韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 25집 제 2호, 2011. 5. 323-339

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 25, No. 2, May. 2011. 323-339

무리 지수를 갖는 수에 대한 예비교사들의 인식과 오류

이 헌 수 (전남대학교)
박 형 빈 (목포대학교)+
배 강 수 (목포고등학교)

지수법칙에서 지수의 확장은 정수의 계산규칙과 마찬가지로 대수적 형식 불역의 원리에 의한 확장적 구성을 학생들에게 경험하게 할 수 있는 좋은 소재가 될 수 있다. 현행 교과서에서는 지수가 자연수에서 정수, 유리수, 실수 범위까지 확장할 수 있다고 기술하면서 학생들에게 지수가 실수로 확장해도 지수법칙이 성립함을 직관적으로 받아들이도록 하고 있다. 그러나, 지수법칙의 확장에서 유리수 지수나 무리수 지수의 값에 대한 자세한 설명이 없이 지나감으로 인하여 학생들은 이러한 값이 유리수인지 무리수인지 많은 의문을 가지고 있다. 이와 관련된 학생들의 질문에 대하여 대부분의 교사들은 자세한 답변 대신 현행 교과과정 밖의 내용이므로 대학가서 배운다라는 답변으로 그 질문에 대한 답을 대신하곤 한다. 따라서, 본 논문은 지수법칙의 확장에 대한 학생들의 궁금증의 원인을 찾기 위하여 지수법칙의 확장 단원에 대한 현행 고등학교 수학Ⅰ 교과서를 분석하여 지수법칙의 확장에 대한 학생들의 궁금증의 원인을 찾고, 지수법칙의 실수로의 확장에서 학생들이 자주 갖는 의문인 무리 지수를 갖는 수에 대한 예비교사들의 인식과 오류에 대하여 조사하여 예비교사 교육에 대한 시사점을 주고자 한다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

지수법칙에서 지수의 확장은 정수의 계산규칙과 마찬가지로 대수적 형식 불역의 원리에 의한 확장적 구성을 학생들에게 경험하게 할 수 있는 좋은 소재가 될 수 있다. 그러나, 확장된 지수에서 특정한 지수법칙이 성립한다는 것을 공식으로 기억하고 계산에 적용하는 것만을 목적으로 하는 학습지도는 올바른 지도 방법이라 할 수 없다. 지수법칙의 확장을 지도할 때 자연수 지수에서 시작하여 특정한 지수법칙에 의하여 지수가 정수, 유리수, 실수로의 확장에 대한 정의를 학생들이 실제로 만들어 나가는 경험을 하도록 하는 적이 중요하다.

고등학교 학생들은 지수법칙의 확장과 관련하여 정수 지수에서 유리수 지수로 확장을 했을 때 정

* 접수일(2011년 3월 5일), 심사(수정)일(2011년 5월 2일), 게재확정일자(2011년 5월 6일)
* ZDM분류 : B59, F54, U24
* MSC2000분류 : 97B50, 97U20, 97U30
* 주제어 : 지수법칙의 확장, 무리 지수를 갖는 수, 예비교사, 교사의 전문성
+ 교신저자

수에서 유리수 지수로 확장되는 과정을 어려워한다(김정탁, 2009). 그러나, 고등학교 교과서에서 지수법칙을 실수로 확장할 때 간단히 $3^{\sqrt{2}}$ 를 예를 들어 설명하고 직관적으로 성립함을 받아들이도록 강요하고 있다. 대부분의 교과서에는 계산기 등을 이용하여 3^1 , $3^{1.4}$, $3^{1.41}$, $3^{1.414}$, $3^{1.4142}$ 값을 구한 뒤, 이 수들이 일정한 수 $3^{\sqrt{2}}$ 에 가까워진다고 설명하고 있다. 그리고, 임의의 무리수 x 에 대하여 a^x 을 정의할 수 있으므로 지수를 실수의 범위까지 확장할 수 있다고 기술하면서 학생들에게 지수를 실수로 확장할 때도 지수법칙이 성립함을 직관적으로 받아들이도록 하고 있다. 그러나, 학생들은 교과과정상 아직 수열의 극한을 학습하지 않아 수열의 극한을 이용하여 정의한 예에 대해 직관적으로 받아들이기에 다소 무리가 따를 수 있다. 또한 $2^{\sqrt{2}}$, $\text{유리수}^{\text{무리수}}$, $\text{무리수}^{\text{무리수}}$의 값이 유리수인지 무리수인지에 대한 자세한 설명이 없어 학생들은 이 값이 유리수인지 무리수인지에 대한 많은 의문을 가지고 있다. 실례로 인터넷 검색창에서 지수법칙에서 지수를 실수로의 확장에 대한 학생들의 질문을 살펴보면, 지수에 무리수나 복소수가 들어가면 어떻게 되는가, 무리수의 무리수 제곱은 무리수인가, 무리수가 아닌 무리수의 무리수 제곱의 예는 무엇인가, 지수가 유리수일 때와 실수일 때의 차이가 무엇인가, $2^{\sqrt{2}}$ 이 무리수인가 유리수인가, 무리수의 무리수 제곱이 유리수가 될 수 있는가 등과 같은 질문이 많음을 볼 수 있다. 위와 같은 질문이 인터넷 검색창에 많은 이유는 수업시간에 학생들이 이러한 질문을 하였을 때, 대부분의 교사들은 학생들의 질문에 대하여 알고는 있지만 교과과정 밖의 문제라던가, 교과과정상 이해하기 어려워서 대학가서 배운다하고 하거나 혹은 교사자신도 그 질문에 대한 명확한 답을 몰라 답변을 회피하여 생긴 현상일지도 모른다. 따라서, 지수법칙의 실수로의 확장에 대한 교사들의 인식에 대해 연구할 필요가 있다.

지수법칙에 관련된 최근 연구들은 살펴보면, 지수와 관련된 내용을 중심으로 우리나라 교과서와 외국의 교과서를 비교한 연구들이 진행되었으며(김노연, 2008; 전우권, 2007), 2007 개정 수학과 교육과정의 지수법칙에 관한 중학교와 고등학교 과정의 지도 내용을 분석한 연구도 진행되었다(성태숙, 2010). 박지현(2007)은 영(0)에 관한 인식과 오류에 관한 연구에서 중학교 영재학생과 예비교사들을 대상으로 0^0에 대한 인식과 오류에 관해 연구하였고, 김동화와 홍우철(2010)은 0^0과 관련된 자료를 토대로 역사적 수학적 분석을 통하여 0^0이 부정형임을 명확히 하고, 현직교사와 수학교육과 학생들을 대상으로 0^0에 대한 교수 실태를 파악하여 0^0에 대한 효과적인 지도방안에 대하여 연구하였다. 그러나, 학생들이 궁금해 하는 지수법칙을 실수로 확장했을 때 그 결과 값과 관련한 연구가 거의 없어 이와 관련된 연구도 필요하다.

따라서, 본 연구에서는 지수법칙의 확장에 대한 학생들의 궁금증의 원인을 찾기 위하여 지수법칙의 확장 단원에 대한 현행 고등학교 수학Ⅰ 교과서를 분석하여 지수법칙의 확장에 대한 학생들의 궁금증의 원인을 찾고, 지수법칙의 실수로의 확장에서 학생들이 자주 많이 갖는 의문인 $2^{\sqrt{2}}$ 의 값, $\text{유리수}^{\text{무리수}}$, $\text{무리수}^{\text{무리수}}$의 값 등과 같은 무리 지수를 갖는 수에 대한 예비교사들의 인식과 오류에 대하여 조사하여 예비교사 교육에 대한 시사점을 주고자 한다.

2. 연구 문제

본 연구에서는 지수법칙의 확장에 학생들의 궁금증의 원인을 찾기 위하여 지수법칙의 확장 단원에 대한 현행 교과서를 분석하고, 지수법칙의 실수로의 확장에서 예비교사들의 인식과 오류에 대해 연구하기 위하여 다음과 같은 연구 문제를 선정하였다.

(1) 현행 교과서에서 지수법칙의 확장 단원에 대한 구성은 어떠한가?

(2) 지수법칙의 확장에서 유리수$^{\text{무리수}}$, 무리수$^{\text{무리수}}$의 값 대한 예비교사들의 인식과 오류는 무엇인가?

3. 연구의 제한점

본 연구는 지수법칙의 확장에 대한 예비교사들의 인식과 오류를 조사하는데 있어 지수법칙의 확장 중 무리 지수를 갖는 수로 연구의 범위를 한정하였다. 또한, 중소도시에 위치한 대학의 소수의 예비교사를 대상으로 하여 수행한 연구이므로 연구의 결과를 대도시에 위치한 대학이나 다수의 예비교사들의 인식과 오류로 일반화하기에는 한계가 존재할 수 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 지수법칙의 확장

형식 불역의 원리는 기존 수 체계에서 성립하던 성질(형식)이 확장된 수 체계에서도 변하지 않고 성립한다(불역)고 가정하고, 확장된 새로운 수 체계에서의 규칙을 만들어 내는 원리이다. 자연수 지수에서 정수 지수로 확장할 때는 자연수 지수에서 성립하는 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$ 이 불변하는 형식이 되며, 유리수 지수로 확장할 때는 지수법칙 $(a^m)^n = a^{mn}$ 이 불변하는 형식이 된다. 이와 같이 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수와 연산 및 관계들, 즉 대수적 구조를 확장하는 것을 Freudenthal은 대수적 원리(algebraic principle) 또는 형식불역의 원리라고 하였다(우정호, 2000).

자연수에서 시작한 수의 범위를 정수, 유리수로 확장하고 나면 작도 가능한 수, 거듭제곱근으로 나타낼 수 있는 수, 대수적인 수 등을 생각할 수 있다. 거듭제곱근으로 나타낼 수 있는 수는 계수가 유리수인 다항방정식의 근이다. 계수가 유리수인 다항방정식의 근을 대수적인 수(algebraic number)라 하고, 그렇지 않은 수를 초월수(transcendental number)라 한다. 거듭제곱근으로 나타낼 수 있는 수는 대수적인 수이나 그 역은 성립하지 않는다. $2^{\sqrt{2}}$, π , e , e^{π} 은 초월수라고 밝혀졌지만 아직도 많은 수들이 대수적인 수인지 초월수인지 밝혀지지 않고 있다. 예를 들면, $\pi+e$, πe , π^e 등은

많은 수들이 대수적인 수인지 초월수인지 밝혀지지 않고 있다. 예를 들면, $\pi+e$, πe , π^e 등은 대수적인 수인지 초월수인지 밝혀지지 않은 대표적인 미해결 문제들이다.

Hilbert(1902)는 수학의 미해결문제 23 문제를 제시하였는데, 그 중 본 연구 주제와 관련된 7번째 문제는 다음과 같다.

$\alpha\,(\neq 1,\ \neq 0)$ 를 대수적 수라 하고, β 를 무리수라고 하면 α^β 는 초월수인가?

위 문제의 특별한 경우로 1943년 Gelfond는 β 가 무리수인 대수적 수일 때 α^β 는 초월수라는 사실을 증명하였는데(Courant & Robins, 1996) 이것은 Hilbert가 제시한 7번째 문제의 부분적인 해이다. Gelfond 정리(또는 Gelfond-Schneider 정리)라고 알려져 있는 이 정리에 대한 증명은 Gelfond(Gelfond, 1934ab.)와 Schneider(Schneider, 1934ab.)에 의해서 각각 독립적으로 증명되었다. Gelfond 정리(Gelfond-Schneider 정리)는 다음과 같다.

a 가 대수적 수이고, b 가 무리수인 대수적 수이면 a^b 는 초월수이다.

Gelfond 정리에 의해 e^π 와 $2^{\sqrt{2}}$ 는 초월수이다($(-1)^{-i}=(e^{i\pi})^{-i}=e^\pi$). 여기서 Gelfond 정리에 의해 초월수라고 알려진 $2^{\sqrt{2}}$ 를 Gelfond-Schneider 상수, e^π 를 Gelfond 상수라고 하는데(Wells, 1986), 각각의 계산 값은 $2^{\sqrt{2}}=2.66514414\cdots$ 와 $e^\pi=23.140692632\cdots$ 로 알려져 있다. 그러나, Hilbert가 제시한 7번째 문제의 일반적인 경우인 무리수 β 에 대해서는 대수적인 수인지 초월수인 아직까지 알려져 있지 않다.

학생들이 지수법칙의 실수로의 확장에서 많이 갖는 의문 중에서 $2^{\sqrt{2}}$, 유리수$^{\text{무리수}}$, 무리수$^{\text{무리수}}$ 등이 유리수인지 무리수인지에 대해 살펴보면 먼저, Gelfond-Schneider 상수 $2^{\sqrt{2}}$ 는 앞에서 언급한 바와 같이 초월수이므로 무리수이다. 또한, 유리수$^{\text{무리수}}$는 지수는 Gelfond 정리로부터 초월수라는 사실이 증명되었으므로 유리수$^{\text{무리수}}$는 무리수이다. 그러나, 무리수$^{\text{무리수}}$는 유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다. 무리수$^{\text{무리수}}$인 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 은 무리수이다. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 가 유리수라고 하면 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}=r$ 을 만족하는 유리수 r 이 존재한다. 이 식의 양변을 제곱하면 $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^2=r^2$ 즉, $2^{\sqrt{2}}=r^2$. 유리수 r 의 제곱은 유리수이므로 $2^{\sqrt{2}}$ 는 유리수가 되어 앞의 $2^{\sqrt{2}}$ 가 무리수라는 사실에 모순이므로 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 은 무리수이다.

2. 수학교사의 전문성

한 나라의 교육을 논의할 때 정치, 사회, 문화 등 사회 전반과 관련하여 논의되어야 하겠지만 무엇보다도 실제 교육 현장에서 가장 직접적으로 중요한 역할을 차지하는 교사의 문제가 초점이 되기 때문에 교사의 질이 가장 중요하다(신현용, 2003). 그리고, 전통적으로 교사에게는 가르칠 교과에 대한

사이의 상관관계는 학생들의 사회·경제적 지위와 같은 다른 배경적인 특징과 성취도 사이에 존재하는 상관관계보다 훨씬 강하게 존재한다고 하였다. 여러 학자들은 교사의 자질의 측정하기 위한 척도로써 교사의 지적인 능력, 학구적인 능력과 대학에서의 GPA, SAT, ACT와 PRAXIS 등의 점수에 근거한 성적에서 찾으려고 노력하였고, 교사의 어휘력, 교과 내용에 대한 지식과 학생의 성적 사이의 긍정적 관계를 발견하였다(Ehrenberg & Brewer, 1995; Ferguson & Ladd, 1996; Greenwald, Hedges & Laine, 1996; U.S. Department of Education, 2002).

NCATE(National Council for Accreditation of Teacher Education)와 INTASC(Interstate New Teacher Assessment and Support consortium)는 교사의 자질은 교사의 효과 면에서 비판적인 역할을 담당한 것과 같이 교사의 교수법과 가르치는 교과목에 대한 지식에 대한 역할을 담당한다고 여겨 교사 양성 프로그램에서 교사 지원자들의 자질을 평가할 것을 요구하고 있다(INTASC, 2001; NCATE, 2006). NCATE(2006)에 의하면, 교사의 자질은 교사의 행동이 학생, 학부모, 동료교사와 지역사회에 대해 영향을 미치는 가치, 헌신과 직업적인 윤리로 학생들의 학습에 대한 동기유발과 발달에 영향을 주고, 교사의 자질은 교사의 전문적인 성장에도 영향을 주는데 학생들에 대한 보살핌, 공평함, 정직, 책임과 사회적 정의와 같은 가치와 같은 신념과 교사의 행동에 의해 교사의 자질이 좌우된다고 하였다. INTASC(1992)은 초임 교사가 갖추어야 할 10가지 기준을 제시하였는데 그 기준에는 교과에 대한 지식, 개별 학습자에 적합한 교수 전략 적용, 다양한 교수 전략, 동기 부여 등의 내용을 포함하고 있다. 또한 NCTM(2000)은 '학교수학을 위한 원리와 규준(Principles and Standards for School Mathematics)'에서 효과적인 교수를 위해서 학습자로서의 수학을 알고 이해해야 하며, 교수 전략을 알고 이해해야 한다고 제시하였다. 또한, 효과적인 교수를 위해서 도전적이고 적극적인 교수학습 환경을 조성해야 하고 교수활동개선에 대한 지속적인 노력을 해야 한다고 하였다.

우리나라의 경우, 2006년 교육인적자원부는 '신규교사의 자질과 능력에 관한 일반 기준'을 설정하여 교원양성기관의 교육과정 편성, 교원양성기관 평가, 교원선발에서 중점 평가요소 등으로 활용하도록 하였고, 교원양성체제 개선방안에서는 신규교사의 자질과 능력과 관련하여 교사는 교과에 대한 전문 지식을 갖추고, 전문성 개발을 위해 끊임없이 노력해야 한다고 하였다(교육인적자원부, 2006). 박경희와 서혜애(2007)는 교사 전문성에 대해 논의된 국내 연구들에서 교사 전문성의 구성요인을 교육적 가치관, 학생에 대한 이해, 전공 교과의 전문지식, 교수·학습 방법 및 전략, 대인관계 및 의사소통능력, 학습상담 및 생활지도 능력, 자기 개발 능력, 학급경영, 원만한 성격과 인품 등과 같은 9가지로 분류하였다. 또한, 한국교육과정평가원(2008)은 2006년 교육과학기술부가 발표한 '신규교사의 자질과 능력에 관한 일반 기준'을 바탕으로 수학 과목의 성격에 맞게 구체화하여 '수학 교사의 자격 기준'을 발표하였다. 한국교육과정평가원이 발표한 수학 교사의 자격 기준은 수학 학습에 대한 태도와 사명감, 수학적 지식 및 능력, 수학 교육학적 지식 및 능력, 수업 실기의 4개의 영역에 17가지 자격 기준으로 구성되어 있다. 한국교육과정평가원이 발표한 수학 교사의 자격 기준에서 수학적 지식 및 능력 영역에 수학교사는 수학교과에 대한 전문 지식을 가지고 있어야 한다고 제시하고 있다.

능력 영역에 수학교사는 수학교과에 대한 전문 지식을 가지고 있어야 한다고 제시하고 있다.

수학 교사가 갖추어야 할 기본적인 자질에 대한 앞의 논의들을 정리하면 첫째, 교사의 교직에 대한 인성을 지녀야 한다. 둘째, 교사는 자신이 가르치는 교과에 대한 전문적인 지식을 갖춰야 한다. 셋째, 학습자에 대해 이해해야 한다. 넷째, 교사의 수업 능력과 평가 능력이 있어야 한다. 다섯째, 교사는 학생지도와 학급관리 능력이 있어야 한다. 마지막으로, 급변하는 미래사회에 대한 대처 능력이 있어야 한다 등으로 요약할 수 있다. 그러나, 교사의 전문성의 구성요소 중 무엇보다도 교육현장에서 학생들을 가르칠 때 필요한 담당교과에 대한 전문적인 지식이 필요하다고 하겠다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 참여자

예비교사들의 지수법칙의 확장에 대한 인식과 오류를 조사하기 위하여 M 대학교 사범대학 수학교육과 2학년 학생 13명과 교육대학원생 20명을 연구대상자로 선정하였다. 선정된 연구대상자들은 대부분 학부 1, 2학년 과정에서 미분적분학과 초등해석학 과목을 이수하였고, 교육대학원생 중 4명은 현직교사이며 그 외 대부분은 학원 등에서 중·고등학교 학생들을 지도한 경험이 있는 예비교사들이다.

2. 연구 방법

본 연구에서는 지수법칙의 확장에 학생들의 궁금증의 원인을 찾기 위하여 지수법칙의 확장 단원에 대한 현행 고등학교 수학Ⅰ 교과서와 교사용 지도서 5종을 비교·분석하였다. 수학교사가 갖추어야 할 전문성의 구성요소 중 무엇보다도 교육 현장에서 학생들을 가르칠 때 필요한 수학 과목에 대한 전문적이고 폭넓은 지식을 갖추어야 한다. 지수법칙의 실수로의 확장과 관련된 문제를 통하여 예비교사들의 인식과 오류를 조사하기 위하여 비록 고등학교 교과과정 밖이지만 지수법칙의 실수로의 확장과 관련된 내용으로 설문 문항을 구성하여 설문조사를 실시하였다. 설문 문항은 지수법칙의 실수로의 확장과 관련된 $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π}, π^{e}, 유리수^{무리수}, 무리수^{유리수}에 대하여 ① 유리수이다. ② 무리수이다. ③ 유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다. ④ 모르겠다 중 올바른 항목을 선택하도록 하였고, 각 문제에 대하여 선택한 이유에 대하여 간단히 기술하도록 설문지를 구성하였다.

3. 연구 절차

가. 자료수집

지수법칙의 실수로의 확장에 대한 예비교사들의 인식과 오류를 조사하기 위하여 본 연구자가 담당하고 있는 과목을 수강하고 있는 학생들을 대상으로 설문조사를 실시하였다. 본 연구자는 연구대

학생들을 대상으로 2010년 10월 6일에, 교육대학원생을 대상으로 2011년 1월 13일에 설문 조사를 실시하여 설문 자료를 수집하였다.

나. 자료분석

지수법칙의 실수로의 확장에서 예비교사들의 인식과 오류를 조사하기 위하여 실시한 예비교사들의 설문 답안을 바탕으로 지수법칙의 실수로의 확장과 관련된 문제인 $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π} , π^{e} , 유리수무리수와 무리수무리수에 대한 정답률과 오류의 형태에 대하여 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

1. 지수법칙의 확장에 대한 교과서 분석

지수법칙과 관련된 교과서의 지도계통을 살펴보면 중학교 2학년 식의 계산 단원에서 지수법칙에 대하여, 중학교 3학년 수와 연산 단원에서 제곱근과 무리수에 대하여, 고등학교 2학년 지수함수와 로그함수 단원에서 지수의 확장에 대하여 다루고 있다(<표 Ⅳ-1>).

<표 Ⅳ-1> 지수법칙과 관련된 교과서 지도계통

	수학 2		수학 3		수학 I
단원	식의 계산	⇒	실수와 그 계산	⇒	지수함수와 로그함수
내용	지수법칙		제곱근과 실수, 제곱근, 무리수		지수, 지수함수와 그 그래프

각 교과서를 살펴보면 중학교 수학 2의 식의 계산 단원에서 지수가 자연수인 지수법칙에 대하여 기술하고 있고, 자연수에 대한 지수법칙을 바탕으로 하여 고등학교 수학 I의 '지수함수와 로그함수' 단원의 '지수의 확장'에서는 지수를 정수, 유리수, 실수까지 확장할 수 있다고 기술하고 있다. 고등학교 수학 I의 지수의 확장에 대한 교사용 지도서의 지도 목표에서 '지수를 정수, 유리수까지 확장하는 방법을 이해하게 하고 지수가 실수까지 확장될 수 있음을 직관적으로 이해하게 한다'라고 기술하고 있다(김수환 외 12인; 류희찬 외 12인, 양승갑 외 7인, 정상권 외 8인, 황선욱 외 12인). 또한, 교사용 지도서의 지도상의 유의점에서는 '중학교에서 공부한 자연수 지수의 지수법칙을 바탕으로 정수 지수, 유리수 지수로 지수가 확장됨을 체계적으로 이해하게 하고, 특히 실수 지수의 개념은 직관을 통하여 이해할 수 있도록 지도한다'(김수환 외 12인), '유리수 지수에 대한 정의를 이용하여 무리수에 가까워지는 유리수를 이용하여 무리수 지수를 정의할 수 있음을 이해할 수 있도록 하고, 무리수 지수에 대한 지수 법칙은 유리수 지수에 대한 지수법칙을 확장하여 적용할 수 있음을 직관적으로 이해할 수 있도록 한다'(류희찬 외 12인), '무리수 지수에 대한 지수 법칙은 유리수 지수에 대한 지수법칙을 확장하여 적용할 수 있음을 직관적으로 이해할 수 있도록 하고, 실수 지수에 대한 지수법칙은 유

을 확장하여 적용할 수 있음을 직관적으로 이해할 수 있도록 하고, 실수 지수에 대한 지수법칙은 유리수 지수에 대한 지수법칙과 같음을 소개하는 정도로 간단히 다룬다(황선욱 외 12인)라고 기술하고 있다.

앞에서 살펴 본 바와 같이, 대부분의 고등학교 교과서 수학 I의 지수의 확장 단원에 대한 교사용 지도서의 지도목표나 지도상의 유의점은 지수가 실수까지 확장될 수 있음을 직관적으로 이해하게 한다라고 기술하고 있지만 대부분의 교과서는 지수의 실수로의 확장에 대해 직관적으로 이해하기에는 약간의 무리가 있는 내용으로 구성되어 있다. 예를 들면, (주) 교학사의 고등학교 수학 I 교사용 지도서 지도참고자료에서 지수의 실수로의 확장에 대해

> '지수를 유리수에서 실수로 확장할 때에는 자연수에서 정수, 정수에서 유리수로 확장할 때와 그 방법을 달리 한다. 실수집합에서의 완비성 공리를 바탕으로 $\sqrt{2}=1.414213562\cdots$ 에 한없이 가까워지는 유리수의 열 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, ⋯ 을 생각하고 이것을 지수로 하는 수열 $3^{1.4}$, $3^{1.41}$, $3.^{1.414}$, $3^{1.4142}$, ⋯ 의 극한으로 $3^{\sqrt{2}}$을 정의한다'

라고 기술하고 있고(김수환 외 12인), 미래엔컬쳐그룹(구 대한교과서)의 고등학교 수학 I 교사용 지도서 지도참고자료의 무리수 x에 대한 a^x의 값의 의미에서 '일반적으로 x가 무리수일 때, a^x의 값은 무리수 x에 수렴하는 유리수 수열 $\{b_n\}$을 생각하여 $\{a^{b_n}\}$의 극한값으로 정의한다'라고 기술하고 있다(류희찬 외 12명). 앞의 지수의 실수로의 확장에 대한 예에서 수열의 극한을 이용하여 설명하고 있으나, 고등학교 수학 I의 교과과정에 따른 단원의 순서는 행렬과 그래프, 지수함수와 로그함수, 수열, 수열의 극한 순으로 구성되어 있다. 수열의 극한은 지수함수와 로그함수보다 더 뒤에 위치에 있으므로 극한을 이용하여 지수의 실수로의 확장을 정의하는 것은 교과과정상 학생들이 이해하기에는 약간의 무리가 따른다고 할 수 있다. 미래엔컬쳐그룹(구 대한교과서)의 고등학교 수학 I 교사용 지도서 지도참고자료에서는 $\{3^{(\sqrt{2})}\}^{\sqrt{2}}$의 예를 들며 무리수^{무리수}의 값이 유리수인지 무리수인지를 직관적으로 대답해 보게 한 후 결과를 알려주어 수학에서의 직관은 정확하지 않을 수 있음을 이해하게 한다라고 기술하고 있는데, 이를 위해서는 교사가 이와 관련된 정확한 지식을 갖추고 있어야 하지만 현실적으로 그렇지 못하기 때문에 학생들은 유리수^{무리수}나 무리수^{무리수}가 유리수인지 무리수인지에 대한 의문을 가지게 된다. 이를 위해서는 교사가 이에 대한 정확한 지식을 갖추기 위하여 교사용 지도서에 이와 관련된 내용을 첨가할 필요가 있다.

2. 지수법칙의 확장에 대한 예비교사들의 인식

가. $2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 예비교사들의 인식

$2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 예비교사들의 인식을 조사하기 위하여 $2^{\sqrt{2}}$ 가 유리수인지 무리수인지 판단하라는 질문에 수학교육과 2학년 13명 중 6(46.2%)명은 유리수라고 응답한 반면 6명(46.2%)은 무리수라고

(55.6)은 무리수라고 응답하였다. 전체적으로 정답인 무리수라고 답한 예비교사의 수는 16명(51.6%)으로 유리수라고 답한 예비교사의 수보다 약간 높았으나 큰 차이는 없는 것으로 조사되었다.

<표 IV-2> $2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 예비교사들의 반응

	학부		교대원		계	
	빈도수	백분율	빈도수	백분율	빈도수	백분율
유리수이다.	6	46.2	8	44.4	14	45.2
무리수이다.	6	46.2	10	55.6	16	51.6
모르겠다.	1	7.7	0	0.0	1	3.2
계	13	100.0	18	100	31	100

자신의 답에 대한 이유를 설명하라는 질문에 대해 모든 예비교사들은 자신의 답에 대해 논리적으로 설명하지 못하였고, 직관적으로 무리수 또는 유리수라고 응답한 예비교사들이 많은 것으로 조사되었다. 무리수라고 응답한 교사들은 대부분이 로그를 이용하여 자신의 답에 대한 근거를 제시하려고 하였지만 정확한 답을 제시하지는 못하였다(<표 IV-3>). 몇몇의 예비교사들은 지수가 무리수이기 때문에 무리수라고 응답하였다. 무리수라고 응답한 예비교사들은 자신의 답에 대한 이유에 대하여 다양한 방법으로 자신의 선택한 답에 대한 근거를 제시하려고 한 반면에 유리수라고 응답한 교사들은 직관적으로 유리수일 것 같다는 응답이 대다수를 차지하였고, 일부는 밑이 유리수(자연수)인 경우 지수가 무리수일지라도 유리수일 것 같다고 응답하였다.

<표 IV-3> $2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 반응의 이유

반응	반응 이유
무리수	$2^{\sqrt{2}}$는 2^1과 2^2의 사이값
	분수값으로 표현하기 어려운 듯
	지수가 무리수이기 때문에
	고교과정에서 지수법칙이 실수인 범위까지 적용된다고 배움. $2^{\sqrt{2}}=x$라 하면 $\sqrt{2}\log 2=\log x$. 따라서, 무리수
	$\sqrt{2}\log 2=\log x$
	귀류법을 사용하였는데 모순 발생. $2^{\sqrt{2}}=\frac{b}{a}$로 가정하면 $b=2^{\sqrt{2}}a$. $b=2\cdot 2^{\sqrt{2}-1}a$. b가 2의 배수이므로 $b=2k$. $2\cdot 2^{\sqrt{2}-1}a=2k$. $k=2^{\sqrt{2}-1}a$.(모순)
	$1<\sqrt{2}<2$. 2를 $\sqrt{2}$번 곱한 것. 직관적으로 무리수
	로그를 취했을 때 $\sqrt{2}$가 밖으로 꺼내지므로 무리수의 곱이 생김
	$2^{\sqrt{2}}=k$라 하면 $\sqrt{2}\log 2=\log k$. $10^{\sqrt{2}\times 0.3010}=k$. k는 10의 거듭제곱꼴
	$y=2^{\sqrt{2}}$. $\log_2 y=\sqrt{2}$. y는 무리수
	직관적으로
유리수	밑이 유리수(자연수)인 경우 지수가 무리수일지라도 유리수일 것 같음

나. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 에 대한 예비교사들의 인식

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 가 유리수인지 무리수인지 판단하라는 질문에 정답인 무리수라고 응답한 한 학생 중 학부 학생은 절반 이상인 7명이 무리수라고 응답하였고 교육대학원생은 12명이 무리수라고 응답하였다(<표 Ⅳ-4>). 전체적으로 살펴보면 예비교사 31명 중 19명(61.3%)은 무리수, 5명(16.1%)은 유리수, 4명은 모르겠다, 3명은 유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다라고 응답하였다. 자신의 답에 대한 이유를 설명하라는 질문에 대해 앞의 $2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 조사 결과와 마찬가지로 모든 예비교사들은 자신의 답에 대해 논리적으로 설명하지 못하였고, 대부분의 예비교사들이 직관적으로 판단하여 답을 선택한 것으로 조사되었다.

<표 Ⅳ-4> $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 에 대한 예비교사들의 인식

	학부		교대원		계	
	빈도수	백분율	빈도수	백분율	빈도수	백분율
유리수이다.	2	15.4	3	16.7	5	16.1
무리수이다.	7	53.8	12	66.7	19	61.3
유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다.	2	15.4	1	5.6	3	9.7
모르겠다.	2	15.4	2	11.1	4	12.9
계	13	100	18	100.0	31	100

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 가 무리수라고 응답한 예비교사들 중 상당수가 밑과 지수가 무리수이므로 또는 밑 $\sqrt{2}$ 가 무리수이기 때문에 무리수라고 답한 것으로 나타나 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 의 경우 $2^{\sqrt{2}}$ 와는 달리 밑과 지수 모두 무리수이기 때문에 무리수라고 직관적으로 판단하여 답한 것으로 여겨진다. 이러한 밑의 형태로 인하여 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 에 대한 정답률이 $2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 정답률보다 약간 상승한 것으로 조사되었다.

다. π^e 와 e^π 에 대한 예비교사들의 인식

e^π 와π^e 에 대한 예비교사들의 인식을 알아보기 위하여 e^π 와π^e 이 각각 유리수인지 무리수인지 판단하도록 하였고 그 대답에 대한 이유를 설명하도록 하였다. e^π 에 대한 질문에 학부학생의 경우 과반수 이하인 6명(46.2%)이, 교육대학원생의 과반수 이상인 12명(66.7%)이 무리수라고 응답하여 전체 예비교사 중 18명(58.1%)이 무리수라고 응답한 반면에, 유리수라고 응답한 예비교사는 한명도 없었다(<표 Ⅳ-5>). e^π 에 대한 정답률을 살펴보면 이전의 질문인 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 의 정답률과 비슷하게 나타남을 알 수 있는데 이는 예비교사들의 판단한 이유에 대한 설명에서 '밑과 지수 모두 무리수이므로', '밑 e가 무리수이므로', 또는 '앞의 문제에 대한 또 다른 예'에서 볼 수 있듯이 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 와 마찬가지로 e^π 도 무리수의 무리수 지수의 형태이므로 이러한 결과가 나온 것으로 판단된다.

<표 IV-5> e^{π} 에 대한 예비교사들의 인식

대상	학부		교대원		계	
	빈도수	백분율	빈도수	백분율	빈도수	백분율
유리수이다.	0	0.0	0	0.0	0	0.0
무리수이다.	6	46.2	12	66.7	18	58.1
유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다.	3	23.1	1	5.6	4	12.9
모르겠다.	4	30.8	4	22.2	8	25.8
무응답	0	0.0	1	5.6	1	3.2
계	13	100.0	18	100.0	31	100

이러한 결과는 π^e 에 대한 질문에서도 비슷하게 나타남을 확인할 수 있다. π^e 에 대한 정답을 맞힌 예비교사는 단 2명(605%)인데 반하여, π^e 가 무리수라고 응답한 예비교사는 학부학생이 7명(53.8%), 교육대학원생이 20명(72.2%)으로 무리수라고 응답하였다(<표 IV-6>).

<표 IV-6> π^e 에 대한 예비교사들의 인식

대상	학부		교대원		계	
	빈도수	백분율	빈도수	백분율	빈도수	백분율
유리수이다.	1	7.7	1	5.6	2	6.5
무리수이다.	7	53.8	13	72.2	20	64.5
유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다.	2	15.4	0	0.0	2	6.5
모르겠다.	3	23.1	4	22.2	7	22.6
계	13	100	18	100	31	100.0

π^e 가 무리수라고 응답한 예비교사 전체는 20명(64.5%)으로 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 와 e^{π} 의 응답률과 비슷하게 나타났는데 이는 예비교사들이 밑과 지수의 형태에 따라 유리수인지 무리수인지 판단했음을 알 수 있다. 실제로 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π} 와 π^e 와는 다르게 $2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 예비교사들의 반응에서 유리수라고 답한 예비교사는 14명(45.2%), 무리수라고 판단한 교사는 16명(51.6%)으로 거의 반반으로 나누어짐을 볼 수 있다(<표 IV-2>).

라. 유리수의 무리수 지수, 무리수의 무리수 지수에 대한 예비교사들의 오류

유리수의 무리수 지수, 무리수의 무리수 지수에 대한 예비교사들의 인식을 알아보기 위하여 유리수의 무리수 지수, 무리수의 무리수 지수가 '유리수이다', '무리수이다', '유리수일수도 있고 무리수일 수도 있다', '모르겠다'의 4 가지 중에서 하나를 선택하도록 하였다. 먼저 유리수의 무리수 지수에 대한 질문에 대해 무리수라고 응답한 예비교사는 12명(38.7%), 유리수라고 응답한 교사는 9명(29.0%)으로 $2^{\sqrt{2}}$ 에서 무리수 , 유리수라고 응답한 교사의 수(무리수 16명(51.6%), 유리수 14명(45.2%))보다 많이 줄었고 정답률에서 많은 차이가 있음을 알 수 있다(<표 IV-2>, <표 IV-7>). 왜 그렇게 생각하

는지에 대한 이유에 대해 유리수 또는 무리수라고 답한 예비교사들의 대부분은 앞의 $2^{\sqrt{2}}$ 에 의해서 유리수의 무리수 지수가 유리수 또는 무리수라고 인식하고 있는 것으로 조사되었다.

<표 Ⅳ-7> 유리수의 무리수 지수에 대한 예비교사들의 반응

대상	학부		교대원		계	
	빈도수	백분율	빈도수	백분율	빈도수	백분율
유리수이다.	4	30.8	5	27.8	9	29.0
무리수이다.	3	23.1	9	50.0	12	38.7
유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다.	3	23.1	1	5.6	4	12.9
모르겠다.	3	23.1	3	16.7	6	19.4
계	13	100.0	18	100.0	31	100

무리수의 무리수 지수에 대한 질문에 대해 유리수라고 응답한 예비교사는 한 명도 없었고, 무리수라고 응답한 예비교사는 16명(51.6%), 그리고 정답인 유리수일수도 있고 무리수 일수도 있다고 대답한 예비교사는 8명(25.8%)로 조사되었다(<표 Ⅳ-8>). 무리수라고 응답한 예비교사들의 대부분은 자신의 선택에 대해 앞의 문제인 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π} , π^{e} 에 의해서 무리수라고 설명하고 있지만 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π} , π^{e} 에 대한 응답률과 비교해 보면 다소 차이가 있는 것으로 조사되었다.

<표 Ⅳ-8> 무리수의 무리수 지수에 대한 예비교사들의 반응

대상	학부		교대원		계	
	빈도수	백분율	빈도수	백분율	빈도수	백분율
유리수이다.	0	0.0	0	0.0	0	0.0
무리수이다.	4	30.8	12	66.7	16	51.6
유리수인지 무리수인지 밝혀지지 않았다.	6	46.2	2	11.1	8	25.8
모르겠다.	3	23.1	2	11.1	5	16.1
무응답	0	0.0	2	11.1	2	6.5
계	13	100.1	18	100	31	100

지수법칙의 확장에 대한 앞의 결과들을 종합적으로 살펴보면, 각 질문에 대한 예비교사들은 밑이 유리수일 때 유리수라고 응답한 수가 많은 반면, 밑이 무리수일 때는 유리수라고 응답한 예비교사는 전혀 없거나 선택한 사람이 적었고, 무리수라고 응답한 예비교사들은 밑이 유리수나 무리수일 때 거의 비슷한 반응을 보였다. 즉, 지수법칙의 확장에 대한 질문에 유리수라고 응답한 예비교사들은 밑의 형태에 의존하여 판단하였고, 무리수라고 응답한 예비교사들은 밑의 형태보다는 지수의 형태에 따라 판단하였음을 알 수 있었다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 지수법칙의 확장에 학생들의 궁금증의 원인을 찾기 위하여 지수법칙의 확장 단원에 대한 현행 고등학교 수학Ⅰ 교과서와 교사용 지도서 5종을 비교·분석하였고, 지수법칙의 실수로의 확장에서 예비교사들의 인식과 오류에 대해 조사하기 위하여 M 대학교 수학교육과 학생 13명과 교육대학원생 20명을 대상으로 지수법칙의 실수로의 확장에서 학생들이 자주 많이 갖는 의문인 $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π}, π^{e}, $유리수^{무리수}$, $무리수^{무리수}$ 등에 대한 인식과 오류에 대해 설문 조사를 실시하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 현행 고등학교 수학Ⅰ 교과서는 지수의 실수로의 확장에 대해 수열의 극한을 이용하여 실수로 확장할 수 있다고 설명하고 있지만 직관적으로 이해하기에는 약간의 무리가 있는 내용으로 구성되어 있다. 수학 Ⅰ의 지수의 실수로의 확장에서 $3^{\sqrt{2}}$ 을 예를 들어 수열의 극한을 이용하여 실수로 확장할 수 있다고 설명하고 있지만 고등학교 수학 Ⅰ의 교과과정에 따른 단원의 순서는 행렬과 그래프, 지수함수와 로그함수, 수열, 수열의 극한 순으로 구성되어 있어 극한을 이용하여 지수의 실수로의 확장을 정의하는 것은 교과과정상 학생들이 이해하기에는 약간의 무리가 따른다고 할 수 있다(성태숙, 2010).

둘째, 지수법칙의 확장에 대한 예비교사의 정답률은 문제의 유형에 따라 다르게 나타났다. 지수법칙과 관련된 문제 중에서 비슷한 형태인 $2^{\sqrt{2}}$ 와 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 에 대한 정답률은 각각 51.6%와 61.3%로 다른 문제의 정답률보다 상대적으로 높게 나타났지만, 비슷한 형태인 e^{π} 와 π^{e} 의 정답률은 58.1%와 6.5%로 극단적인 경향을 보였다. 그리고, $유리수^{무리수}$와 $무리수^{무리수}$에 대한 정답률은 38.7%와 25.8%로 $유리수^{무리수}$가 약간 더 정답률이 높은 것으로 나타났다. 이와 같은 결과는 예비교사의 답의 선택 기준이 지수의 형태보다는 밑의 형태에 의존하여 판단하여 이러한 결과가 나온 것으로 판단된다.

셋째, 지수법칙의 확장에 대한 문제에서 예비교사들은 판단은 논리적이지 못하였고, 지수의 형태보다는 밑의 형태에 직관적으로 반응하는 경향이 있다. $2^{\sqrt{2}}$ 에 대한 예비교사들의 반응을 살펴보면 (<표 Ⅳ-3>), 예비교사들은 자신의 답에 대해 논리적으로 설명하지 못하였고, 직관적으로 무리수 또는 유리수라고 응답한 예비교사들이 많은 것으로 나타났다. 무리수라고 응답한 교사들은 대부분이 로그를 이용하여 자신의 답에 대한 근거를 제시하려고 하였지만 정확한 답을 제시하지는 못하였다. 또한, 각 질문에 대한 예비교사들은 밑이 유리수일 때 유리수라고 응답한 수가 많은 반면, 밑이 무리수일 때는 유리수라고 응답한 예비교사는 전혀 없거나 선택한 사람이 적었고, 무리수라고 응답한 예비교사들은 밑이 유리수나 무리수일 때 거의 비슷한 반응을 보였다. 즉, 지수법칙의 확장에 대한 질문에 유리수라고 응답한 예비교사들은 밑의 형태에 의존하여 판단하였고, 무리수라고 응답한 예비교사들은 밑의 형태보다는 지수의 형태에 따라 판단함을 알 수 있었다.

연구 결과로부터 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 지수법칙에서 지수의 실수로의 확장과 관련된 문제들에 관한 현직 교사의 인식에 대하여 연구할 필요가 있다. 본 연구에서는 지수법칙에서 지수의 실수로의 확장과 관련된 문제들에 대해 예비교사들을 대상으로 조사하였다. 그러나 예비교사와 현직교사의 지수법칙에서 지수의 실수로의 확장에 대한 인식이 다를 수 있으므로 현직 교사를 대상으로 한 연구가 필요하다.

둘째, 현행 고등학교 수학Ⅰ 교사용 지도서에 지수의 실수로의 확장에 유리수무리수나 무리수무리수가 유리수인지 무리수인지에 언급과 그에 대한 예를 첨가할 필요가 있다. 한 교과서 교사용 지도서를 예를 들면, $\{3^{(\sqrt{2})}\}^{\sqrt{2}}$의 예를 들며 무리수^{무리수}의 값이 유리수인지 무리수인지를 직관적으로 대답해 보게 한 후 결과를 알려주어 수학에서의 직관은 정확하지 않을 수 있음을 이해하게 한다고만 기술하고 있는데, 교사들이 이와 관련된 배경 지식을 가질 수 있도록 교사용 지도서에 이와 관련된 간단한 내용이나 예들을 첨가할 필요가 있다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2006). 학교 교육력 제고를 위한 「교원양성체제 개선방안」.

교육인적자원부 (2007). 2007년 개정교육과정(2007.2.28. 고시).

김노연 (2008). 지수에 대한 한국과 미국의 수학 교과서 비교 연구. 건국대학교 교육대학원 교육학석사학위논문.

김동화 · 홍우철 (2010). 고등학교 수학에서 0^0의 지도 방안. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **24(2)**, 283-300.

김수환 외 12인 (2010). 고등학교 수학 I 교사용 지도서. 서울: (주) 교학사.

김정탁 (2009). '수학적 사고'의 장으로서의 지수-로그. 아주대학교 교육대학원 교육학석사학위논문.

류희찬 외 12인 (2010). 고등학교 수학 I 교사용 지도서. 서울: 미래엔컬쳐그룹(구 대한교과서).

박경희 · 서혜애 (2007). 영재교육 교사 전문성의 구서요소 탐색 연구. 영재교육연구. **17(1)**, 77-98.

박지현 (2007). 중학교 영재학생과 예비교사의 영(0)에 관한 인식과 오류. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **46(4)**, 357-369.

성태숙 (2010). 중등학교 교육과정에서의 지수법칙 지도방안. 부산대학교 교육대학원 교육학석사학위논문.

신현용 (2003). 교사 양성 대학 수학교육과 교육 과정 및 교수-학습 방법 개발에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **42(4)**, 431-452.

양승갑 외 7인 (2010). 고등학교 수학 I 교사용 지도서. 서울: 금성출판사.

우정호 (2000). 수학학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.

우정호 외 5인 (2005). 고등학교 수학 I 교사용 지도서, 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

전우권 (2007). 한국과 일본의 수학교과서 비교 연구 : 지수와 관련된 개념을 중심으로. 성균관대학교 교육대학원 교육학석사학위논문.

정상권 외 8인 (2010). 고등학교 수학 I 교사용 지도서. 서울: 금성출판사.

한국교육과정평가원 (2008). 수학 교사의 자격 기준.

황선욱 외 12인 (2010). 고등학교 수학 I 교사용 지도서. 서울: 신사고.

Courant, R., & Robbins, H. (1996). *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*(2nd Ed). New York: Oxford University Press.

Derbyshire, J. (2004). *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*. New York: Penguin.

Ehrenberg, R. G., & Brewer, D. J. (1995). Did teacher's verval ability and race matter in the 1960s? *Coleman revisited. Economics of Education Review*. **14(1)**, 1-21.

Ferguson, R. F., & Ladd, H. F. (1996). How and why money matters. An Analysis of Alabama schools. In H. F. Ladd(ed.). *Holding schools accountable: Performance based reform in education*(pp. 265-298). Washington, DC: Brookings Institute.

Gelfond, A. O. (1934a). Sur le septieme Probleme de D. Hilbert. *Comptes Rendus Acad. Sci. URSS Moscou*. **2**, 1-6.

Gelfond, A. O. (1934b). Sur le septieme Probleme de Hilbert. *Bull. Acad. Sci. URSS Leningrade* **7**, 623-634

Greenwald, R., Hedges, I. V., & Laine, R. D. (1996). The effect of school resources on student achievement. *Review of Educational Research*. **66(3)**, 361-396.

Hilbert, D. (1902). Mathematical Problems. *Bull. Amer. Math. Soc.* **8**. 437-479. Hilbert, D. Reprinted in 2000. *Bull. Amer. Math. Soc.* **37**, 407-436.

INTASC (1992). *Model Standards for Beginning Teacher Licensing, Assessment and Development: A Resource for State Dialogue*. Washington, DC: Council of Chief State School Officers.

INTASC (2001). *Model standards for licensing general and special education teachers of students with disabilities: A resource for state dialogue*. Washington, DC: Council of Chief State School Officers.

NCATE (2006). *Professional standards for the Accreditation of schools, colleges, and departments of education*. Washington, DC: Author.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, V A: NCTM.

Schneider, T. (1934a.). Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I. *J. reineangew. Math.* **172**, 65-69.

Schneider, T. (1934b). Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. II. *J. reineangew. Math.* **172**, 70-74.

U.S. Department of Education (2002). *Meeting the highly qualified teachers challenge: The secretary's annual report on teacher quality*. Washington, DC: Author.

Wells, D. (1986). *The Penguin Dictiontary of Curious and Interesting Numbers*. Middlesex, England: Penguin Books.

Wenglinsky, H. (2002). How school matter. The link between teacher classroom practices and student academic performance. *Education Policy Analysis Archives*. **10(12)**, Retrieved November 15, 2010 from Http://epaa.asu.edu/epaa/v10n12/.

A study on the pre-service teacher's recognition and fallacy for a number with irrational exponent

Lee, Heon Soo
Dept. of Math., Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea
E-mail : mathlee@chonnam.ac.kr

Park, Hyung Bin⁺
Dept. of Math. Education, Mokpo National University, Muan 534-729, Korea
E-mail : hbpark@mokpo.ac.kr

Bea, Kang Soo
Mokpo High School, Mokpo 530-360, Korea
E-mail : king38@naver.com

The expansion of exponential law as the law of calculation of integer numbers can be a good material for the students to experience an extended configuration which is based on an algebraic principle of the performance of equivalent forms. While current textbooks described that exponential law can be expanded from natural number to integer, rational number and real number, most teachers force students to accept intuitively that the exponential law is valid although exponent is expanded into real number. However most teachers overlook explaining the value of exponent of rational number or exponent of irrational number so most students have a lot of questions whether this value is a rational number or a irrational number. Related to students' questions, most teacher said that it is out of the current curriculum and students will learn it after going to college instead of detailed answers.

In this paper, we will present several examples and the values about irrational exponents of a positive rational and irrational exponents of a positive irrational number, and study the recognition and fallacy of would-be teachers about the cases of irrational exponents of a positive rational and irrational exponents of a positive irrational number at the expansion of exponential law.

* ZDM Classification : B59, F54, U24

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B50, 97U20, 97U30

* Key Words : expansion of exponential law, a number with irrational exponent, pre-service teacher, teacher's expertise

⁺ Corresponding Author