韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 25집 제 2호, 2011. 5. 289-308

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 25, No. 2, May. 2011. 289-308

한국과 인도의 고등학교 수학과 교과서 비교 연구

이 송 희 (부일외국어고등학교)[1)]
김 선 홍 (숙명여자대학교)[2)]

본 연구는 인도의 고등학교 수학교과서를 한국의 교과서와 비교, 분석하여 한국의 수학교육에 실현가능하고 개선이 될 만한 점들을 발견하는데 목적이 있다. 이를 위해 먼저 인도의 교육제도에 대해 개관하고, 인도와 한국의 고등학교 수학 교과서를 단원구성, 내용구성 등으로 나누어 비교 분석한다.

Ⅰ. 서 론

교육의 나라별 연구에 있어서 대부분의 연구자들이 가장 먼저 시도하는 것이 교과서 연구이다. 교과서는 각 나라마다 갖고 있는 공통적인 교육 도구이자 국가 교육 정책이 반영된 교육 과정의 구체적 산물이므로 이를 연구하는 것은 가장 기초적이고 필수적인 교육 연구 방법이라고 볼 수 있다. 이 논문에서는 인도의 수학교육과 한국의 수학교육의 바른 접목을 기대 하기 위해 양국의 고등학교 수학교과서를 비교, 분석하고자 한다.

미국의 실리콘밸리와 미항공우주국(NASA) 인력의 30%를 인도인이 장악할 만큼 놀라운 IT 인재의 배출로 인해 인도식 교육을 향한 관심이 높다. 인도의 수학교육에는 한국의 수학교육에서 발견할 수 없는 장점이 있으며 이의 적절한 도입은 한국의 수학교육 발전에 긍정적인 역할을 할 수 있을 것이다. 그러나 19단을 비롯한 인도의 암기식 교육에 대한 반론이 있고, 인도의 수준 높은 수학교육과 한국의 수학교육의 차이를 극복할 수 있는 방법에 대한 논의는 필요하다. 따라서 맹목적인 수용이 아닌, 인도의 수학교육의 철저한 연구를 통해 한국 수학교육과의 필요와 적합을 따져 보아야 할 필요가 있다. 이와 관련된 선행연구로 이은주 (2004), 박경미 (2005), 백혜진 (2005), 이상일 (2007), 유진무 (2008), 이미연 (2008) 등이 있지만 이들은 주로 인도의 고등학교 수학과 과정의 일부분에 대한 연구였으며, 통합적으로 다룬 연구는 부재하였다. 이상일 (2007)의 경우에는 인도의 12단계 수학교과서 중심으로 연구가 이루어지기는 하였으나 연구의 비교 대상인 인도의 교과서가 인도의 현 교

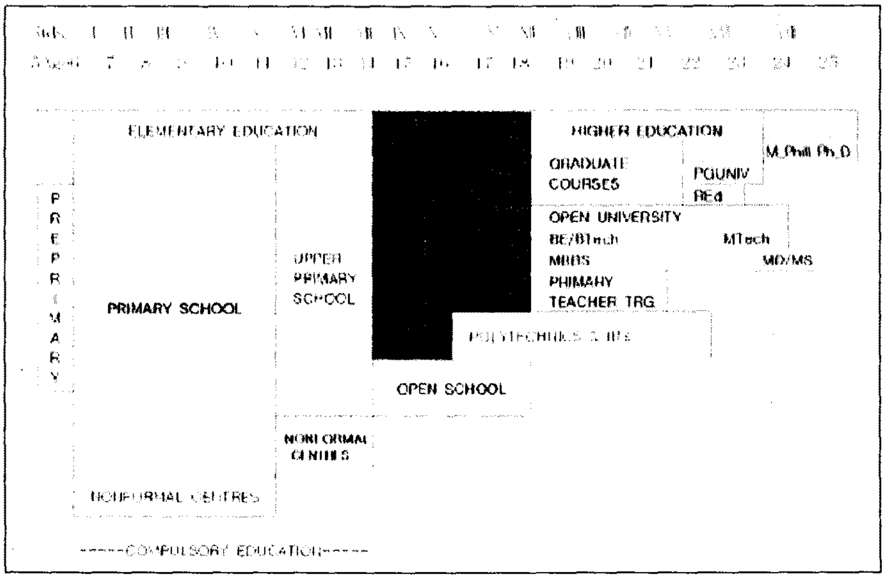
* 접수일(2011년 1월 12일), 심사(수정)일(2011년 3월 14일), 게재확정일자(2011년 4월 18일)
* ZDM분류 : A35
* MSC2000분류 : 97-03
* 주제어 : 한국고등학교 수학교과서, 인도고등학교 수학교과서, 인도교육체계

1) 제1저자

2) 교신저자, 본 연구는 숙명여자대학교 2010학년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음

육과정의 개정 전인 2003년도에 발행된 교과서였다. 이 논문에서는 인도와 한국의 고등학교 수학 교과서를 최근 2007년에 발행된 인도의 12단계 수학 교과서를 중심으로 비교, 분석하고자 한다. 올바른 비교, 분석을 위해 2장에서 인도의 교육제도를 간단히 고찰할 것이며 논문의 주된 내용은 3장에서 논의 될 것이다.

Ⅱ. 인도의 교육 제도



<그림 1> 인도의 교육 체계 (홍재호, 2008)

인도의 교육 체계는 <그림 1>과 같이 전체적으로 볼 때 크게 pre-primary education, primary education(1학년-8학년), secondary education(9학년-12학년), 그리고 higher education의 4단계로 나뉘며, 작게는 취학전 교육(nursery/pre-primary), 초등교육(primary: 1학년-5학년), 상급초등교육(upper primary: 6학년-8학년), 중등교육(secondary: 9학년-10학년), 상급중등교육(higher/senior secondary: 11학년-12학년), 대학교육 (under graduate), 대학원교육(post graduation) 등 7단계로 구분된다.

교육과정상으로 보면 primary school(초등학교)이 6세-11세까지로 1학년-5학년까지, middle school(중학교)이 11세-14세까지로 6학년-8학년까지, high school(고등학교)은 14세-18세까지로 9학년-12학년까지이다. 고등교육은 기술학교, 대학, 대학교가 포함된다. 사실상 middle school은 중학교가 아니며 의무교육인 초등교육의 상급학교(upper primary school)에 해당한다(홍재호, 2008).

인도의 학교 유형은 크게 세 가지, 즉, 카톨릭 계통의 학교, 사립학교인 Public School 그리고, 인

도 서민 및 빈곤층이 다니는 공립학교인 Government School로 구분된다. 이 학교 유형 중에서 국제적으로 활동하는 인도 고급 인력의 학교 배경은 거의 모든 경우에 카톨릭 배경학교나 사립학교 출신이며, 공립학교 출신이 국내외를 막론하고 최고 인재로 등장하는 경우는 매우 예외적이다.

초등학교 1학년부터 대학원까지의 대부분의 교육 평가 방법은 주관식이다. 간혹 객관식이 섞여서 시험에 출제 될 수는 있으나 이 경우 득점에 별로 도움을 주지 않을 정도로 극히 일부분이다. 인도는 한국의 수능고사와 같은 국가고사를 10학년과 12학년 때 실시하는데 이때에도 평가 방법이 주관식으로 이루어진다.

인도 초, 중, 고교에서 배우는 교과목들의 수는 한국이 17개 과목까지이지만 7개 과목 정도로서 적은 편이다. 인도의 국어격인 힌디어도 8학년 즉 중학교 2학년 까지만 배우며 그 후에는 제 2외국어인 불어, 독일어 등과 같이 선택과목으로 처리된다. 미술이나 음악 등은 따로 과목이 없고 특별 활동으로서만 한다. 수학은 지난 2005년까지의 경우 10학년 까지 필수과목으로 다루게 하였으며, 그 후에는 수학이 필요한 자연계나 경영계에서만 다룰 뿐 인문계에서는 수학 과목을 배우지 않도록 하였다. 더욱 나아가 2006년 이후로는 수학을 8학년 까지만 배우게 하고 8학년 이상에는 선택과목이 되도록 하였다 (김도영, 2006).

Ⅲ. 인도와 한국 교과서 비교 · 분석

1. 연구 방법

본 연구를 위한 비교의 대상으로 한국의 수학 교과서는 (주)두산의 수학과 수학 익힘책 (우정호 외. 2009), (주)교학사의 수학Ⅰ과 수학Ⅰ익힘책, 수학Ⅱ, 수학Ⅱ 익힘책, 미적분과 통계 기본, 미적분과 통계 기본 익힘책 (황석근 외. 2010), (주)지학사의 적분과 통계, 적분과 통계 익힘책, 기하와 벡터, 기하와 벡터 익힘책, 수학의 활용 (이강섭. 2010)을 선정하였다. 이상은 모두 7차 개정교육과정이 적용된 교과서이다. 인도의 수학 교과서는 국정 교과서인 MATHEMATICS Textbook for Class Ⅻ Part Ⅰ (P. K. Jain. et al. 2007), MATHEMATICS Textbook for Class Ⅻ Part Ⅱ (P. K. Jain. et al. 2007)를 사용하였다. 실제로 인도의 고등학교 수학 교과서는 〈MATHEMATICS Textbook for Class Ⅺ〉 와 〈MATHEMATICS Textbook for Class Ⅻ〉 로 이루어져 있지만, 방대한 내용으로 인하여 이 논문에서는 〈MATHEMATICS Textbook for Class Ⅻ〉 에 대해서만 연구한다. 또한 필요에 따라 인도의 중학교 과정 수학 교과서인 MATHEMATICS Textbook for Class Ⅵ, Ⅶ, Ⅷ (H.K. Dewan. et al 2007), MATHEMATICS Textbook for Class Ⅸ, Ⅹ (P. Sinclair. et al. 2007)를 참고하였다. 한국의 중, 고등학교 교과서에는 여러 가지가 있으나, 분석의 대상으로 과목당 한 종류의 교과서만 채택하였다. 그러나 한국의 모든 교과서는 검정 기준에 의해 출판되므로 연구 결과 오류에 크게 영향을 주지 않을 것으로 생각된다.

2. 단원의 구성 비교

가. 인도의 수학교과서 대단원 구성에 따른 한국의 교과 비교

인도의 고등학교 수학 교과서 단원에 따른 한국의 교과 단계를 정리해 보면 다음의 표와 같다.

<표 1> 인도의 고등학교 수학 교과서 단원에 따른 한국의 교과 단계 비교

인도 교과서		대단원명	중학교과정	고1	선택과목					
				수학	수학 I	수학 II	미적분과통계기본	적분과통계	기하와벡터	수학의활용
MATHE-MATICS Textbook for Class XII	Part I	1. Relations and Functions			O					
		2. Inverse Trigonometric Functions	해당 사항 없음							
		3. Matrices			O					
		4. Determinants			O					
		5. Continuity and Differentiability			O	O	O			O
		6. Application of Derivatives				O	O			
		Appendix 1. Proofs in Mathematics								
		Appendix 2. Mathematical Modelling								
	Part II	7. Integrals					O	O		
		8. Application of Integrals					O	O		
		9. Differential Equations	해당 사항 없음							
		10. Vector Algebra							O	
		11. Three Dimensional Geometry							O	
		12. Linear Programming		O						O
		13. Probability					O	O		O

인도의 고등학교 수학교과 단원의 대부분은 한국의 고등학교에서 다루는 단원들이나 「2. Inverse Trigonometric Functions」와 「9. Differential Equations」처럼 한국의 고등학교에서 다루지 않는 단원도 있어 한국에 비해 수준이 높음을 알 수 있다. 그리고 인도의 한 단원에 해당하는 한국의 교

과가 여러 가지인 경우를 적지 않게 볼 수 있는데, 이는 한국이 여러 단계에 나누어서 배우는 내용들을 인도는 한 단원에 통합하여 다루는 경우가 많음을 보여준다. 또한 〈MATHEMATICS Textbook for Class XII〉 의 단원들의 대부분이 한국의 〈수학Ⅰ〉, 〈수학Ⅱ〉, 〈기하와 벡터〉 에 해당되는 것으로 보아, 이는 한국의 자연계열 수학 교과와 비슷함을 알 수 있다.

나. 단원 편성 체제

양국의 단원 편성 체제를 비교하기 위해 인도의 고등학교 수학 교과서 〈MATHEMATICS Textbook for Class XII〉, 한국의 현재 고등학교 1학년 수학 교과서 〈수학〉 을 연구 대상으로 삼는다.

1) 인도의 수학 교과서 대단원내의 구성

인도의 고등학교 수학 교과서 〈MATHEMATICS Textbook for Class XII〉 의 대단원내의 구성은 다음의 표와 같다.

<표 2> 인도 수학 교과서의 대단원내 구성

구성	내용
Introduction	본문에 들어가기에 앞서 배울 내용의 간단한 소개 및 적용 분야를 언급하며 해당 단원 학습의 내적동기를 고취시킨다. 때에 따라 해당 단원과 관련된 선수학습을 상기시키기도 한다. Introduction의 상단 오른편에는 해당 단원 관련 수학자 사진이 있으며, 단원명과 Introduction 사이에는 수학자의 명언이 적혀 있다.
Definition, Note, Example & Solution, Theorem & Proof, Remark	단도직입적이지 않고 충분한 설명 후 자연스럽게 정의 및 정리가 다루어지며, 이 후에 여러 가지 예제와 해답이 제시되어 있다. 중간 중간 Note와 Remark를 통해 주의 해야 할 점과 본문의 내용을 깊이 관찰하면 발견 할 수 있는 점들을 가르쳐 주고 있다.
Exercise	기본적인 문제에서 응용문제 까지 다양하게 포함되어 있다.
Miscellaneous Exercise	Exercise에 비해 더욱 다양하고 심화된 문제들을 다룬다.
Summary	본문에서 배운 개념이나 공식 등, 중요한 학습 내용을 요약하고 있다.
Historical Note	해당단원 관련 수학자와 수학사를 소개하고 있다.

인도의 고등학교 수학 교과서의 구성요소들은 한국에 비해 비교적 간단하다. 단원 도입에서 『Introduction』을 통해 해당 단원 소개 및 학습의 필요성을 설명해 놓았으며, 『Exercise』 외에도 『Miscellaneous Exercise』를 두어 학생들의 문제 해결력을 높이게 하였다. 그리고 항상 단원이 끝날 때 마다 마지막에 『Historical Note』를 두어 학생들이 해당 단원과 관련된 수학사를 함께 배울 수 있도록 해 두었다.

2) 한국의 수학 교과서 대단원내의 구성

한국의 고등학교 1학년 교과서인 〈수학〉 의 대단원 내의 구성은 다음의 표와 같다.

<표 3> 한국 수학 교과서의 대단원내 구성

구성	내용
대단원 도입, 중단원 도입	단원의 배경이 되는 수학의 역사와, 수학자를 비롯한 역사의 위인들이 남긴 수학 명언이 제시 되어 있는 등 다양한 단원 도입을 통해 학습할 내용에 대한 흥미와 관심을 유도한다.
생각열기, 생각나누기, 문제해결, 예제, 문제, 익힘책과의 연계 (자세히 알아보기, 깊게 알아보기, 탐구활동), 수학으로 세상보기, 확인해봅시다, 참고	생각 열기를 통해 개념을 학습하고 예제 및 문제를 다루는 구성 패턴이며, 중간에 익힘책으로 연계된 부분들을 언급해 주고 있다. 또한 수학으로 세상보기를 통해 주변의 사물과 현상을 수학적으로 바라 볼 수 있게 하는 관련 문제를 다룸으로써 수학의 유용성을 알게 한다.
퍼즐로 정리하는 중단원, 학습 내용 정리, 수학적 의사소통, 교실 밖 수학, 수학과 정보 기술	퍼즐로 정리하는 중단원과 학습 내용 정리 및 수학적 의사소통을 통해 학습 내용을 종합적으로 정리하며, 교실 밖 수학 및 수학과 정보 기술을 통해 수학의 필요성과 실생활에서의 수학의 역할을 이해하게 한다.

한국 교과서의 대단원 내의 구성은 인도 교과서에 비해 다양함을 알 수 있다. 『Introduction』, 『Definition』, 『Note』 등 다소 수학적 질서 위주로 느껴지는 명칭들의 인도 교과서와 달리, 한국의 구성요소들은 명칭에서부터 학생들의 흥미를 끌 만큼 친근하다. 그러나 너무 다양해서인지 중복될 만한 구성요소들이 몇 가지 보이기도 하여 약간은 번잡하고 체계성이 부족해 보인다. 또한 한국의 수학 교과서는 『교실 밖 수학』 및 『수학과 정보 기술』, 『수학으로 세상보기』 등을 통해 수학을 실생활과 관련된 과목으로 학생들이 인식할 수 있도록 강조하였다.

3. MATHEMATICS Textbook for Class XII

이 절에서는 〈MATHEMATICS Textbook for Class XII〉 의 각 단원을 중심으로 인도와 한국의 고등학교 수학 교과서의 내용을 비교, 분석한다.

가. Part I

1) RELATIONS AND FUNCTIONS

이 단원에서는 함수(function)만을 독립적으로 다루는 한국과는 달리 함수를 관계(relation)라는 근본 개념부터 설명하고 있다. 더욱이 한국의 대학교 수준에 해당하는 영관계, 전체관계, 동치관계 그리고 이항연산까지 다루고 있다.

2) INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

삼각함수는 11단계(MATHEMATICS Textbook for Class XI)에서 이미 sin, cos, tan를 비롯한 sec, cosec, cot 함수 및 3배각 공식까지 다루어 한국의 고등학교 수준을 상회한다. 이 12단계에서는 한국의 고등학교 과정에서 벗어나 대학교 과정에서 배우는 역삼각함수까지 다루어 한국과의 수준 격차를 더욱 벌린다. 이처럼 삼각함수에 대한 수준 높은 학습 과정은 특별히 이공계열 내용을 강조하는 인도의 교육 성향으로 비춰진다.

역삼각함수의 기본 개념과 그래프를 가르칠 때에도 11단계에서 sec, cosec, cot 함수들까지 다루었던 것처럼 $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$뿐만 아니라 $\sec^{-1}$, cosec^{-1}, $\cot^{-1}$도 함께 다루고 있으며, 철저한 연역적인 절차를 거쳐 역삼각함수를 하나하나 자세히 정의 하고 있다. 또한 역삼각함수의 성질에서도 $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$와 $\sec^{-1}$, cosec^{-1}, $\cot^{-1}$을 서로 혼용하여 다양한 정리들을 제시하고 있다.

3) MATRICES

Example 24 Obtain the inverse of the following matrix using elementary operations

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solution Write A = I A, i.e.,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

or

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \quad (\text{applying } R_1 \leftrightarrow R_2)$$

or

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A \quad (\text{applying } R_3 \to R_3 - 3R_1)$$

or

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A \quad (\text{applying } R_1 \to R_1 - 2R_2)$$

or

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} A \quad (\text{applying } R_3 \to R_3 + 5R_2)$$

or

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A \quad \left(\text{applying } R_3 \to \frac{1}{2} R_3\right)$$

or

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A \quad (\text{applying } R_1 \to R_1 + R_3)$$

<그림 2> 인도 교과서의 행렬의 기본 변형을 이용한 역행렬 계산

「MATRICES」(행렬) 단원은 양국에서 모두 다루고 있지만 인도가 한국의 대학 수준까지의 내용들을 다루고 있어 한국에 비해 수준 높은 교과 지도가 이루어지고 있다. 특히 행렬의 종류 및 역행렬을 구하는 방법에서 가장 큰 수준 차이를 보이고 있다. 한국은 정사각행렬, 단위행렬, 영행렬에 대해서만 배우지만 인도 수학 교과서는 한국에서 배우는 내용은 물론 행행렬, 열행렬, 대각행렬, 스칼라행렬, 전치행렬, 대칭행렬의 개념 및 대수적 성질들까지 배우고 있다. 역행렬을 구하는 방법에서도 한국 교과서의 경우 연립방정식을 이용해 이차 정사각행렬의 역행렬을 구하는 정도이지만 인도 교과서는 그림 2에서 보는 바와 같이, 역행렬을 배우기 전에 행렬의 기본변형을 먼저 다루고 이를 이용하여 역행렬을 구하는 방법을 소개한다. 행렬의 기본 변형을 이용한 역행렬 계산은 한국에서 가르치는 방법보다 시간이 더 많이 소요되므로 실용성과 효율성을 강조하는 인도 수학 교육에서 이러한 방법을 제시한 것이 의외인 듯 보이나 역행렬을 구하는 범위가 2차 정사각행렬에 국한 되어 있는 한국의 교과지도와 달리 인도의 방법은 3차, 4차 그 이상의 고차 정사각행렬에서도 적용될 수 있다는 데 차이가 있다. 한국의 역행렬 계산법이 공식에 의존하는 것으로 인해 자칫 역행렬의 본 개념을 잊기 쉬운 도구적 이해로 전락될 수도 있는 것을 우려하면, 인도 교과서의 역행렬 계산법은 한국의 고등학교 학생 수준에서도 결코 어렵지 않으며, 계산 과정을 통한 관계적 이해가 이루어 질 수 있으므로 본받을 만한 좋은 교수법으로 사료된다. 그 밖에 행렬의 연산을 다루는 차례에서도 인도 교과서와 한국 교과서의 차이점을 발견할 수 있다. 한국은 행렬의 덧셈을 가르친 다음 바로 행렬의 뺄셈을 가르치고 있으나, 인도는 덧셈을 가르친 후 실수배를 가르쳐 음행렬(Negative matrix)로부터 비롯된 뺄셈을 가르친다. 이는 교과과정에 있어서 한국보다 훨씬 더 교과서가 원론적으로 편성되었음을 확인하게 한다.

4) DETERMINANTS

「DETERMINANTS」(행렬식) 단원은 한국의 고등학교 과정에서 다루어지지 않는다. 한국의 고등학교 2학년 교과서인 〈수학Ⅰ〉의 「Ⅰ. 행렬과 그래프」 단원에서 역행렬이나 연립일차방정식 부분에 2차 정사각행렬의 행렬식이 잠시 등장하긴 하지만 행렬식에 대한 다른 구체적인 언급은 없다. 인도는 행렬식을 자세히 다룰 뿐만 아니라 행렬과 같은 단원에 두지 않고 독립적인 단원으로 편성하고 있음으로 보아 행렬식의 중요성을 강조하고 있음을 추측하게 한다. 도입부인 『Introduction』에서는 특별히 행렬식이 연립방정식의 해의 유일성을 결정한다는 것을 설명함으로써 본래 결정요인이란 뜻을 지니고 있는 'Determinant'의 단어적 의미를 상기시키어 학생들에게 자연스러운 개념 인식이 되도록 한다. 본론에 들어서는 이전에 배웠던 삼각형의 넓이 공식을 행렬식에 적용하여 제시하기도 하고, 수반행렬들의 성질을 이용하여 역행렬을 구하는 방법을 새롭게 제시하기도 한다.

5) CONTINUITY AND DIFFERENTIABILITY

「CONTINUITY AND DIFFERENTIABILITY」(연속성과 미분가능성) 단원의 내용은 한국의 고

등학교 교과서 〈수학II〉와 〈미적분과 통계 기본〉의 함수의 연속성과 미분 관련 단원에 등장한다. 특히 지수함수와 로그함수 내용이 한국의 교과서의 경우, 〈수학 I〉에서 독립적인 단원으로 등장하고 있으나, 인도의 교과서는 본 단원에 함께 편성되어있다. 여러 가지 함수의 미분법을 살펴보면, 인도의 교과서는 한국의 고등학교 과정에서 다루지 않는 역삼각함수에 대해서 본 단원에 앞선 「2. INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS」 단원에서 이미 다루었으므로 합성함수의 도함수 및 음함수의 도함수를 배우는 것은 물론 역삼각함수의 도함수도 함께 다루는 것을 볼 수 있다. 반면에 한국 교과서에서는 역함수의 미분법에 대해서 배우고 있으나 인도는 그렇지 않다. 합성함수의 미분에서는 한국의 교과서은 단도직입적으로 미분 방법을 설명하지만, 인도 교과서는 그림 3와 같이 예제를 통해 추측과 비슷한 끼워 맞추기 식으로 설명을 한 후, 합성함수 미분법 정리를 설명한다. 그 외의 다른 부분에서는 비슷한 설명 방식을 취하고 있으며, 평균값정리에서도 한국과 마찬가지로 롤의 정리를 먼저 소개한 후 평균값 정리를 제시하고 있다.

One way is to expand $(2x + 1)^3$ using binomial theorem and find the derivative as a polynomial function as illustrated below.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left[(2x+1)^3\right]$$

$$= \frac{d}{dx}(8x^3+12x^2+6x+1)$$

$$= 24x^2 + 24x + 6$$

$$= 6\,(2x + 1)^2$$

Now, observe that $f(x) = (h \circ g)(x)$

where $g(x) = 2x + 1$ and $h(x) = x^3$. Put $t = g(x) = 2x + 1$. Then $f(x) = h(t) = t^3$. Thus

$$\frac{df}{dx} = 6\,(2x+1)^2 = 3(2x+1)^2 \,.\, 2 = 3t^2 \,.\, 2 = \frac{dh}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

The advantage with such observation is that it simplifies the calculation in finding the derivative of, say, $(2x + 1)^{100}$. We may formalise this observation in the following theorem called the chain rule.

Theorem 4 **(Chain Rule)** Let f be a real valued function which is a composite of two functions u and v; i.e., $f = v \circ u$. Suppose $t = u(x)$ and if both $\frac{dt}{dx}$ and $\frac{dv}{dt}$ exist, we have

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

We skip the proof of this theorem. Chain rule may be extended as follows. Suppose f is a real valued function which is a composite of three functions u, v and w; i.e.,

$f = (w \circ u) \circ v$. If $t = v(x)$ and $s = u(t)$, then

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(w \circ u)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dw}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

provided all the derivatives in the statement exist. Reader is invited to formulate chain rule for composite of more functions.

<그림 3> 합성함수의 미분법

6) APPLICATION OF DERIVATIVES

「APPLICATION OF DERIVATIVES」(도함수의 응용) 단원은 한국의 고등학교 교과서 〈수학

Ⅱ〉의 「Ⅳ. 미분법 - 03. 도함수의 활용」 단원과 〈미적분의 통계기본〉의 「Ⅱ. 다항함수의 미분법 - 01. 미분계수와 도함수」 단원에 해당한다. 먼저 인도 수학 교과서는 본 단원의 도입을 「6.1 Introduction」에서만 그치지 않고, 「6.2 Rate of Change of Quantities」에서 변화율에 대한 간략한 설명 및 실생활과 관련된 예들을 제시하여 도함수에 대한 필요성을 고취시킨다. 증가함수와 감소함수 지도에서는 함수의 증가와 감소에 따른 도함수의 성질과 함께 증명을 제시함은 두 나라 모두 동일하다. 다만 한국 교과서는 함수를 단순히 증가와 감소로 구분하는 반면, 인도는 increasing(증가)와 strictly increasing(강증가), decreasing(감소)와 strictly decreasing(강감소), neither increasing nor decreasing(감소도 증가도 아닌 경우)로 구분하여 이에 따른 도함수의 성질을 설명한다. 접선과 법선의 방정식에서도 인도의 교과서는 접선과 법선 모두 구체적으로 지도 하지만 한국 교과서는 접선만을 다룬 후 예제를 통해 접선의 기울기를 이용하여 법선에 대해 학습할 수 있도록 한다. 인도 교과서에는 특별히 임계점에 대한 구체적인 개념 설명이 있으며, 임계점에 속하는 극대점, 극소점, 변곡점들을 구하는 문제나 증명들을 다루기만 할 뿐 한국처럼 함수의 그래프를 직접 그려보는 예제들은 없다.

나. Part Ⅱ

7) INTEGRALS

「INTEGRALS」(적분) 단원은 한국의 고등학교 교과서인 〈적분과 통계〉의 「Ⅰ. 적분법」 단원과 〈미적분과 통계 기본〉의 「Ⅲ. 다항함수의 적분법」 단원에 해당한다. 인도 교과서 내의 적분지도의 내용은 본 단원과 함께 다음 단원인 적분의 활용 단원을 포함해 무려 약 100페이지에 이른다. 이는 교과서 Part Ⅱ의 3분의 1을 차지하는 막대한 분량이다. 다른 단원에 비해 많은 예제를 다룸은 물론, 연습문제도 『Miscellaneous Exercise』을 포함해서 약 270 문제나 된다. 각각의 문제들 안에 소 문제들이 딸려 있으므로 이를 고려하면 훨씬 더 많은 문제들을 학생들로 하여금 공부하게 함을 알 수 있다. 이처럼 인도는 IT 강국답게 이공계열의 중요개념인 적분을 교과 과정에서 매우 중요하게 다루고 있으며, 상당한 분량만큼이나 내용에서도 한국의 수학 교과서와 비교할만한 점이 다양하게 발견되었는데 이는 다음과 같다.

첫째, 인도 수학 교과서에서는 부정적분이 가지고 있는 대수적 성질 이외에 기하학적 성질도 함께 배운다. <그림 4>에서처럼 $f(x)=2x$라 할 때, $f(x)$의 부정적분은 $\int f(x)=x^2+C$이며, C의 값에 따라 다른 적분들을 얻을 수 있지만 기하학적으로 유사하다는 것을 보여 주고 있다. 즉, 임의의 a에 대하여, $x=a$ 그래프와 $y=x^2+C$ 그래프가 만나는 각각의 교점에서의 접선들의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=2a$로서 모두 같으므로 모든 접선들이 서로 평행함을 보여준다. 사실상 $\int f(x)=F(x)+C$는 곡선들의 집합체를 나타내며 서로 다른 C값들은 각각 집합체의 서로 다른

구성원에 대응됨을 설명한다.

둘째, 한국의 교과서는 〈미적분과 통계 기본〉에서 부정적분에 대한 정의와 성질들을 배우고, 다항식 함수들만의 부정적분을 구하며, 〈적분과 통계〉에서는 부정적분의 적용범위를 지수함수와 로그함수, 삼각함수 등으로 확장시킨다. 하지만 인도 교과서는 본 단원에서 역삼각함수의 부정적분까지

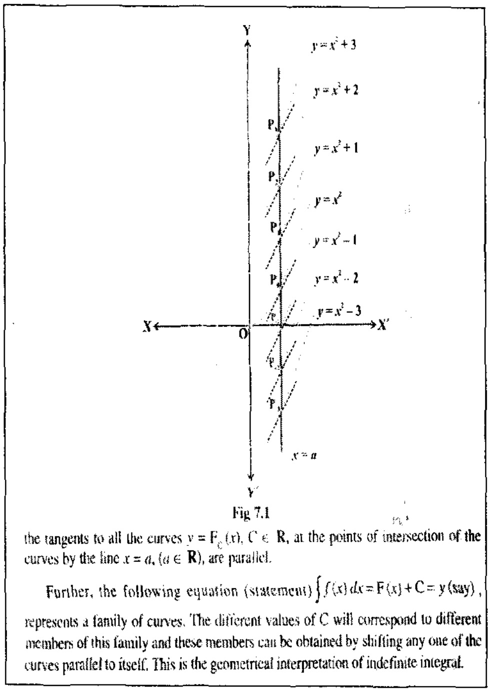
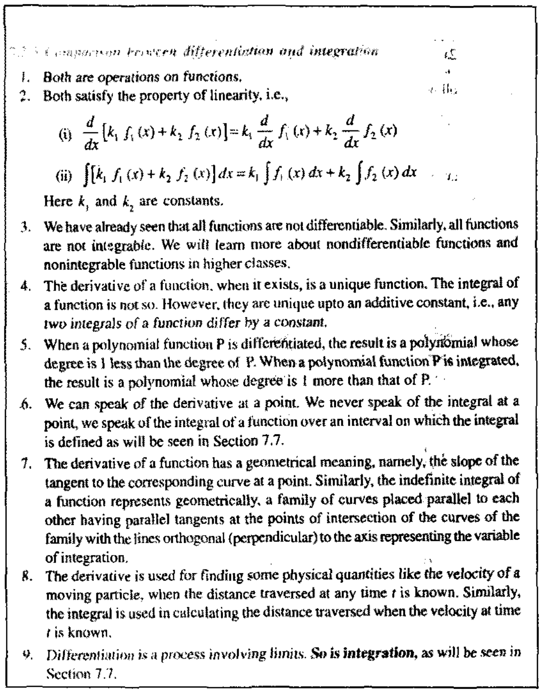


Fig 7.1

the tangents to all the curves $y = F_C(x)$, $C \in \mathbf{R}$, at the points of intersection of the curves by the line $x = a$, $(a \in \mathbf{R})$, are parallel.

Further, the following equation (statement) $\int f(x)\,dx = F(x) + C = y$ (say), represents a family of curves. The different values of C will correspond to different members of this family and these members can be obtained by shifting any one of the curves parallel to itself. This is the geometrical interpretation of indefinite integral.

<그림 4> $\int f(x) = x^2 + C$



1. *Both are operations on functions.*
2. Both satisfy the property of linearity, i.e.,

   (i) $\frac{d}{dx}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] = k_1 \frac{d}{dx} f_1(x) + k_2 \frac{d}{dx} f_2(x)$

   (ii) $\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\,dx = k_1 \int f_1(x)\,dx + k_2 \int f_2(x)\,dx$

   Here k_1 and k_2 are constants.
3. We have already seen that all functions are not differentiable. Similarly, all functions are not integrable. We will learn more about nondifferentiable functions and nonintegrable functions in higher classes.
4. The derivative of a function, when it exists, is a unique function. The integral of a function is not so. However, they are unique upto an additive constant, i.e., any *two integrals of a function differ by a constant.*
5. When a polynomial function P is differentiated, the result is a polynomial whose degree is 1 less than the degree of P. When a polynomial function P is integrated, the result is a polynomial whose degree is 1 more than that of P.
6. We can speak of the derivative at a point. We never speak of the integral at a point, we speak of the integral of a function over an interval on which the integral is defined as will be seen in Section 7.7.
7. The derivative of a function has a geometrical meaning, namely, the slope of the tangent to the corresponding curve at a point. Similarly, the indefinite integral of a function represents geometrically, a family of curves placed parallel to each other having parallel tangents at the points of intersection of the curves of the family with the lines orthogonal (perpendicular) to the axis representing the variable of integration.
8. The derivative is used for finding some physical quantities like the velocity of a moving particle, when the distance traversed at any time t is known. Similarly, the integral is used in calculating the distance traversed when the velocity at time t is known.
9. *Differentiation is a process involving limits.* **So is integration,** as will be seen in Section 7.7.

<그림 5> 미분과 적분의 비교

다룸으로써 부정적분의 배우는 범위가 한국보다 더 넓고 내용이 어렵다.

셋째, 인도 수학 교과서는 <그림 5>에서처럼 특별히 한국 수학 교과서에서는 볼 수 없는 미분과 적분에 대한 비교를 소단원을 통해 구체적으로 다루어 제시하고 있다. 한국의 학생들은 미분과 적분에 대해서 각각이 무엇인지는 알고 있으나 둘의 관계와 차이점에 대해서는 <그림 5>의 5번과 8번 정도만 알고 있다고 보여 진다. 그러나 인도의 교과서에서는 미적분의 관계를 대수적, 기하학적으로 그 외에 다양한 관점에서 비교하여 미분과 적분이 연산이라는 점과 각각의 선형적 성질 등 미분가능과 적분가능에 대한 분명하고 구체적인 차이점을 학생들에게 명시한다.

넷째, 부분적분법에서 양국의 교과서는 미묘한 공식의 차이가 있다. 한국의 수학 교과서에는 부분적분법의 공식이

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

로 되어있고, 인도의 수학 교과서에는

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)\int g(x) - \int [f'(x)\int g(x)dx]dx$$

로 되어있다. 즉 한국의 경우 적분을 할 함수가 두 개의 함수의 곱으로 표현 될 때, 그 중 하나의 함수를 일계도함수로 취급하고 적분을 해야 하며, 인도는 둘 다 보통의 함수로 취급하여 풀 수 있도록 적분 공식을 제시해 놓았다. 인도 수학 교과서의 적분 공식은 학생들에게 어떤 하나의 함수를 굳이 도함수로 취급하지 않고, 주어진 함수를 자연스럽게 있는 그대로 공식에 적용하게 하므로 두 함수 중에서 한 함수를 도함수로 택해야 하는 갈등의 시간적 소모가 없다. 반면에 한국 수학 교과서의 공식은 도함수 선택에 대한 갈등의 시간적 소모를 가지고 있다. 그러나 어떤 함수를 도함수로 취급하는 것은 나중에 도함수로 선택한 함수의 적분을 이중으로 취할 것을 미리 염두에 두도록 하므로 복잡한 계산이 되지 않도록 예방할 수 있는 이점이 있다. 예를 들어 $\int (x-1)e^x dx$를 계산할 때, 인도의 공식에 적용할 경우, e^x가 아닌 $(x-1)$을 $g(x)$로 취급하여 계산을 진행해 나간다면 매우 복잡한 식을 초래하게 된다. 하지만 한국의 공식에 적용한다면, 공식에 적용하기에 앞서 $f(x)$와 $g'(x)$를 먼저 선택하기 위해 $(x-1)$과 e^x 각각을 미리 적분해 봄으로써 더 쉬운 계산을 유도할 수 있도록 바른 선택을 미리 할 수 있다. 사실 인도의 교과서에는 $f(x)$와 $g(x)$를 선택하는 것이 중요하다고 언급되어 있으며 약간의 노하우를 제시해 놓기도 하였다. 그러나 일반적으로 공식에 사용된 $f(x)$, $g(x)$는 서로 다른 함수로서만 여길 뿐이지 식이나 말로써 부연 설명을 하지 않은 이상, 특별히 두 함수에 대한 자격의 차이를 표현하고 있지 않으므로 계산 적용에 있어서 양국의 부분적분법 공식만을 비교하자면 한국의 공식이 더 편리할 것이다.

Remarks

(i) It is worth mentioning that integration by parts is not applicable to product of functions in all cases. For instance, the method does not work for $\int \sqrt{x} \sin x \, dx$. The reason is that there does not exist any function whose derivative is $\sqrt{x} \sin x$.

(ii) Observe that while finding the integral of the second function, we did not add any constant of integration. If we write the integral of the second function cos x as sin $x + k$, where k is any constant, then

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x(\sin x + k) - \int (\sin x + k)\,dx \\ &= x(\sin x + k) - \int \sin x\,dx - \int k\,dx \\ &= x(\sin x + k) - \cos x - kx + C = x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

This shows that adding a constant to the integral of the second function is superfluous so far as the final result is concerned while applying the method of integration by parts.

(iii) Usually, if any function is a power of x or a polynomial in x, then we take it as the first function. However, in cases where other function is inverse trigonometric function or logarithmic function, then we take them as first function.

<그림 6> 적분 상수 C에 대한 생략의 이유

다섯째, 인도 수학 교과서에서는 <그림 6>처럼 중간에 『Remark』를 통해서 적분 상수 C를 일일이 붙여 계산하지 않아도 되는 이유를 예를 통해 명확하게 설명해주고 있다. 이와 반대로 한국은 별다른 언급 없이 당연한 듯 계산의 마지막에 적분 상수 C를 붙이도록 하고 있는데 이는 자칫 적분 상수 C의 중요성을 학생들로 하여금 망각하게 할 수 있다. 예를 들어 부정적분 값을 구하라 하였는데 C를 붙이지 않고 답을 적은 후, 정답을 확인하고도 대수롭지 않게 여기며 답을 맞혔다고 생각하는 학생들의 경우처럼 말이다. 한국의 교과서도 학생들이 충분히 궁금해 할 수 있을만한 점이나 유의해야 할 점들에 대해서 세심한 지도로 적절히 대응해 주어야 하며, 특히 적분 상수 C에 대한 중요성 및, 생략의 이유들을 명확하게 학생들에게 전달할 필요가 있겠다.

(2) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

(3) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

We now prove the above results:

(1) We have $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

Therefore, $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|(x-a)| - \log|(x+a)|\right] + C$$

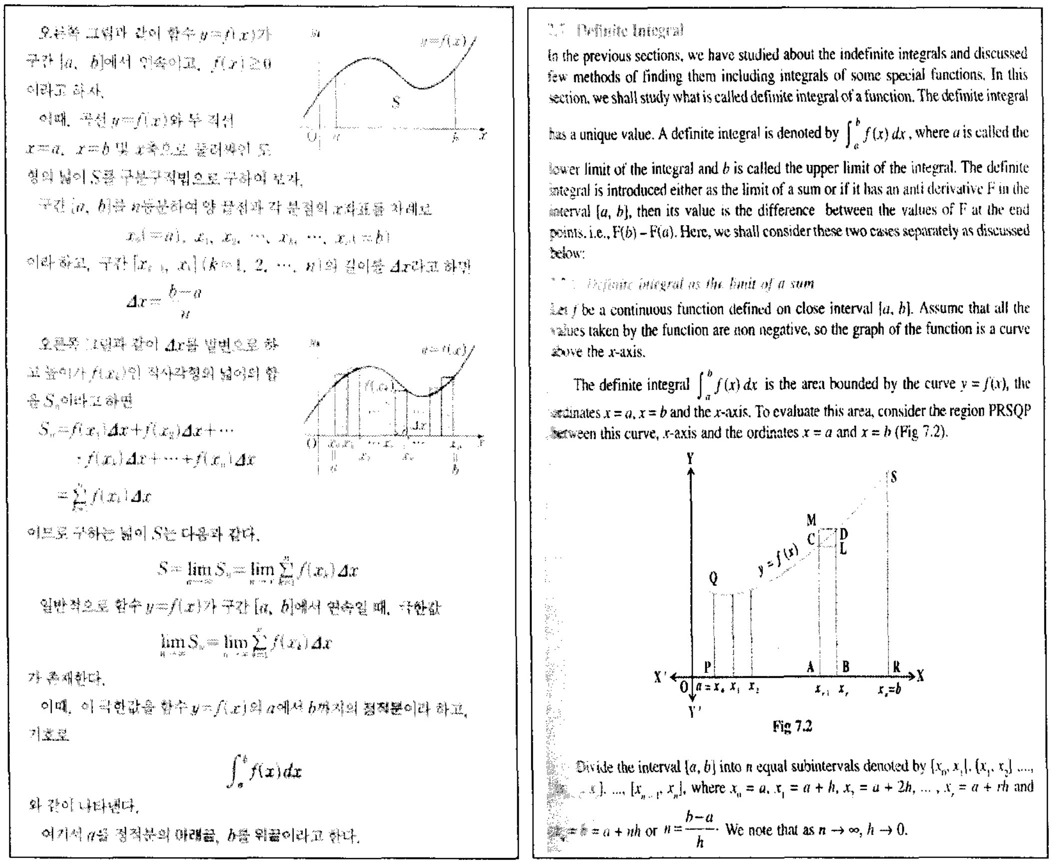
$$= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

<그림 7>여러 가지 적분 공식들

여섯 번째, 인도 교과서는 계산과정이 복잡하거나 시간이 오래 걸릴 수 있는 적분들은 유형별로 <그림 7>과 같이 공식을 만들어 적용하게 하였다. 이처럼 인도의 수학 교과서는 엄격하게 논리적인 수학적 절차를 따지는 본래의 면이 강하게 존재하면서도 이와 상대적으로 때에 따라 편리성과 시간적 효율성을 추구하기도 하는 양면적인 모습을 지니고 있다.

일곱 번째, 정적분의 도입에서도 양국의 차이점을 발견할 수 있는데 한국 교과서에서는 구분구적법을 먼저 배우고 정적분을 배우지만 인도는 처음부터 정적분을 바로 배운다. 더 자세히 설명하자면, 한국 교과서는 구분구적법을 미리 배워 일반화 한 후, 이를 통해 무한급수와 극한을 이용하여 정적

분을 구하며, 인도 교과서는 구분구적법에 대한 별다른 언급 없이 구분구적법의 과정을 곧 바로 적용하여, 상합과 하합 사이로서 정적분을 정의하고 샌드위치 극한값 계산법을 이용해 유도한다. 이 같은 내용을 담고 있는 한국과 인도의 교과서 본문은 다음 <그림 8>에 제시되어 있다.



오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(x) \geq 0$이라고 하자.

이때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구하여 보자.

구간 $[a, b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로

$$x_0(=a),\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n(=b)$$

이라 하고, 구간 $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1, 2, \cdots, n)$의 길이를 Δx라고 하면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

오른쪽 그림과 같이 Δx를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_k)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

이므로 구하는 넓이 S는 다음과 같다.

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

일반적으로 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 극한값

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

가 존재한다.

이때, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

와 같이 나타낸다.

여기서 a를 정적분의 아래끝, b를 위끝이라고 한다.

Definite Integral

In the previous sections, we have studied about the indefinite integrals and discussed few methods of finding them including integrals of some special functions. In this section, we shall study what is called definite integral of a function. The definite integral has a unique value. A definite integral is denoted by $\int_a^b f(x)\,dx$, where a is called the lower limit of the integral and b is called the upper limit of the integral. The definite integral is introduced either as the limit of a sum or if it has an anti derivative F in the interval $[a, b]$, then its value is the difference between the values of F at the end points, i.e., $F(b) - F(a)$. Here, we shall consider these two cases separately as discussed below:

Definite integral as the limit of a sum

Let f be a continuous function defined on close interval $[a, b]$. Assume that all the values taken by the function are non negative, so the graph of the function is a curve above the x-axis.

The definite integral $\int_a^b f(x)\,dx$ is the area bounded by the curve $y = f(x)$, the ordinates $x = a$, $x = b$ and the x-axis. To evaluate this area, consider the region PRSQP between this curve, x-axis and the ordinates $x = a$ and $x = b$ (Fig 7.2).

Fig 7.2

Divide the interval $[a, b]$ into n equal subintervals denoted by $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{r-1}, x_r]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, where $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, ... , $x_r = a + rh$ and $x_n = b = a + nh$ or $n = \frac{b-a}{h}$. We note that as $n \to \infty$, $h \to 0$.

<그림 8>한국 교과서와 인도 교과서의 정적분 정의

8) APPLICATION OF INTEGRALS

「APPLICATION OF INTEGRALS」(적분의 응용) 단원은 앞단원인 「7. INTEGRALS」과 분리되어 독립적인 단원으로 되어있다. 실용성을 중시 여기는 인도인만큼 정적분의 활용도 매우 중요하게 여김을 엿볼 수 있다. 하지만 앞단원에서 적분의 계산과 개념에 관해서는 상당한 교과 분량을 차지할 만큼 깊이 심화하여 다루는 것과 달리 정적분의 활용은 한국 수학 교과서에서 다루고 있는 입체나 회전체의 부피를 구하는 것까지 다루지 않으며, 평면도형의 넓이만을 고찰하는 것에 그친다.

9) DIFFERENTIAL EQUATIONS

「DIFFERENTIAL EQUATIONS」(미분방정식) 단원은 한국의 경우 고등학교 과정에서는 다루지 않으며, 일반적으로 대학교의 수학 전공생들이 2학년에 배우는 내용이다. 인도 수학 교과서에서는 본 단원을 미적분학 학습 후 바로 다음 단원으로 두어 연계하여 가르친다.

10) VECTOR ALGEBRA

「VECTOR ALGEBRA」 (벡터대수) 단원은 한국의 고등학교 교과서인 〈기하와 벡터〉의 「Ⅳ. 벡터」 단원에 해당한다. 인도 교과서에서는 벡터의 종류에서 coinitial vector (시작점이 같은 벡터), colinear vector (평행한 벡터), free vector (자유벡터) 라 하여, 명칭과 정의를 다른 벡터들과 함께 제시하고 있으나 한국 교과서에서는 이들을 제외한 영벡터와 단위벡터, 서로 같은 벡터, 역벡터만을 다루고 있다. 또한 인도 교과서는 한국과 달리 평면 벡터 성분을 다루지 않고 곧바로 공간 벡터 성분을 다룬다. 이것은 내적이나 외적을 다룰 때에도 마찬가지이다. 전반적으로 벡터의 연산들을 다룰 때, 평면 벡터를 생략하고 공간 벡터로 바로 적용하여 일반화 한다. 인도 수학 교과서는 내적과 함께 외적도 다루고 있다. 한국의 고등학교 벡터 지도에는 내적은 있으나 외적이 빠져 있는데 사실 이공계로 진학할 고등학교 학생들에게는 내적만큼이나 외적의 학습이 중요하다. 7차 개정 교육과정에서 벡터 부분이 속해 있는 〈기하와 벡터〉 과목이 이공계 진학 학생들의 필수 과목임에도 불구하고 외적을 다루지 않는다. 한국의 수준에 맞게 적절히 난이도를 조절하여 외적의 개념만큼이라도 학생들에게 내적과 함께 지도 한다면 보다 폭넓은 지식 전달은 물론 대학진학을 위한 내실 있는 준비 학습이 될 수 있을 것이다.

11) THREE DIMENSIONAL GEOMETRY

「THREE DIMENSIONAL GEOMETRY」(3차원 기하) 단원은 앞 단원인 「10. VECTOR ALGEBRA」에서 배운 내용들을 활용하여 공간에서 직선과 평면에 대해 다루고 있다. 특별히 인도 수학 교과서는 「10. VECTOR ALGEBRA」 단원에서 외적을 다루었으며, 또한 앞서「4. DETERMINANTS」 단원에서는 한국 교과서에서는 다루지 않는 행렬식을 다뤘는데 외적과 행렬식이 본 단원에 적극 활용되면서 직선과 평면을 다루는 내용이 한국과 현저하게 수준 차이가 벌어진다. 그것의 한 예로 그림 9를 보면 알 수 있듯이 한국 교과서는 세 점을 지나는 평면의 방정식을 구할 때, 세 점을 모두 대입하여 연립방정식을 이용하지만 인도 교과서는 외적을 이용하여 세 점이 주어졌을 때의 조건에 맞추어진 새로운 평면 방정식을 제시하여 이를 활용하게 한다. 사실 한국 수학 교과서는 평면의 방정식이 법선 벡터를 이용한 유형으로 국한되어 있으며, 이 때문에 문제에서 주어지는 조건들을 공식에 맞추어 변형하여 활용해야 하는 번거로움이 있다. 하지만 인도의 수학 교과서는 외적과 행렬식 등 을 활용하여 평면의 방정식을 조건에 따라 다양한 유형으로 제시한다. 따라서 조건에 맞는 공식을 선택하여 적용할 수 있으며, 계산 시간을 단축시킬 수 있다.

1 다음 평면의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(-1, 3, 2)$를 지나고, 벡터 $(-4, 2, 1)$에 수직인 평면

(2) 점 $(5, 2, -3)$을 지나고, x축에 수직인 평면

(3) 세 점 $A(1, 1, -1)$, $B(-1, 3, 3)$, $C(1, 5, 0)$을 지나는 평면

풀이

(1) 구하는 평면의 방정식은

$-4(x+1)+2(y-3)+(z-2)=0 \quad \therefore 4x-2y-z+12=0$

(2) 법선벡터로 벡터 $\vec{e}=(1, 0, 0)$을 택할 수 있으므로

$(x-5)+0(y-2)+0(z+3)=0$에서 $x=5$

(3) 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라고 하면 평면은 세 점 A, B, C를 지나므로

$a+b-c+d=0,\ -a+3b+3c+d=0,\ a+5b+d=0$

이 연립방정식을 풀어 a, b, c를 d로 나타내면

$a=-\frac{7}{2}d,\ b=\frac{1}{2}d,\ c=-2d$

그런데 $d=0$이면 $a=b=c=0$이므로 $d\neq 0$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$-\frac{7}{2}dx+\frac{1}{2}dy-2dz-d=0 \quad \therefore 7x-y+4z-2=0$

Cartesian form Fig 11.15

Let (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) and (x_3, y_3, z_3) be the coordinates of the points R, S and T respectively. Let (x, y, z) be the coordinates of any point P on the plane with position vector $\vec{r}$. Then

$$\overrightarrow{RP} = (x-x_1)\hat{i} + (y-y_1)\hat{j} + (z-z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{RS} = (x_2-x_1)\hat{i} + (y_2-y_1)\hat{j} + (z_2-z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{RT} = (x_3-x_1)\hat{i} + (y_3-y_1)\hat{j} + (z_3-z_1)\hat{k}$$

Substituting these values in equation (1) of the vector form and expressing it in the form of a determinant, we have

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

which is the equation of the plane in Cartesian form passing through three non collinear points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) and (x_3, y_3, z_3).

<그림 9> 한국 교과서와 인도 교과서의 세 점을 지나는 평면의 방정식 예제

12) LINEAR PROGRAMMING

「LINEAR PROGRAMMING」 단원 내용은 〈수학〉에서 부등식 영역 부분에 활용 문제로서, 〈수학의 활용〉에 의사 결정 최적화 내용에 간단히 등장한다. 인도의 수학 교과서도 본 단원을 다른 단원에 비해 가볍게 다루고는 있으나 한국의 〈실용수학〉에 있는 내용과 비교해 보아도 더 자세하고 체계적으로 가르치고 있는 것을 볼 수 있다. 한국 교과서는 선형 계획 문제를 다룰 때에 실현 가능 영역에 대해서 유계인지, 아닌 지의 언급 없이 유계인 경우만을 다루고 있는 반면, 인도 교과서는 유계인 경우와 유계가 아닌 경우를 구분하고 유계가 아닐 경우 최댓값이나 최솟값이 존재 하지 않을 수도 있다고 자세히 설명하고 있다.

13) PROBABILITY

「PROBABILITY」(확률) 단원의 내용은 〈수학의 활용〉과 〈미적분과 통계 기본〉 및 〈적분과 통계〉에서 다루어진다. 인도 수학 교과서는 통계 관련 개념들을 가르칠 때 단순히 정의만을 전달하지 않고, 그 의미하는 바를 자세히 설명하고 있다. 한 예로, 확률변수의 평균을 살펴보면 확률변수 X의 평균이란 X의 가능한 값들의 가중된 평균이며, 이때 각각의 값들이 확률에 의해 가중된다고 설명하고 있다. 단도직입적으로 식으로써 정의해 버리는 한국의 수학 교과서 보다 인도의 지도 방법처럼 식의 의미가 함께 전달한다면, 학생들이 통계 개념들을 더욱 쉽게 받아들일 수 있을 것이다. 베르누이시행(독립시행)의 정의도 한국보다 더 자세하게 제시되어 있음을 볼 수 있다. 한국 교과서에서는 동전이나 주사위를 여러 번 던지는 시행과 같이 동일한 시행을 여러 번 반복 할 때, 한 시행에서의 어떤 사건이 다른 시행에서의 사건과 서로 독립인 경우에 그 시행을 독립시행이라고 정의 하고 있다. 반면에 인도 교과서는 독립시행에 대해서 시행이 유한해야 하며, 독립이어야 하고, 성공인지 실

패인지 정확한 결과가 나와야 하며, 성공의 확률이 항상 시행마다 같아야 한다고 설명하고 있다. 또한 인도 수학 교과서는 한국 교과서에서 다루지 않는 베이즈의 정리를 다루고 있으며, 반대로 한국 교과서에서는 다루고 있는 이항분포의 평균과 표준편차 및 정규분포에 관련된 모든 내용들은 다루지 않고 있다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구는 우리나라 고등학교 및 그 밖의 수학교육과정에 반영할만한 시사점을 발견키 위해 인도와 한국의 고등학교 수학 교과서를 비교, 분석한 것이다. 1장에서는 본 연구의 목적 및 필요성을 밝히고, 2장에서는 인도의 교육제도를 개관하여 인도의 교육체계 및 학교유형, 평가방법, 교과목 등에 대해 살펴보았다. 3장에서는 연구 방법을 제시한 후, 본격적으로 인도와 한국의 고등학교 교육과정을 비교하였으며, 수학 교과서 단원의 구성 비교 및 단원별 내용의 비교를 연구하였다.

이상과 같은 연구 활동을 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

단원의 구성 및 편성 체제를 살펴보면 한국이 여러 학년에 걸쳐서 배우는 내용들을 인도는 한 단원에 통합적으로 배우는 경우가 많으며 한국에서 배우지 않는 단원이 존재하는 등 한국보다 수준 높은 교과 내용을 갖고 있다. 단원 구성요소로는 배울 내용의 소개 및 적용 분야를 언급한 『Introduction』이 있고, 『Exercise』외에도 『Miscellaneous Exercise』를 두어 학생들의 문제 해결력을 높이게 한다. 또한 『Historical Note』를 매 단원의 끝에 두어 해당 단원과 관련된 수학사를 소개한다. 구성요소의 명칭에 있어서는 『Definition』, 『Note』 등을 사용하는 인도 수학 교과서에 비해 한국 교과서에서는 『생각열기』, 『생각나누기』, 『확인해봅시다』 등의 보다 친근한 느낌을 주는 용어를 사용한다.

각 단원별 내용 구성 비교에서는 다음을 알 수 있다.

첫째, 인도의 고등학교 수학 교과서는 이공계열 관련 학습 내용을 강조하며 깊이 배우는 특징을 갖고 있다. 이공계열의 가장 중요한 내용인 미적분은 다른 단원에 비해 훨씬 많은 분량을 할애한다. 또한 삼각함수 관련 단원은 교과서의 초반부에 배치하여 다른 단원들에 적극 활용할 뿐만 아니라 역삼각함수의 성질까지 다루고 있다. 실제로 인도의 11단계 수학 교과서인 〈MATHEMATICS Textbook for Class XI〉 에서도 삼각함수 단원이 등장하는데 이때에도 3단원에 배치되어있다. 11단계 수학 교과서의 총 단원의 수가 16단원인데 이를 감안하면 삼각함수 단원이 비교적 앞 쪽에 배치된 편임을 알 수 있다.

둘째, 인도의 고등학교 수학 교과서는 식이나 공식 유도 과정 등에서 논리적인 수학적인 절차를 매우 강조하며, 한국의 수학 교과서에 비해 증명이 자주 등장한다. 또한 〈MATHEMATICS Textbook for Class XII〉 의 「Appendix 1. PROOFS IN MATHEMATICS」에서는 학생들이 증명에 잘 적응할 수 있도록 증명에 대한 자세하고 구체적인 내용을 담고 있다.

셋째, 인도의 고등학교 수학 교과서는 한국의 고등학교 수학과정에서 배우지 않는 내용을 많이 다루고 있다. 미분방정식과 행렬식 등 한국의 경우 대학에서 다루고 있는 내용들을 독립적인 단원으로 두며, 한국 교과서에 있는 단원일지라도 그 안에 세부적으로 한국 교과서에서 다루지 않는 내용이 섞여 있기도 하다. 반대로 통계 단원의 정규분포나 이항분포, 모평균과 모비율의 추정처럼 한국 교과서에서는 배우지만 인도 교과서에서는 다루지 않는 내용들도 있기는 하다.

본 연구를 통해 비추어 본 한국의 수학교육의 개선점들은 다음과 같다.

첫째, 인도의 고등학교 수학 교과서는 함수와 관계를 함께 가르치고 있으며 함수를 일종의 관계라는 점에서 출발하여 가르치고 있다. 한국의 학생들이 함수를 어려운 개념으로 인식하는 경우가 많은데 이 같은 문제점 해결에 적용시킨다면 도움이 될 것으로 보인다.

둘째, 행렬 지도에 있어서 인도 수학 교과서는 행렬의 기본변형을 이용한 역행렬 계산이나 행렬식을 이용한 역행렬 계산을 제시하고 있는데 이는 본받을 만한 좋은 교수법으로 사료된다. 행렬의 기본 변형을 이용한 역행렬 계산은 한국에서 가르치는 방법보다 더 많은 교육시간이 요구되지만, 한국의 고등학생 수준에서 결코 어렵지 않으며 2차 정사각행렬 뿐 만 아니라 3차, 4차 그 이상의 고차 정사각행렬에서도 적용될 수 있으므로 일반화가 가능해진다. 또한 계산 과정을 통해 관계적 이해가 가능해지는 장점이 있다.

셋째, 인도의 고등학교 수학 교과서는 내적과 외적을 함께 다루지만 한국의 교과서는 내적만을 다루고 있으며, 외적의 존재조차 모르는 학생들이 많다. 이공계로 진학할 고등학교 학생들에게는 내적만큼 외적이 중요하므로 이들을 대상으로 한 교육에서는 적절히 난이도를 조절하여 외적의 개념만이라도 내적과 함께 지도해주는 것이 필요해 보인다.

넷째, 인도의 수학 교과서는 한국 교과서보다 훨씬 더 원론적으로 편성하고 있다. 한 예로 한국의 교과서는 행렬의 뺄셈을 가르칠 때 덧셈을 배운 후에 바로 가르친다. 반면에 인도의 교과서는 덧셈을 가르친 후 실수배를 가르쳐 음행렬과의 덧셈으로부터 뺄셈을 가르친다. 사실 한국의 학생들은 사칙연산이라고 하여 덧셈과 뺄셈을 별개의 것으로 구분하여 보는 경향이 많은데 인도의 지도 방법처럼 뺄셈이 실수배를 통한 덧셈의 일부분임을 학생들에게 명확하게 알릴 필요가 있으며 교과과정에서도 세심한 배려가 필요해 보인다. 아울러 인도의 교과서에는 역행렬의 유일성도 정리와 증명을 통해 확인하고 있으나 한국은 그렇지 않다. 학생들에게 유일성이란 개념을 너무도 당연히 받아들이게 교육하고 있다. 적분의 교육에서 적분 상수 C에 대한 중요성 및, 생략의 이유들을 명확하게 학생들에게 전달하지 않는 것도 또 다른 예라고 볼 수 있다. 이와 같은 문제점들은 학생들의 맹목적인 수용을 부추기며, 분명한 이유에 입각해야 할 비판적이고 논리적인 사고와 수학적 사고를 저해하므로 개선될 필요가 있다.

다섯 번째, 한국의 수학교육은 학생들로 하여금 학습 내용을 거시적으로 바라볼 수 있는 통찰력을 갖도록 돕는 개선점이 필요하다. 인도의 교과서는 외적과 내적을 소개하는 도입부에서 다음과 같이 설명하고 있다.

'두 수를 곱하면 수가 되고 두 행렬을 곱하면 행렬이 되지만 함수의 경우는 한 점에서의 두 함수의 곱과 두 함수의 합성이라는 두 가지의 곱셈이 정의됨에 따라 각각이 수와 함수로 결과를 가지고 있음을 생각해 볼 수 있으며, 마찬가지로 벡터의 곱셈도 두 가지 방법으로 정의 되는데 그것은 scalar product (내적)와 vector product (외적)이다.'

이전에 배웠던 내용들의 관계적 공통점 및 반대되는 점들을 이용하여 자연스럽게 내적과 외적 사이의 연계성을 이끌어 내고 있다. 이 같은 도입은 학생들에게 이미 배웠던 내용에 대한 총체적인 안목을 기르도록 도와주며, 배울 내용에 대해서도 전체적인 구조의 틀을 미리 마련하게 한다. 따라서 학습이 이러한 구조의 틀 아래 진행됨에 따라 학습을 통해 위계화 될 하위개념들이 보다 체계적으로 습득 가능해지도록 도와준다. 이 외에도 인도의 교과서는 미분과 적분에 대한 비교를 소단원을 통해 구체적으로 제시함으로써 미분과 적분의 대수적, 기하학적인 관계를 학생들에게 알리고 있으며 교과서 중간 중간에 『Observations』을 두어 배우는 내용 안에서 관찰 가능한 대수적, 기하학적 성질 및 특징들을 정리해 놓고 있다. 이처럼 인도의 수학 교육은 개괄적으로 다양한 각도에서 단원과 식을 분석하여 전체적인 구조와 성질을 발견하는 것을 중요하게 여기는 특징을 지니고 있다. 하지만 한국의 수학 교과서는 각각의 단원들이 독립적으로 강하게 분리되어 있으며, 그들 사이의 관계에 대한 언급이 없어서 학생들에게 단원들 간에 유기적이고 통합적인 시각을 심어주기가 힘들다.

참 고 문 헌

김도영 (2006). 인도 교육의 특징. 학교운영위원회.

박경미 (2005). 교육과정 개정의 시사점 도출을 위한 싱가포르와 인도 수학 교육과정의 비교 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **44(4)**, 497-508.

백혜진 (2005). 인도의 수학 교과서 분석 및 한국 교과서와의 비교 연구. 홍익대학교 교육대학원.

유진무 (2008). 한국과 인도의 확률 통계 교육과정 비교 : 고등학교 교과서를 중심으로. 연세대학교 대학원.

이미연 (2008). 인도의 11학년 수학교과서와 한국의 고등학교 수학교과서 비교. 이화여자대학교 교육대학원.

이상일 (2007). 한국과 인도의 수학교과서 비교·분석 연구 : 12단계 수학교과서 내용을 중심으로. 고려대학교 교육대학원.

이은주 (2004). 한국과 인도의 초등 수학 교과서 비교 분석 연구 : 인도의 4학년 수학 교과서를 중심으로. 경인교육대학교 교육대학원.

홍재호 (2008). 인도의 교육제도와 그 특성 연구. The Journal of educational research, 119-140.

A comparison Research of High School Mathematics Textbook between Korea and India

Lee, Songhee
Puil Foreign Language High School, 604-806, Korea
E-mail : songsongdory@nate.com

Kim, Seon-Hong
Sookmyung.Women's University, 140-742, Korea
E-mail : shkim17@sookmyung.ac.kr

The purpose of this research is to compare high school mathematics textbooks published by India with those published by Korea so that we apply merits of India's high school mathematics education to our educational problems. We first study India's educational systems, and analyze the mathematics textbooks from both countries by considering their external appearance, units, contents. Finally we give meaningful results and propose what we can do for our mathematics education based on our analysis performed in this paper.

* ZDM Classification : A35
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97-03
* Key Words : Korea high school mathematics textbooks, India high school mathematics textbooks, India's educational systems