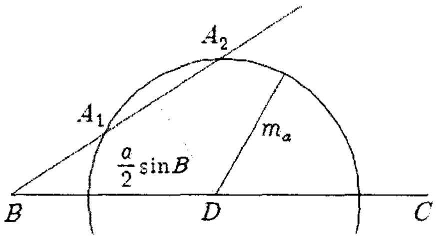
(3) 선분 BC를 한 변으로 하는 크기가 $\angle B$인 각을 작도한다.

(4) 중심이 점 D이며 반지름이 m_a인 원을 그려, (3)에서 작도한 각의 다른 변과의 교점을 A라 하자.

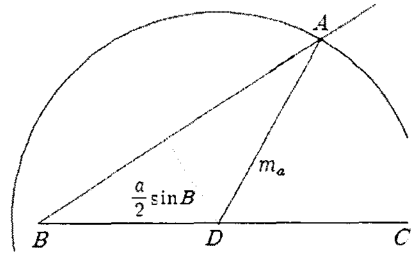
(5) 점 A, B, C를 연결하여, 삼각형 ABC를 작도한다.

기술한 작도 순서 (4)에서 꼭짓점 A를 얻으려면, 각 B의 변과 중심이 D이고 반지름이 m_a인 원이 만나야 한다.

각 B가 예각인 경우에는 원의 반지름 m_a가 점 D로부터 반직선 BA까지의 거리보다 크거나 같으면, 즉 $m_a \geq \frac{a}{2}\sin B$이면 꼭짓점 A를 항상 찾을 수 있다. 그런데 $m_a < \frac{a}{2}$이면 <그림 4>와 같이 두 개의 교점 A_1, A_2가 생겨 두 삼각형이 얻어지며, 이들의 넓이는 $S = \frac{a\cos B \pm \sqrt{a^2\cos^2 B - a^2 + 4m_a^2}}{4} \cdot a\sin B$가 된다.



<그림 4>

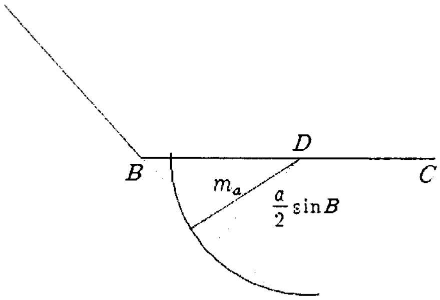


<그림 5>

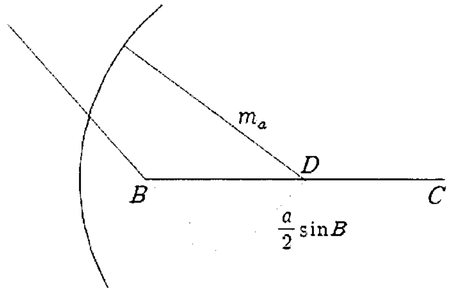
한편 $m_a \geq \dfrac{a}{2}$이면 <그림 5>와 같이 하나의 삼각형 ABC가 얻어지며, 이러한 경우에 삼각형의 넓이는 $S = \dfrac{a\cos B + \sqrt{a^2\cos^2 B - a^2 + 4m_a^2}}{4} \cdot a\sin B$가 된다. 실제로 B가 예각이므로 $\sqrt{a^2\cos^2 B - a^2 + 4m_a^2}$와 $a\cos B$의 대소를 비교하기 위해, 이들 두 식을 제곱하여 빼면, $\left(a^2\cos^2 B - a^2 + 4m_a^2\right) - a^2\cos^2 B = 4m_a^2 - a^2$이 된다. 그런데 $m_a \geq \dfrac{a}{2}$이므로 $4m_a^2 \geq a^2$이며, 결국 $\sqrt{a^2\cos^2 B - a^2 + 4m_a^2} \geq a\cos B$이고, $S = \dfrac{a\cos B - \sqrt{a^2\cos^2 B - a^2 + 4m_a^2}}{4} \cdot a\sin B$은 음의 값을 가지게 되므로 삼각형의 넓이가 될 수 없다.

이제 B가 둔각인 경우를 살펴보자. 이러한 경우에 <그림 6>에서와 같이, $m_a \geq \dfrac{a}{2}\sin B$라고 해서 반드시 중심이 D이고 반지름이 m_a인 원이 각 B의 변과 만나게 되는 것은 아니다. 이들이 만나려면, m_a가 선분 BD의 길이보다 커야하며, 즉 $m_a > \dfrac{a}{2}$인 경우에 교점이 생겨 삼각형 ABC가 얻어진다(<그림 7>).

이러한 경우에 삼각형의 넓이는 $S = \dfrac{a\cos B + \sqrt{a^2\cos^2 B - a^2 + 4m_a^2}}{4} \cdot a\sin B$이다.



<그림 6>



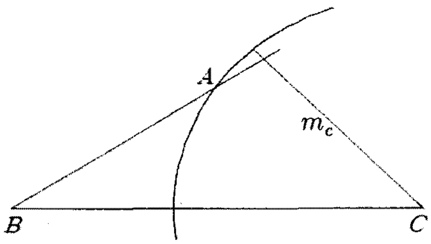
<그림 7>

문제 1에서는 a, $\angle B$, m_a이 주어진 경우에 삼각형 ABC를 작도하는 방법을 살펴보았고, 각 B가 예각인 경우에 $m_a = \frac{a}{2}\sin B$이면 삼각형의 넓이는 $S = \frac{a^2 \sin B \cos B}{4}$이며, $\frac{a}{2}\sin B < m_a < \frac{a}{2}$이면 두 개의 삼각형이 문제의 조건을 만족시키며 $S = \frac{a\cos B \pm \sqrt{a^2\cos^2 B - a^2 + 4m_a^2}}{4} \cdot a\sin B$이고, $m_a \geq \frac{a}{2}$인 경우에는 넓이가 $S = \frac{a\cos B + \sqrt{a^2\cos^2 B - a^2 + 4m_a^2}}{4} \cdot a\sin B$인 삼각형 하나가 얻어짐을 보였다. 한편 각 B가 둔각인 경우에는 $m_a > \frac{a}{2}$일 때에만 삼각형이 작도되며, 그 넓이는 $S = \frac{a\cos B + \sqrt{a^2\cos^2 B - a^2 + 4m_a^2}}{4} \cdot a\sin B$가 된다는 것을 보였다.

문제 2. a, $\angle B$, m_c(단 m_c는 꼭짓점 C에서 그은 중선의 길이)

문제 2는 문제 1과 유사한 방법으로 접근할 수 있다. 이를 위해, 우선 a, $\angle B$, m_c가 주어진 삼각형 ABC의 작도 방법을 생각하자.

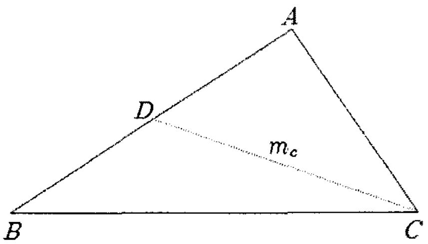
길이가 a인 선분 BC를 작도하고, 꼭짓점 B에서 주어진 각 $\angle B$를 작도한다. 이제 꼭짓점 C를 중심으로 반지름이 m_c인 원을 작도하여, 각 B의 한 변과의 교점을 A라 하면(<그림 8>), 구하는 삼각형 ABC가 작도된다.



<그림 8>

문제 1과 마찬가지로 각 B가 예각인 경우와 둔각인 경우로 나누어 생각할 수 있다. 각 B가 예각이면, C에서 반직선 BA까지의 거리 $a\sin B$와 선분 BC의 길이 a에 대해 m_c의 관계를 생각하면 $a\sin B < m_c < a$이면 두 개의 삼각형이 작도되며, $m_c = a\sin B$, $m_c \ge a$인 경우에는 삼각형이 하나 얻어진다. 한편 각 B가 둔각인 경우에는 $m_c > a$일 때에만 삼각형이 작도된다.

이제 삼각형의 넓이를 구해보자. <그림 9>에서 파푸스의 중선정리에 의해 $a^2+b^2=2\left(m_c^2+\frac{c^2}{4}\right)\cdots①$이 성립한다. 이제 코사인 정리를 사용하면 등식 $b^2=c^2+a^2-2ac\cos B\cdots②$이 얻어진다. 등식 ②를 ①에 대입하면, $2a^2+c^2-2ac\cos B=2m_c^2+\frac{c^2}{2}$이 된다.



<그림 9>

이제 식을 c에 대해 정리하여 이차방정식 $c^2-4(a\cos B)c+4a^2-4m_c^2=0$을 얻고, 근의 공식을 사용하면 $c=2a\cos B\pm\sqrt{4a^2\cos^2 B-4a^2+4m_c^2}$이다. 얻어진 c를 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$에 대입하면, $S=(a\cos B\pm\sqrt{a^2\cos^2 B-a^2+m_c^2})\cdot a\sin B$이다. 이때 '±'부호에 대해서는 문제 1과 유사하게 생각할 수 있다.

문제 1과 문제 2의 해결과정을 살펴보면, 첫째 파푸스의 중선 정리와 코사인 정리를 사용하여 a, b, c와 중선의 길이를 포함하는 두 등식을 유도하고, 둘째 얻어진 두 등식을 연립하여 한 문자에 대

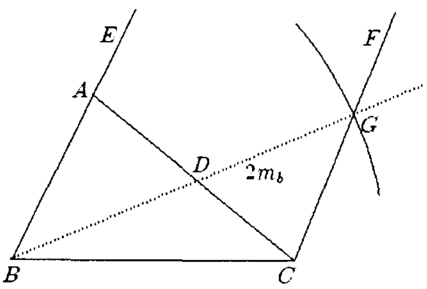
한 이차방정식을 얻고, 셋째 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 한 문자를 다른 문자들로 나타내며, 넷째 이를 삼각형의 넓이 공식 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$에 대입하여 문제를 해결하였다.

문제 1에서 a, $\angle B$, m_a, 문제 2에서 a, $\angle B$, m_c가 주어진 경우에 삼각형의 넓이 공식을 구했다. 이제 꼭짓점 B에서 그은 중선 m_b가 주어진 경우의 문제해결을 살펴보자.

문제 3. a, $\angle B$, m_b(단 m_b는 꼭짓점 B에서 그은 중선의 길이)

우선 a, $\angle B$, m_b이 주어진 경우에 삼각형 ABC를 작도하는 문제를 살펴보자. 문제 1과 문제 2에서는 변 BC의 중점 또는 꼭짓점 C에서 원을 그려 각 B의 변과의 교점을 구해 꼭짓점 A를 찾을 수 있었다. 그러나 이 문제에서는 꼭짓점 B에서 그은 중선이 주어졌으므로, 문제 1, 2와 같은 방법으로는 꼭짓점 A를 결정할 수 없다.

삼각형 ABC의 작도를 위해, 길이가 a인 선분 BC를 작도하자. BC를 한 변으로 하며 크기가 $\angle B$와 같은 각 EBC를 작도하고, 점 C를 지나 BE와 평행한 직선 CF를 작도한다. 이제 점 B를 중심으로 하며 반지름이 $2m_b$인 원을 그어 직선 CF와의 교점을 G라 하자. 선분 BG의 중점 D와 점 C를 연결하여, $CD=DA$인 점 A를 찾으면, 구하는 삼각형 ABC가 작도된다(<그림 10>).

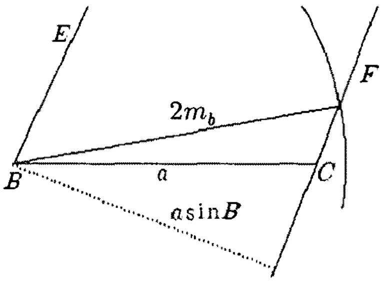


<그림 10>

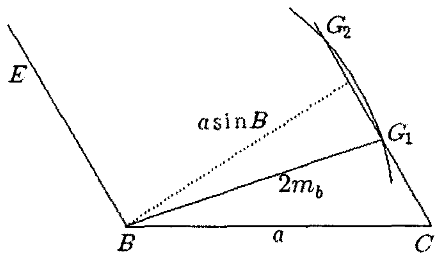
<그림 10>과 같은 작도방법에서 $CD=DA$이므로, BD는 중선이 되며, $BD=\frac{BG}{2}=\frac{2m_b}{2}$이므로, $BD=m_b$가 되므로, 문제의 조건을 만족시키는 삼각형 ABC가 얻어진다.

문제 1에서 했던 것과 같이, 중심이 B이고 반지름이 $2m_b$인 원이 직선 CF와 만나는 경우와 그렇지 않은 경우에 대해 고찰해야 한다. 이를 위해 각 B가 예각인 경우와 둔각인 경우로 나누어 살펴보자.

<그림 10>에는 각 B가 예각인 경우가 제시되어 있다. 중심이 B이고 반지름이 $2m_b$인 원이 직선 CF와 만나려면, 반지름 $2m_b$가 점 B에서 직선 CF까지의 거리보다 커야 한다. <그림 11>에서 $\angle BCG = \pi - \angle B$이므로 점 B에서 직선 CF까지의 거리는 $a\sin B$이다. 이때 원과 직선 CF가 만나려면, 반지름인 $2m_b$가 $a\sin B$뿐만 아니라, $BC = a$보다 커야 한다. 즉 각 B가 예각인 경우에는 $2m_b > a$인 경우에 하나의 삼각형이 결정된다.



<그림 11>



<그림 12>

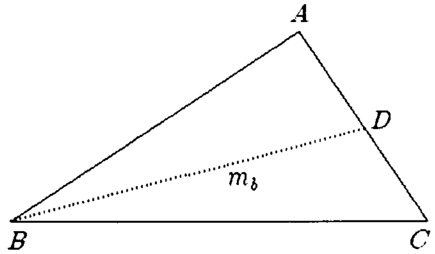
한편 <그림 12>에 제시된 각 B가 둔각인 경우를 살펴보자. $2m_b = a\sin B$이면 점 G가 하나가 결정되며, 이로부터 삼각형 ABC가 하나 얻어진다. 한편 $a\sin B < 2m_b < a$이면 점 G가 두 개가 얻어지며, 삼각형 ABC는 두 개가 얻어진다. 그리고 $2m_b \geq a$이면 점 G가 하나 결정되어, 삼각형 ABC도 하나가 결정된다.

이제 삼각형 ABC의 넓이를 a, $\angle B$, m_b로 표현하자. <그림 13>의 삼각형 ABC에서 파푸스의 중선 정리에 의해 $a^2 + c^2 = 2\left(m_b^2 + \frac{b^2}{4}\right) \cdots$①, 코사인 정리에 의해 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B \cdots$② 이 얻어진다. $S = \frac{1}{2}ac\sin B$에서 $c = \frac{2S}{a\sin B}$ 을 ①에 대입하면 $a^2 + \frac{4S^2}{a^2\sin^2 B} - 2m_b^2 = \frac{1}{2}b^2$ $\cdots$③을 얻는다. 한편 $c = \frac{2S}{a\sin B}$ 을 ②에 대입하면 $a^2 + \frac{4S^2}{a^2\sin^2 B} - \frac{4S}{\tan B} = b^2 \cdots$④가 된다. 이제 ③×2-④를 계산하면, $a^2 + \frac{4S^2}{a^2\sin^2 B} - 4m_b^2 + \frac{4S}{\tan B} = 0$, $\left(\frac{4}{a^2\sin^2 B}\right)S^2 + \left(\frac{4}{\tan B}\right)S + a^2 - 4m_b^2 = 0$이 된다. 이제 근의 공식을 사용하여, S를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S = \frac{a^2\sin^2 B}{4}\left(-\frac{2}{\tan B} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{\tan B}\right)^2 - \left(\frac{4}{a^2\sin^2 B}\right)(a^2 - 4m_b^2)}\right)$$

a, $\angle B$, m_b이 주어진 경우에 삼각형 ABC의 작도 과정을 설명하면서, 두 삼각형의 존재에 대해 논의하였으므로, 위의 넓이 공식 S에서 부호 '±'에 대한 논의는 생략할 것이다.

한편 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 경우에 $\tan B$는 정의되지 않는다. 위의 풀이 과정의 식 ②에서 $b^2=c^2+a^2$, $a^2+c^2=2\left(m_b^2+\frac{b^2}{4}\right)$에 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$로부터 얻어지는 식 $c=\frac{2S}{a}$를 대입하여, 유사한 방법으로 정리하면 $S=\frac{1}{2}a\sqrt{4m_b^2-a^2}$가 얻어진다.



<그림 13>

문제 3의 해결과정을 문제 1, 2의 해결과정과 비교하면, 파푸스의 중선 정리, 코사인 정리, $S=\frac{1}{2}ac\sin B$이 사용된 것은 같다. 그러나 문제 3의 작도 과정에서는 중선을 두 배하는 보조선을 이용하여 문제를 해결하였다. 이제 해결과정에서 사인공식을 이용하는 문제를 살펴보자.

문제 4. $\angle A$, m_a, R(단 R은 외접원의 반지름)

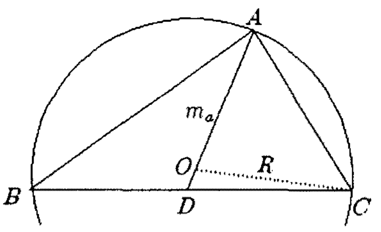
풀이. <그림 14>에서 파푸스의 중선 정리에 의해 $b^2+c^2=2\left(m_a^2+\frac{a^2}{4}\right)\cdots$①이며, 코사인 정리에 의해 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\cdots$②이 성립한다. 이제 ②에 ①을 대입하면, $a^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}-2bc\cos A$, $2bc\cos A=2m_a^2-\frac{a^2}{2}$이 된다. 이제 이 식을 bc에 대해 정리하면 $bc=\frac{4m_a^2-a^2}{4\cos A}$이며, 이를 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$에 대입하자. 그러면 삼각형의 넓이 공식 $S=\frac{4m_a^2-a^2}{8\cos A}\sin A$를 얻을 수 있다.

$S=\frac{4m_a^2-a^2}{8\cos A}\sin A$에는 문제의 조건인 $\angle A$, m_a, R이외에 a가 포함되므로, a를 $\angle A$, m_a,

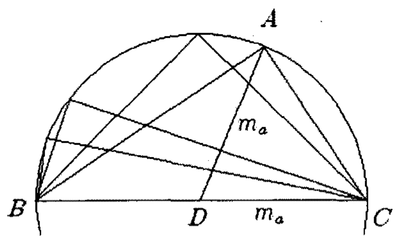
R를 이용해 나타내야 한다. 이를 위해 사인 법칙을 사용하자. $\frac{a}{\sin A}=2R$, $a=2R\sin A$이므로,

$a=2R\sin A$을 $S=\frac{4m_a^2-a^2}{8\cos A}\sin A$에 대입하자. 그러면 S는 다음과 같은 식으로 얻어진다.

$$S=\frac{(4m_a^2-4R^2\sin^2 A)\tan A}{8}=\frac{(m_a^2-R^2\sin^2 A)\tan A}{2}$$



<그림 14>



<그림 15>

얻어진 식 $S=\frac{(m_a^2-R^2\sin^2 A)\tan A}{2}$에는 $\tan A$가 포함되어 있는데, 그 의미를 생각하자. $\angle A=\frac{\pi}{2}$일 때에 $\tan A$는 정의되지 않으며 $S=\frac{(m_a^2-R^2\sin^2 A)\tan A}{2}$도 구할 수 없게 된다. 실제로 $\angle A=\frac{\pi}{2}$이면 $m_a=R$이 되며, 이때 그러한 삼각형 ABC는 특정하게 결정되지 않으며, 삼각형의 넓이도 특정하게 결정되지 않는다. <그림 15>에 $\angle A=\frac{\pi}{2}$인 경우에 넓이가 다른 몇몇 삼각형의 예가 제시되어 있다.

문제 4의 해결과정에서는 문제 1, 2, 3과는 달리 사인 공식이 사용되었고, 이때 삼각형의 한 변의 길이가 각을 이용하여 표현되었다.

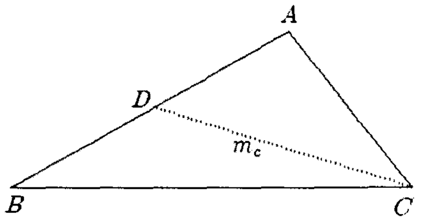
문제 1, 2, 3, 4에서는 삼각형 넓이 공식 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$을 변형시켜 넓이를 구하는 새로운 식을 얻었다. 이제 삼각형의 넓이 공식 $S=\frac{abc}{4R}$을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 새로운 식을 만들어보자.

넓이 공식 $S=\frac{abc}{4R}$에 사인공식에서 얻어지는 등식 $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$을 대입하면, $S=2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$가 얻어진다. 즉 R, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$에 대한 넓이 공식을 얻을 수 있다. $S=2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$을 이용하는 문제해결의 한 예가 문제 5이다.

문제 5. $\angle A$, $\angle B$, m_c

풀이. <그림 16>에서 파푸스의 중선정리에 의해 $a^2+b^2=2\left(m_c^2+\frac{c^2}{4}\right)$이 얻어지며 $4m_c^2=2a^2+2b^2-c^2$이 된다. 이제 사인 공식을 이용하여 $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$를 생각하여, $4m_c^2=2a^2+2b^2-c^2$에 대입하자. 그러면 $4m_c^2=4R^2(2\sin^2A+2\sin^2B-\sin^2C)$가 되며, 이 식을 R^2에 대해 정리하면, $R^2=\frac{m_c^2}{2\sin^2A+2\sin^2B-\sin^2C}$이 얻어진다.

이제 삼각형의 넓이 공식 $S=2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$에 얻어진 R^2에 대한 식을 대입하면, $S=2R^2\sin A\sin B\sin C=\frac{2m_c^2\sin A\sin B\sin C}{2\sin^2A+2\sin^2B-\sin^2C}$이 된다. 이제 $\angle C=\pi-\angle A-\angle B$을 대입하면 $S=\frac{2m_c^2\sin A\sin B\sin(A+B)}{2\sin^2A+2\sin^2B-\sin^2(A+B)}$가 유도되며, 문제가 해결된다.

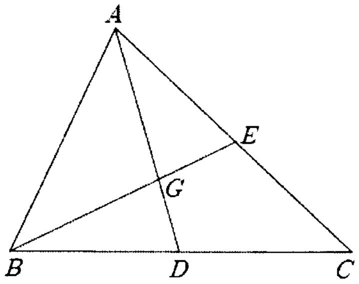


<그림 16>

이제 헤론의 공식을 변형하여 얻어지는 삼각형의 넓이 공식들의 몇몇을 살펴보자.

문제 6. a, m_a, m_b

풀이. 삼각형 ABC에 중선 $AD=m_a$, $BE=m_b$를 긋고, AD와 BE의 교점을 G라 하자(<그림 17>). 삼각형 ABD의 넓이는 ABC의 넓이 S의 절반이고, 삼각형 GBD의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 $\frac{1}{3}$이므로, 삼각형 ABC의 넓이 S는 삼각형 GBD의 넓이의 6배이다. 삼각형 GBD의 넓이를 a, m_a, m_b을 이용해 나타내자.



<그림 17>

삼각형 GBD에서 $BD=\frac{a}{2}$, $GD=\frac{1}{3}m_a$, $BG=\frac{2}{3}m_b$이다. 삼각형 GBD의 넓이를 헤론의 공식 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 을 이용하여 구하면, 다음과 같다.

$$\sqrt{\left(\frac{3a+2m_a+4m_b}{12}\right)\left(\frac{-3a+2m_a+4m_b}{12}\right)\left(\frac{3a-2m_a+4m_b}{12}\right)\left(\frac{3a+2m_a-4m_b}{12}\right)}$$

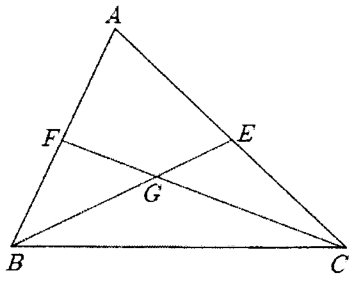
이로부터, 구하는 삼각형 ABC의 넓이 S는 다음과 같이 얻어진다.

$$\frac{1}{24}\sqrt{(3a+2m_a+4m_b)(-3a+2m_a+4m_b)(3a-2m_a+4m_b)(3a+2m_a-4m_b)}$$

문제 6에서는 삼각형의 무게중심의 성질, 즉 삼각형의 무게중심은 각 중선을 2:1로 나눈다는 것을 이용하였다. 문제 6과 유사한 방법으로, a, m_b, m_c가 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

문제 7. a, m_b, m_c

풀이. 삼각형 ABC에 중선 $BE=m_b$, $CF=m_c$를 긋고, BE와 CF의 교점을 G라 하자(<그림 18>). 그러면 삼각형 ABC의 넓이 S는 삼각형 GBC의 넓이의 3배이다. 이제 삼각형 GBC의 넓이를 a, m_b, m_c를 이용해 나타내자.



<그림 18>

삼각형 GBC에서 $BG=\frac{2}{3}m_b$, $GC=\frac{2}{3}m_c$, $BC=a$이다. 삼각형 GBC의 넓이를 헤론의 공식 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$을 이용하여 구하면, 다음과 같다.

$$\sqrt{\left(\frac{2m_b+2m_c+3a}{6}\right)\left(\frac{-2m_b+2m_c+3a}{6}\right)\left(\frac{2m_b-2m_c+3a}{6}\right)\left(\frac{2m_b+2m_c-3a}{6}\right)}$$

이로부터, 구하는 삼각형 ABC의 넓이 S는 다음과 같이 얻어진다.

$$\frac{1}{12}\sqrt{(2m_b+2m_c+3a)(-2m_b+2m_c+3a)(2m_b-2m_c+3a)(2m_b+2m_c-3a)}$$

문제 6과 문제 7에서 헤론의 공식을 이용하여, 삼각형의 넓이를 a, m_a, m_b와 a, m_b, m_c로 나타냈다. 그러면 '세 중선 m_a, m_b, m_c로 삼각형의 넓이를 구할 수 있을까'라는 물음이 생길 수 있다. 이 물음에 대한 대답을 정은주(2010)에서 볼 수 있다. 이 연구에서 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이 S를 다음과 같이 나타냈다.

$$S=\frac{4}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(-m_a+m_b+m_c)(m_a-m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)}$$

헤론의 공식을 이용하여, 삼각형의 넓이를 변형시키는 다른 예를 살펴보자.

문제 8. a, m_b, $2p$(단 p는 둘레의 절반)

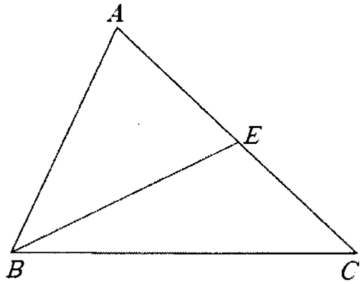
풀이. 삼각형 ABC에 중선 BE를 긋자(<그림 19>). 선분 AE의 길이를 x라 하면, $c=2p-a-2x$이다. 이제 파푸스의 중선 정리에 의해, $a^2+c^2=2\left(m_b^2+\frac{b^2}{4}\right)$, $a^2+(2p-a-2x)^2=2(m_b^2+x^2)$이 성립한다. 얻어진 식을 전개하여 x에 대해 정리하면, $2x^2-4(2p-a)x+(2p-a)^2+a^2-2m_b^2=0$가 되며, 근의 공식을 사용하여 x를 구하면, 다음과 같다.

$$x=\frac{2(2p-a)\pm\sqrt{4(2p-a)^2-2(2p-a)^2-2a^2+4m_b^2}}{2}$$

이로부터 $x=2p-a\pm\sqrt{2p^2-2ap+m_b^2}$이 된다. 이때 $p>x$이므로, 여기에 얻어진 x의 식을 대입하면 $a-p>\pm\sqrt{2p^2-2ap+m_b^2}$가 된다. 그런데 $a-p<0$이므로 식 $\sqrt{2p^2-2ap+m_b^2}$을 버리면, $x=2p-a-\sqrt{2p^2-2ap+m_b^2}$가 된다.

이제 b와 c를 구하면 $b=2x=4p-2a-2\sqrt{2p^2-2ap+m_b^2}$이며, $c=2p-a-2x=a-2p+2\sqrt{2p^2-2ap+m_b^2}$이다. 주어진 a와 얻어진 b, c를 헤론의 공식에 대입하면, 다음과 같은 넓이 공식을 얻을 수 있다.

$$S=\sqrt{p(p-a)(2a-3p+2\sqrt{2p^2-2ap+m_b^2})(3p-a-2\sqrt{2p^2-2ap+m_b^2})}$$



<그림 19>

문제 8과 유사한 방법으로 a, m_a, $2p$가 주어진 삼각형의 넓이 S를 구하면, $S=\frac{1}{2}\sqrt{p(p-a)(4p^2-4ap-4m_a^2+a^2)}$가 된다. 그리고 본 연구에서 살펴본 삼각형 요소들의 다른 조합들 뿐만 아니라, 각의 이등분선, 높이, 내접원, 외접원 등을 포함하는 다양한 경우에 대해 삼각형의 넓이를 나타내는 식들이 연구될 수 있을 것이다.

4. 결 론

넓이 개념은 수학의 발생 초기에 형성된 중요한 개념의 하나로, 고대 바빌로니아의 점토판, 고대 이집트의 파피루스, 동양의 구장산술에 다양한 도형의 넓이를 계산하는 문제들이 남아있다. 그리고 넓이 개념은 다른 수학적 개념들을 발명하는 중요한 계기가 되기도 하였으며, 우리나라의 학교수학에서 초등학교로부터 고등학교까지 폭넓게 다루어지고 있다.

본 연구에서는 중등학교 수학교과서에서 다양하게 다루고 있는 삼각형의 넓이 공식 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$, $S=\frac{abc}{4R}$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$을 변형시켜, 삼각형의 변들, 각들, 중선들, 둘레, 외접원의 반지름 등으로 만들어진 새로운 넓이 공식을 유도하여 제시하였다. 특히 본 연구에서 논의되는 수학적 발명의 일부는 과학고등학교의 R&E 프로그램의 운영 과정에서 얻어진 것들이다.

기존의 삼각형 넓이 공식을 바탕으로 수학적 탐구활동을 통해 새로운 수학적 발명으로 나아가는 것의 교육적 의의를 창의성, 수학적 지식의 성장이라는 측면에서 생각할 수 있다. 창의성은 새롭고 독창적이며 유용한 산출물, 관계, 아이디어를 만드는 것에 관련되므로, 본 연구에서 얻어진 새로운 공식들은 창의성과 관련하여 논의될 수 있을 것이다. 특히 이러한 창의적 활동은 분할 결합에 의한 창조와도 관련될 수 있다. 한편 Lakatos의 관점에서 수학적 지식의 성장은 만들어진 추측을 변형시

켜 반례로부터 안전한 새로운 추측들을 만드는 것에 관련된다. 본 연구에서 얻어진 새로운 공식들의 생성 과정은 수학적 지식의 성장과도 관련될 수 있다. 비록 본 연구에서는 반례를 통한 추측의 개선 과정을 제시하지는 않았지만, 기존 지식의 변형을 통한 새로운 지식의 생성을 고찰함으로써 수학적 지식의 성장의 단면을 제시할 수 있었다.

넓이 공식 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$에 파푸스의 중선 정리, 코사인 정리를 이용하여 각각 $[a,\ \angle B,\ m_a]$, $[a,\ \angle B,\ m_c]$, $[a,\ \angle B,\ m_b]$으로 만들어지는 삼각형의 넓이 공식을 유도하였으며, 이들 각각에 대해 삼각형의 작도 가능성도 함께 조사하였다. 그리고 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$에 파푸스의 중선 정리, 코사인 정리, 사인 정리를 이용하여 $[\angle A,\ m_a,\ R]$으로 삼각형의 넓이를 표현하였다.

한편 넓이 공식 $S=\frac{abc}{4R}$을 바탕으로 $[\angle A,\ \angle B,\ m_c]$이 주어진 삼각형의 넓이 공식을 유도하였고, 헤론의 공식을 바탕으로 $[a,\ m_a,\ m_b]$, $[a,\ m_b,\ m_c]$, $[m_a,\ m_b,\ m_c]$, $[a,\ m_b,\ 2p]$, $[a,\ m_a,\ 2p]$가 주어진 삼각형의 넓이 공식이 얻어짐을 보였다.

본 연구의 과정에서 삼각형 다른 요소들, 예를 들어 높이, 각의 이등분선, 내접원의 반지름, 방접원의 반지름 등을 이용하여 삼각형의 넓이 공식이 유도될 수 있다는 것을 알았다. 본 연구를 통해 얻어진 결과들은 고등학교 수준의 수학 영재교육에서 수학적 발명을 지향하는 R&E 과정의 기초자료로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

김수환 외 (2007). 가장 아름다운 수학공식에 관한 연구, 한국수학교육학회 제12회 국제수학영재교육 세미나 프로시딩, 61-79.

방승진 외 (2007). 수학분야 영재 수업 프로그램 연구 : 기둥이 4개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **21(1)**, 19-31.

안재구 (2000). 수학문화사, 서울: 일월서각.

에르든예프 · 한인기 (2005). 유추를 통한 수학탐구, 서울: 승산.

유익승 외 (2007). 디오판틴 방정식의 해들에 대한 연산 및 성질 연구, East Asian Mathematical Journal **23(3)**, 71-380.

정은주 (2010). 헤론공식에 대한 연구들의 분석과 새로운 변형에 대한 연구, 경상대학교 석사학위논문.

한국교육심리학회 (2000). 교육심리학 용어사전, 서울: 학지사.

한인기 (2005). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

한인기 외 (2008). 관성능률을 이용한 등식 및 부등식의 증명에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **22(1)**, 53-63.

현종익 · 이학춘 (2002). 교육학 용어사전, 서울: 동남기획.

Argunov B., & Balk M. (1957). *Geometricheskie Postroeniya na Ploskosti*, Moscow: GUPI.

Kushnir I.. (2005). *Triumf Skoknoi Geometrii*, Ukraine: Nash Chas.

Lakatos I. (1976). *Proofs and Refutations*, New York: Cambridge University Press.

Lopes L. (1996). *Manuel de Construction de Triangles*, Canada: QED TEXTE.

Prasolov V. (2009). 평면기하학의 탐구문제들(한인기 역), 서울: 승산.

A Study on Various Transformations of Triangle's Area formulas

Cho Do Heun, Pyo Myeung Ji, Jang Young Soo,
Lee Se Chan & Kim Gi Soo
Gyeongnam Science High School, Jinju, Korea
E-mail : dh30594@naver.com, wldnjs326@naver.com,
wkkd456@naver.com, dltpkcs2@naver.com & kgsmath@nate.com

Han Inki+
Dept. of Math. Edu. and Education Research Institute, Gyeongsang National University, 660-701, Korea
E-mail : inkiski@gsnu.ac.kr

In this paper we study formulae of the triangle's area. We solve problems related with making new formulae of the triangle's area. These formulae is consisted of some elements of triangle, for example side, angle, median, perimeter, radius of circumcircle. We transform formulae $S=\frac{1}{2}ac\sin B$, $S=\frac{abc}{4R}$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, and make new formulae of the triangle's area. Some formulas are received in the process of Research and Education program in the science high school. We expect that our results will be used in the Research and Education program in the science high school.

* ZDM Classification : D53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : triangle, area, formula
+ correspondent author