

## 論文

## 비정상 열 하중을 받는 이질재료의 다중 크랙 문제

김귀섭\*

## Multi-Crack Problems for Non-homogeneous Material Subjected to Unsteady Thermal Load

Kui-Seob, Kim\*

## ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate the time behavior of a multiple crack problems. It is assumed that the medium contains cracks perpendicular to the crack surfaces, that the thermo-mechanical properties are continuous functions of the thickness coordinate. we use the laminated composite plate model to simulate the material non-homogeneity. By utilizing the Laplace transform and Fourier transform techniques, the multiple crack problems in the non-homogeneous medium is formulated. Singular integral equations are derived and solved to investigate the multiple crack problems.

As a numerical illustration, transient thermal stress intensity factors(TSIFs) for a functionally graded material plate subjected to sudden heating on its boundary are provided. The variation in the TSIFs due to the change in material gradient and the crack position is studied.

**Key Words** : Non-homogeneous material(이질재료), Multiple crack problem(다중 크랙 문제), Transient thermal load(비정상 열하중), Stress intensity factors(응력 집중계수)

## 1. 서 론

현재 사용 중인 대형 천연가스 터빈의 최대 효율은 약 54% 정도이다. 설계의 변화, 재료의 개선 등을 통해 터빈 발전의 효율을 60%까지 증가시키는 것이 비현실적인 것처럼 보인다. 그러나 이 목표를 달성하기 위해서는 로터 입구의 온도를 1700 °K 까지 증가시키는 것이 필요하다. 즉 고온에서 견딜 수 있는 새로운 재료의 사용 또는 개발이 필요하다. 또한 초음속 항공기와 우주 구조물의 구성품 및 구조물 개발에도 고온의 조건 하에서 견딜 수 있는 재료로 경사기능재료[1]가 개발되었다. 보통 경사기능재료는 세라믹과 금속 합금의 조성분포 및 기공률의 변화를 통해 새로

운 조성분포를 만들어 내며, 두께방향에 있어 조성분포는 연속적 함수 형식으로 변화된다고 가정된다. 사이토와 다카하시(Saito and Takahashi, 1990)[2]는 경사기능재료가 고온의 조건하에서 견딜 수 있을 정도로 열응력을 감소시킬 수 있음을 보여주었다.

Noda와 Jin (1993a, 1993b)[3, 4]은 경사기능재료의 단일 내부 크랙에 대해 해석적인 방법을 사용하여 반무한 평판의 정상 열응력 집중계수를 연구하였다. Noda와 Jin (1994)[5], Jin과 Noda (1994a, b)[6, 7]는 단일 내부의 크랙과 단일 가장자리 크랙이 존재하는 경사기능재료 반무한 평판의 비정상 열응력 집중계수를 연구하였다. 이 연구에서 재료의 물성치를 지수형태로 변화한다고 가정하여, 재료의 물성치 및 기공률의 변화에 따른 이질 재료 특성을 규명하였다. 또한 재료의 물성치 및 기공률의 매개변수를 적절하게 선택함으로써 경사기능재료 평판의 열응력 또는 열응력 집중계수를 감소시킬 수 있음을 보여주었다.

2010년 12월 20일 접수 ~ 2011년 3월 10일 심사완료

\* 인하공업전문대학 항공기계과 교수

연락처, E-mail : kuisseob@inhac.ac.kr

인천시 남구 용현동 253

Erdogan과 Wu(1996)[8]는 고온의 조건하에서 견딜 수 있는 새로운 재료의 개발 및 필요성을 제기하였으며, 그 재료로서 경사기능재료의 특성과 경사기능재료의 크랙 문제 해석의 중요성을 제시하였다.

여러 가지 열 하중 상태에서의 연구들도 진행되었으며, Nemat-Alla과 Noda(1996)[9]는 정상상태의 열 하중을 받는 경우, 반무한 경사기능재료 평판의 열 응력 집중계수를 해석하였다. Jin과 Batra (1996a)[10]는 급냉각으로 인한 경사기능재료의 가장자리 크랙에 대한 비정상 열응력 집중계수를 해석하였다. 이 때 재료의 물성치를 쌍곡선함수 또는 지수 함수형식으로 변화한다고 가정하여 응력 집중계수를 해석하였다. Noda(1997)[11]는 주기적으로 가열과 냉각의 열 하중이 반복되는 경우, 경사기능재료 판의 가장자리 크랙의 비정상 열응력 집중계수에 대한 연구를 수행하였다.

이질재료의 특성을 고려한 경사기능재료의 크랙 문제 해석은 매우 복잡하며, 다양한 방법과 가정 하에서 해석되었다. 임의로 재료의 물성치가 경사기능재료 두께 방향에 있어 연속적인 함수형태로 변화하는 재료에 존재하는 크랙의 열 응력 집중계수 계산에 연구의 초점이 맞추어졌다면 이러한 문제들은 더욱 더 복잡하고 다양할 것이다. 지금까지의 대부분의 연구는 무한 영역을 가지는 형상, 하나의 크랙 그리고 가정된 재료의 물성치로 제한하여, 열 응력 집중계수를 계산하였다.

본 연구의 목적은 경사기능재료의 물성치가 두께방향으로 변화하는 경우, 비정상상태의 열 하중에 의한 다중 크랙의 열응력 집중계수를 연구 검토하는 것이다. 복합 적층판 이론을 이용하여 재료의 이질성을 각 층에서는 동질의 재료특성으로 대체하였으며, 각 층에 대한 지배 방정식에 라플라스 변환과 푸리에 변환을 적용하여 열 응력집중계수 계산을 수행할 수 있는 알고리즘을 제시하였다. 다중 크랙의 열 응력 집중 계수 문제에 대한 특이 적분방정식(singular integral equation)이 유도되고, 수치예제들은 비정상 열 하중 하에서 이질재료인 금속과 세라믹으로 구성된 경사기능재료 판이 선택되었으며, 비정상상태에 대한 열응력 집중 계수(thermal stress intensity factors)가 계산되었다. 또한 경사기능재료의 물성치 변화에 대한 열응력 집중 계수의 변화가 연구되었다.

2. 문제의 해석

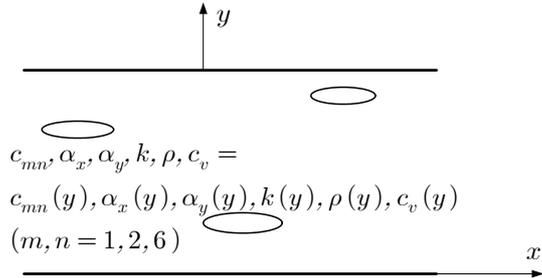


Fig. 1 Geometry and coordinates of a non-homogeneous material plate

Fig. 1과 같이  $x$ 방향으로는 무한대이며, 좌표  $y$ 의 함수로서 변화하는 물성치를 지닌 두께  $h$ 의 다중 크랙이 있는 이질재료 판에 대해 생각한다. 여기서  $c_{mn}$ 은 강성계수,  $\alpha_x$ 와  $\alpha_y$ 는 선형 열팽창 계수,  $k$ 는 열전도 계수,  $c_v$ 는 비열 그리고  $\rho$ 는 밀도이다.  $y$ 방향에 대한 재료의 이질성을 각 층에 있어 동질 재료로 대체하기 위해 탄성판의 두께를 무한 길이의 많은 층( $N$ )으로 나누므로 재료의 물성치는 각 층에 있어 상수가 된다고 가정할 수 있다. 크랙은 판의 두께에 수직이며, 크랙은 두 개의 층 사이 경계면에 있는 것으로 가정하며, 해석적인 모델은 Fig. 2에 주어진다.  $J$ 번째 층에 대한 두께는  $h_j$ 이며, 이 논문에서  $J$ 는 아래층부터  $J$ 번째 층을 나타내며, 첨자  $j$ 는  $J$ 번째 층과  $J+1$ 번째 층사이의 경계면 숫자를 나타낸다. 좌표  $y_j$ 는  $J$ 번째 층의 밑면에서 측정된 좌표이다.

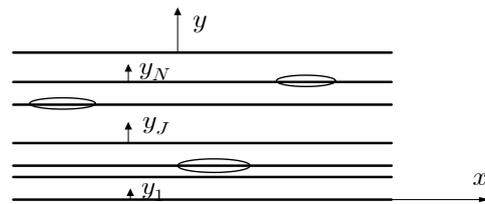


Fig. 2 Analytical model of the non-homogeneous material plate

층사이의 경계면에 있어 응력  $(\sigma_y)_j, (\tau_{xy})_j$  및 열량  $(q_y)_j$ 을  $\sigma_j(x,t), \tau_j(x,t)$  및  $q_j(x,t)$ 로 나타낸다. 이들 응력과 열량은 이웃한 두 경계층 사이에서 연속이며, 완전히 결합되어 있거나 크랙에 의해 부분적으로 분리되어 있다. 크랙 길이는  $2a_j, x_j = c_j$  에 크랙중심이 위치한다.

평면변형을 상태에서, 직교성 재료에 대한 각 층의 열량은 다음과 같다.

$$(q_x)_J = - (k_x)_J \partial T_J / \partial x$$

$$(q_y)_J = - (k_y)_J \partial T_J / \partial y \quad (1)$$

온도는 변형에 종속되지 않는다고 가정하면, 각 층에 대한 열전도방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(k_x)_J \partial^2 T_J / \partial x^2 + (k_y)_J \partial^2 T_J / \partial y^2 = \rho_J (c_v)_J \partial T_J / \partial t \quad (2)$$

그리고 변위와 응력에 대한 식은 다음과 같다.

$$(U_x)_J = u_J(x, y, t) \quad (U_y)_J = v_J(x, y, t)$$

$$\sigma_{xJ} = (C_{11})_J \frac{\partial u_J}{\partial x} + (C_{12})_J \frac{\partial v_J}{\partial y} - (\beta_x)_J T_J \quad (3)$$

$$\sigma_{yJ} = (C_{12})_J \frac{\partial u_J}{\partial x} + (C_{22})_J \frac{\partial v_J}{\partial y} - (\beta_y)_J T_J$$

$$\tau_{xyJ} = (C_{66})_J \left( \frac{\partial u_J}{\partial y} + \frac{\partial v_J}{\partial x} \right)$$

미소 변형상태에서 열탄성 지배방정식은 다음과 같다.

$$(C_{11})_J \frac{\partial^2 u_J}{\partial x^2} + (C_{66})_J \frac{\partial^2 u_J}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66})_J \frac{\partial^2 v_J}{\partial y \partial x} = (\beta_x)_J \frac{\partial T_J}{\partial x} \quad (4)$$

$$(C_{66})_J \frac{\partial^2 v_J}{\partial x^2} + (C_{22})_J \frac{\partial^2 v_J}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66})_J \frac{\partial^2 u_J}{\partial y \partial x} = (\beta_y)_J \frac{\partial T_J}{\partial y}$$

## 2.1 온도장 해석

무차원 변수  $\bar{x} = x/h$ ,  $\bar{y}_J = y_J/h$ ,  $\bar{h}_J = h_J/h$ ,  $k_J = 2/(1/\sqrt{(k_x k_y)_J} + 1/\sqrt{(k_x k_y)_{J+1}})$  와  $t_{oJ} = h^2 \rho_J (c_v)_J / (k_y)_J$  을 도입한다. 시간  $t$  에 대한 라플라스 변환(Laplace transform)을 적용하고, 공간좌표  $x$  에 플리에 변환(Fourier transform)을 적용하면, 방정식(2)는 무한 판의 각 층에 대한 온도를 구할 수 있는 다음과 같은 식이 된다.

$$T_J^*(\bar{x}, \bar{y}_J, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ A_{0J} e^{-|s| \lambda_{0J} \bar{y}_J} + B_{0J} e^{|s| \lambda_{0J} \bar{y}_J} \right] e^{-is\bar{x}} ds \quad (5)$$

여기서 위첨자 \* 는 라플라스 변환을 의미하며,  $A_{0J}(s, p)$  와  $B_{0J}(s, p)$  는 결정해야 할 변수들이며,  $\lambda_{0J}$  는 다음과 같다.

$$\lambda_{0J} = \sqrt{(k_x)_J / (k_y)_J + p t_{oJ} / s^2} \quad (6)$$

식(5)을 식(1)에 대입하면  $\bar{y}_J = \bar{h}_J$  에서 열량

$q_J^*$  와  $\bar{y}_J = 0$  에서 열량  $q_{j-1}^*$  을 얻는다. 역 플리에 변환을 적용하여  $A_{0J}(s, p)$  와  $B_{0J}(s, p)$  을  $q_J^*$  와  $q_{j-1}^*$  로 쓸 수 있다. 그러므로 각 층의 온도분포는  $A_{0J}(s, p)$  와  $B_{0J}(s, p)$  을 식(3)에 다시 대입해서  $q_J^*$  와  $q_{j-1}^*$  의 형식으로 식(5)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T_J^*(\bar{x}, \bar{y}_J, p) = -\frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\bar{x}} \frac{R_J(s, p)}{s} ds$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ (e^{-|s| \lambda_{0J} \bar{y}_J} + e^{|s| \lambda_{0J} \bar{y}_J}) q_J^*(\bar{r}, p) - (e^{-|s| \lambda_{0J} (\bar{h}_J - \bar{y}_J)} + e^{|s| \lambda_{0J} (\bar{h}_J - \bar{y}_J)}) q_{j-1}^*(\bar{r}, p) \right] e^{is\bar{r}} d\bar{r} \quad (7)$$

여기서

$$R_J(s, p) = \frac{sgn(s)}{(k_y)_J \lambda_{0J} (e^{|s| \lambda_{0J} \bar{h}_J} - e^{-|s| \lambda_{0J} \bar{h}_J})} \quad (8)$$

만약 판의 하부 면의 온도가 주어진다면, 첫 번째 층에 대한 온도분포는 다음과 같이  $T_{00}^*$  과  $q_1^*(\bar{x}, p)$  에 의해 쓸 수 있다.

$$T_1^*(\bar{x}, \bar{y}_1, p) = -\frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\bar{x}} \frac{R_1(s, p)}{s} ds \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ (e^{|s| \lambda_{01} \bar{y}_1} - e^{-|s| \lambda_{01} \bar{y}_1}) q_1^*(\bar{r}, p) - \frac{sgn(s) (k_y)_1 s \lambda_{01}}{h} (e^{-|s| \lambda_{01} (\bar{h}_1 - \bar{y}_1)} + e^{|s| \lambda_{01} (\bar{h}_1 - \bar{y}_1)}) T_{00}^*(\bar{r}, p) \right] e^{is\bar{r}} d\bar{r} \quad (9)$$

여기서

$$R_1(s, p) = \frac{sgn(s)}{(k_y)_1 \lambda_{01} (e^{|s| \lambda_{01} \bar{h}_1} + e^{-|s| \lambda_{01} \bar{h}_1})} \quad (10)$$

만약 판의 상부 면의 온도가 주어진다면,  $N$  번째 층에 대한 온도분포는 다음과 같이  $q_{N-1}^*(\bar{x}, p)$  과  $T_{0N}^*(\bar{x}, p)$  에 의해 쓸 수 있다.

$$T_N^*(\bar{x}, \bar{y}_N, p) = -\frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\bar{x}} \frac{R_N(s, p)}{s} ds \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{sgn(s) (k_y)_N s \lambda_{0N}}{h} \left\{ (e^{-|s| \lambda_{0N} \bar{y}_N} + e^{|s| \lambda_{0N} \bar{y}_N}) T_{0N}^*(\bar{r}, p) + (e^{-|s| \lambda_{0N} (\bar{h}_N - \bar{y}_N)} - e^{|s| \lambda_{0N} (\bar{h}_N - \bar{y}_N)}) q_{N-1}^*(\bar{r}, p) \right\} e^{is\bar{r}} d\bar{r}$$

여기서

$$R_N(s,p) = \frac{sgn(s)}{(k_y)_N \lambda_{0,N} (e^{|s| \lambda_{0,N} \bar{h}_N} + e^{-|s| \lambda_{0,N} \bar{h}_N})} \quad (12)$$

## 2.2 열 응력장 해석

플리어 변환을 적용하여 식(4)을 해석하면, 각 층에 대한 변위들은 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} u_j^*(\bar{x}, \bar{y}_j, p)/i \\ u_j^*(\bar{x}, \bar{y}_j, p) \end{Bmatrix} = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e_j] \begin{Bmatrix} A_{1,j} \\ B_{1,j} \\ A_{2,j} \\ B_{2,j} \end{Bmatrix} e^{-is\bar{x}} ds \quad (13)$$

$$+ \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} [e_{0,j}] \begin{Bmatrix} A_{0,j} \\ B_{0,j} \end{Bmatrix} e^{-is\bar{x}} ds$$

식(13)의 첫 번째 항과 두 번째 항은 식(4)의 일반해와 특별해이며,  $A_{m,j}(s,p)$ 와  $B_{m,j}(s,p)$ 는 각각 결정해야 할 미지수이다.

$$[e_j(\bar{y}_j, p, s)] = \begin{bmatrix} e^{-|s|\lambda_{1,j}\bar{y}_j} & e^{|s|\lambda_{1,j}\bar{y}_j} & e^{-|s|\lambda_{2,j}\bar{y}_j} & e^{|s|\lambda_{2,j}\bar{y}_j} \\ \zeta_{1,j} e^{-|s|\lambda_{1,j}\bar{y}_j} - \zeta_{1,j} e^{|s|\lambda_{1,j}\bar{y}_j} & \zeta_{2,j} e^{-|s|\lambda_{2,j}\bar{y}_j} - \zeta_{2,j} e^{|s|\lambda_{2,j}\bar{y}_j} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[e_{0,j}(\bar{y}_j, p, s)] = \begin{bmatrix} \zeta_{x,j} e^{-|s|\lambda_{0,j}\bar{y}_j} & \zeta_{x,j} e^{|s|\lambda_{0,j}\bar{y}_j} \\ -sgn(s)\zeta_{y,j} e^{-|s|\lambda_{0,j}\bar{y}_j} & sgn(s)\zeta_{y,j} e^{|s|\lambda_{0,j}\bar{y}_j} \end{bmatrix} \quad (15)$$

이며,  $\lambda_{i,j} (i=1,2)$ 는 다음과 같은 특성방정식을 만족시키는 근이다.

$$\lambda_{i,j}^4 - \left( \frac{C_{11}C_{22} - 2C_{12}C_{66} - C_{12}^2}{C_{22}C_{66}} \right)_j \lambda_{i,j}^2 + \left( \frac{C_{11}}{C_{22}} \right)_j = 0 \quad (16)$$

또한

$$\zeta_{i,j} = sgn(s)\eta_{i,j}, \quad \eta_{i,j} = \frac{(C_{11}/C_{66})_j - \lambda_{i,j}^2}{\lambda_{i,j}(1 + (C_{12}/C_{66})_j)} \quad (i=1,2)$$

식(15)에 있어,  $\zeta_{x,j}$ 와  $\zeta_{y,j}$ 는 다음 방정식의 근이다.

$$\left[ \left( \frac{C_{11}}{C_{66}} \right)_j - \lambda_{0,j}^2 \right] \zeta_{x,j} + \left[ \left( \frac{C_{12}}{C_{66}} \right)_j + 1 \right] \lambda_{0,j} \zeta_{y,j} = \frac{\beta_{x,j}}{(C_{66})_j} \quad (17)$$

$$\left( \frac{C_{12} + C_{66}}{C_{22}} \right)_j \lambda_{0,j} \zeta_{x,j} + \left[ \lambda_{0,j}^2 - \left( \frac{C_{66}}{C_{22}} \right)_j \right] \zeta_{y,j} = \frac{\lambda_{0,j} \beta_{y,j}}{(C_{22})_j} \quad (18)$$

이웃한 두 층사이의 경계면에서 응력에 대한 연속성을 고려하여, 식(13)을 식(3)에 대입하면 다음과 같은 응력에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_j^*(\bar{x}, p) \\ \tau_j^*(\bar{x}, p)/i \\ \sigma_{j-1}^*(\bar{x}, p) \\ \tau_{j-1}^*(\bar{x}, p)/i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s [K_j] \begin{Bmatrix} A_{1,j} \\ B_{1,j} \\ A_{2,j} \\ B_{2,j} \end{Bmatrix} e^{-is\bar{x}} ds \quad (19)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [K_{0,j}] \begin{Bmatrix} A_{0,j} \\ B_{0,j} \end{Bmatrix} e^{-is\bar{x}} ds$$

여기서

$$[K_j] = \begin{bmatrix} R_1 e^{-|s|\lambda_{1,j}\bar{h}_j} & R_1 e^{|s|\lambda_{1,j}\bar{h}_j} & R_3 e^{-|s|\lambda_{2,j}\bar{h}_j} & R_3 e^{|s|\lambda_{2,j}\bar{h}_j} \\ -AsP_1 & AsP_2 & -AsP_3 & AsP_4 \\ R_1 & R_1 & R_3 & R_3 \\ -AsR_2 & AsR_2(C_{66})_j & -AsR_4 & AsR_4(C_{66})_j \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$R_1 = (C_{12})_j - \lambda_{1,j} \eta_{1,j} (C_{22})_j$$

$$R_2 = (\lambda_{1,j} + \eta_{1,j})(C_{66})_j$$

$$R_3 = (C_{12})_j - \lambda_{2,j} \eta_{2,j} (C_{22})_j$$

$$R_4 = (\lambda_{2,j} + \eta_{2,j})(C_{66})_j$$

$$As = sgn(s)$$

$$P_1 = R_2 e^{-|s|\lambda_{1,j}\bar{h}_j}$$

$$P_2 = R_2 e^{|s|\lambda_{1,j}\bar{h}_j}$$

$$P_3 = R_4 e^{-|s|\lambda_{2,j}\bar{h}_j}$$

$$P_4 = R_4 e^{|s|\lambda_{2,j}\bar{h}_j}$$

$$[K_{0,j}] = \begin{bmatrix} p_1 e^{-|s|\lambda_{0,j}\bar{h}_j} & p_1 e^{|s|\lambda_{0,j}\bar{h}_j} \\ -sgn(s)p_2 e^{-|s|\lambda_{0,j}\bar{h}_j} & sgn(s)p_2 e^{|s|\lambda_{0,j}\bar{h}_j} \\ p_1 & p_1 \\ -sgn(s)p_2 & sgn(s)p_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$p_1 = \zeta_{y,j} \lambda_{0,j} (C_{22})_j + \zeta_{x,j} (C_{12})_j - (\beta_y)_j$$

$$p_2 = (\zeta_{x,j} \lambda_{0,j} - \zeta_{y,j}) (C_{66})_j$$

식(19)에 플리어 변환을 적용하면  $A_{1,j}$ ,  $B_{1,j}$ ,  $A_{2,j}$ 와  $B_{2,j}$ 는  $\sigma_j^*$ ,  $\tau_j^*$ ,  $\sigma_{j-1}^*$ 와  $\tau_{j-1}^*$ 로 표현되고, 식(13)에  $A_{1,j}$ ,  $B_{1,j}$ ,  $A_{2,j}$ 와  $B_{2,j}$ 를 다시 대입하면, 각 층에 대한 변위는 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} u_j^*(\bar{x}, \bar{y}_j, p)/i \\ u_j^*(\bar{x}, \bar{y}_j, p) \end{Bmatrix} = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} [e_j] ([D_j^a] \quad [D_j^b]) e^{-is\bar{x}}$$

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_j^* e^{is\bar{x}} d\bar{x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_j^*}{i} e^{is\bar{x}} d\bar{x} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{j-1}^* e^{is\bar{x}} d\bar{x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{j-1}^*}{i} e^{is\bar{x}} d\bar{x} \right\}$$

$$+ \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} [e_{1,j}] \begin{Bmatrix} A_{0,j} \\ B_{0,j} \end{Bmatrix} e^{-is\bar{x}} ds \quad (22)$$

그리고  $4 \times 2$ 인 행렬  $[D_j^a]$ ,  $[D_j^b]$ 는 다음과 같다.

$$[K_j(s,p)]^{-1} = [D_j^a(s,p), D_j^b(s,p)] \quad (23)$$

강체 운동을 무시하고, 이웃한 두 층사이의 변위에 대한 연속 조건은 다음과 같이 쓸 수 있다. 크랙 밖에서는

$$\left. \begin{aligned} u_{j+1}^*(\bar{x}, \bar{y}_{j+1}=0, p) &= u_j^*(\bar{x}, \bar{y}_j = \bar{h}_j, p) \\ v_{j+1}^*(\bar{x}, \bar{y}_{j+1}=0, p) &= v_j^*(\bar{x}, \bar{y}_j = \bar{h}_j, p) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

이며, 크랙의 밖과 내에서는 다음과 같은 방정식과 동일하다.

크랙의 밖의 경우,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{j+1}^*(\bar{x}, \bar{y}_{j+1}=0, p)}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial u_j^*(\bar{x}, \bar{y}_j = \bar{h}_j, p)}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial v_{j+1}^*(\bar{x}, \bar{y}_{j+1}=0, p)}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial v_j^*(\bar{x}, \bar{y}_j = \bar{h}_j, p)}{\partial \bar{x}} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

크랙의 내의 경우,

$$\left. \begin{aligned} \int_{c_j - a_j}^{c_j + a_j} \left( \frac{\partial u_{j+1}^*(\bar{x}, \bar{y}_{j+1}=0, p)}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial u_j^*(\bar{x}, \bar{y}_j = \bar{h}_j, p)}{\partial \bar{x}} \right) d\bar{x} &= 0 \\ \int_{c_j - a_j}^{c_j + a_j} \left( \frac{\partial v_{j+1}^*(\bar{x}, \bar{y}_{j+1}=0, p)}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial v_j^*(\bar{x}, \bar{y}_j = \bar{h}_j, p)}{\partial \bar{x}} \right) d\bar{x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

응력들이 이웃한 층 사이에서 연속이므로 식(25)는 각 층의 응력들로 나타낼 수 있다. 그러므로 식(22)을 식(25)에 대입하면 다음과 같다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} ([L]_j [M]_j [N]_j) e^{-is\bar{x}} ds \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i\sigma^{*j-1} \tau^{*j-1}; i\sigma^{*j} \tau^{*j} i\sigma^{*j+1} \tau^{*j+1} \right\} e^{is\bar{x}} d\bar{x} - i \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \phi_{Tx} \\ \Phi_{Ty} \end{matrix} \right\} e^{-is\bar{r}} ds = 0 \quad (27)$$

여기서  $[L(s,p)]_j$ ,  $[M(s,p)]_j$  과  $[N(s,p)]_j$ 은 다음과 같은  $2 \times 2$  행렬이다.

$$\left. \begin{aligned} [L(s,p)]_j &= [e_j(\bar{h}_j, p)] [D_j^b(s,p)] \\ [M(s,p)]_j &= [e_j(\bar{h}_j, p)] [D_j^a(s,p)] - [e_{j+1}(0,p)] [D_{j+1}^b(s,p)] \\ [N(s,p)]_j &= -[e_{j+1}(0,p)] [D_{j+1}^a(s,p)] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

또한

$$\left\{ \begin{matrix} \phi_{Tx}(s,p) \\ \phi_{Ty}(s,p) \end{matrix} \right\} = [e_{1(j+1)}(o, s, p)] \left\{ \begin{matrix} A_{0(j+1)}(s,p) \\ B_{0(j+1)}(s,p) \end{matrix} \right\} - [e_{1,j}(\bar{h}_j, s, p)] \left\{ \begin{matrix} A_{0,j}(s,p) \\ B_{0,j}(s,p) \end{matrix} \right\} \quad (29)$$

크랙 내에 있어서는 식(26)으로부터 다음과 같은 미지의 보조 함수를 소개함으로써 식(27)을 만족시킬 수 있다.

$$([L]_j [M]_j [N]_j) \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i\sigma^{*j-1} \tau^{*j-1}; i\sigma^{*j} \tau^{*j} i\sigma^{*j+1} \tau^{*j+1} \right\} e^{is\bar{x}} d\bar{x} - i \left\{ \begin{matrix} \phi_{Tx} \\ \Phi_{Ty} \end{matrix} \right\}_j = \int_{c_j - a_j}^{c_j + a_j} \left\{ \begin{matrix} \phi_{xj}(\bar{r}, p) \\ \phi_{yj}(\bar{r}, p) \end{matrix} \right\} / i e^{is\bar{r}} d\bar{r} \quad (30)$$

또는 행렬형태로 쓰면 다음과 같다.

$$[D] \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum \right\} e^{is\bar{x}} d\bar{x} = \{ \Phi \} + i \{ \Phi_T \} \quad (31)$$

여기서  $[D(s,p)]$ 는 다음과 같은 행렬형식이며,

$$[D] = \begin{pmatrix} M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \\ & & \ddots \\ & & & L_{N-2} & M_{N-2} & N_{N-2} \\ & & & & L_{N-1} & M_{N-1} \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\left\{ \sum(\bar{x}, p) \right\} = \left\{ i\sigma^{*1}, \tau^{*1} \dots i\sigma^{*(N-1)}, \tau^{*(N-1)} \right\} \quad (33)$$

$$\left\{ \Phi(s,p) \right\} = \left\{ \int_{\frac{c_1 - a_1}{i}}^{\frac{c_1 + a_1}{i}} \frac{\phi_{x1}}{i} e^{is\bar{r}} \int_{\frac{c_1 - a_1}{i}}^{\frac{c_1 + a_1}{i}} \phi_{y1} e^{is\bar{r}} \dots \int_{\frac{c_{N-1} + a_{N-1}}{c_{N-1} - a_{N-1}}} \frac{\phi_{x(N-1)}}{i} e^{is\bar{r}} \int_{\frac{c_{N-1} + a_{N-1}}{c_{N-1} - a_{N-1}}} \phi_{y(N-1)} e^{is\bar{r}} \right\} \quad (34)$$

$$\left\{ \Phi_T(s,p) \right\} = \left\{ (\phi_{Tx})_1, (\phi_{Ty})_1, \dots, (\phi_{Tx})_{N-1}, (\phi_{Ty})_{N-1} \right\} \quad (35)$$

행렬  $[D(s,p)]$ 의 역행렬을  $[K(s,p)]$ 라 하고, 식(31)에 역 플리어 변환을 적용하면 식(31)은 다음과 같다.

$$\left\{ \begin{matrix} i\sigma_j^*(\bar{x}, p) \\ \tau_j^*(\bar{x}, p) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\frac{c_k - a_k}{i}}^{\frac{c_k + a_k}{i}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \begin{matrix} K_{(2j-1)}^{(2k-1)} & K_{(2j-1)}^{(2k)} \\ K_{(2j)}^{(2k-1)} & K_{(2j)}^{(2k)} \end{matrix} \right] e^{is(\bar{r}-\bar{x})} ds \right) \left\{ \begin{matrix} \phi_{xk}/i \\ \phi_{yk} \end{matrix} \right\} + \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \begin{matrix} K_{(2j-1)}^{(2k-1)} & K_{(2j-1)}^{(2k)} \\ K_{(2j)}^{(2k-1)} & K_{(2j)}^{(2k)} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \phi_{Tx} \\ \phi_{Ty} \end{matrix} \right\}_k e^{-is\bar{x}} ds \quad (36)$$

식(36)은 경계면의 응력과 경계면의 보조방정식 사이에 존재하는 관계를 규정하며,  $2(N-1)$ 개의 방정식이 있다. 크랙이 없는 경계면에서의 보조 방정식은 영(zero)이 되며, 이 방정식을 풀기 위해 필요로 하는 방정식의 수는 크랙 수의 두 배이다. 행렬  $[D(s,p)]^{-1}$ 에 있어  $m$ 번째 행과  $n$ 번째 열을 나타내는 변수  $K_{mn}$ 에 관해서,  $|s| \rightarrow \infty$ 이 되면  $[K(s,p)]$ 에 있어 0(zero)이

아닌 요소들은 다음과 같다.

$$K_{(2j-1)}^{(2j)}(\infty, p) = \lim_{s \rightarrow \pm \infty} K_{(2j-1)}^{(2j)}(s, p) = \frac{\text{sgn}(s)}{2} (G_y)_j \quad (37)$$

$$K_{(2j)}^{(2j-1)}(\infty, p) = \lim_{s \rightarrow \pm \infty} K_{(2j)}^{(2j-1)}(s, p) = \frac{\text{sgn}(s)}{2} (G_x)_j \quad (38)$$

여기서  $(G_x)_j, (G_y)_j$ 는 다음과 같다.

$$(G_x)_j = \frac{((C_{11})_J + (C_{12})_J \lambda_{1J}^2)((C_{11})_J + (C_{12})_J \lambda_{2J}^2)(C_{66})_J}{(C_{11})_J((C_{12})_J + (C_{66})_J)(\lambda_{1J} + \lambda_{2J})} \quad (39)$$

$$(G_y)_j = \frac{(G_x)_j}{\lambda_{1J} \lambda_{2J}}$$

또한  $\bar{K}_m^u(s, p) = K_m^u(s, p) - K_m^u(\infty, p)$ 을 이용하고,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(s) e^{is(\bar{r}-\bar{x})} ds = 2i/(\bar{r}-\bar{x})$$

을 적용하면 식 (36)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} i\sigma_j^*(\bar{x}, p) \\ \tau_j^*(\bar{x}, p) \end{array} \right\} = \\ & \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} K_{(2j-1)}^{(2k-1)} K_{(2j-1)}^{(2k)} \\ K_{(2j)}^{(2k-1)} K_{(2j)}^{(2k)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \phi_{Tx} \\ \phi_{Ty} \end{array} \right\}_k e^{-is\bar{x}} ds + \\ & \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\bar{c}_k - \bar{a}_k}^{\bar{c}_k + 1\bar{a}_k} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} K_{(2j-1)}^{(2k-1)} K_{(2j-1)}^{(2k)} \\ K_{(2j)}^{(2k-1)} K_{(2j)}^{(2k)} \end{array} \right] e^{is(\bar{r}-\bar{x})} ds \right) \times \\ & \left\{ \begin{array}{l} \phi_{xk}/i \\ \phi_{yk} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{i(G_y)_j}{2\pi} \int_{\bar{c}_j - \bar{a}_j}^{\bar{c}_j + \bar{a}_j} \frac{\phi_{yj}}{r-x} d\bar{r} \\ (G_x)_j \int_{\bar{c}_j - \bar{a}_j}^{\bar{c}_j + \bar{a}_j} \frac{\phi_{xj}}{r-x} d\bar{r} \end{array} \right\} \quad (40) \end{aligned}$$

식(40)는 크랙 내부와 외부에 있어 응력들에 대한 표현을 제공한다. 크랙 내부의 경우에는 지배적인 특이부분(singular part)이 단순 Cauchy-Type Kernel을 가지는 보통 특이적분 방정식(singular integral equation)이다. 크랙-팁(crack-tip)의 거동은 표준 제곱근 특이 함수(standard square-root singular)로 특성화 될 수 있다. 적분방정식은 기본함수가 첫 번째 체비셰프 다항식(Chebyshev polynomial)  $T_m(\bar{r}_j)$ 의 가중함수(weight function)와 일치되는 것을 유의하여 수치적으로 해석 될 수 있으며, 식(40)의 해는 다음과 같은 형식을 가진다.

$$\phi_{xj}(\bar{a}_j \bar{r}_j + \bar{c}_j, p) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{jm}^x(p) T_m(\bar{r}_j) / \sqrt{1-\bar{r}_j^2} \quad (41)$$

$$\phi_{yj}(\bar{a}_j \bar{r}_j + \bar{c}_j, p) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{jm}^y(p) T_m(\bar{r}_j) / \sqrt{1-\bar{r}_j^2} \quad (42)$$

여기서  $\bar{r}_j = (\bar{r} - \bar{c}_j) / \bar{a}_j$  이고,  $C_{jm}^x(p)$ 와  $C_{jm}^y(p)$ 은 계산될 변수이다. 식(41)과 식(42)을 식(40)에 대입하고, 다음과 같은 가중잔여방법(weighted residuals method)을 이용하여  $C_{jm}^x(p)$ 와  $C_{jm}^y(p)$ 을 계산할 수 있다.

$$\int_{-1}^1 [\sigma_j^*(\bar{a}_j \bar{x}_j + \bar{c}_j, p)] \frac{\sin(n \cos^{-1} \bar{x}_j)}{n} d\bar{x}_j = 0 \quad (43)$$

$$\int_{-1}^1 [\tau_j^*(\bar{a}_j \bar{x}_j + \bar{c}_j, p)] \frac{\sin(n \cos^{-1} \bar{x}_j)}{n} d\bar{x}_j = 0 \quad (44)$$

여기서  $j=1, \dots, (N-1)$ ,  $n=1, \dots, M$  이다.

그러므로 크랙-팁에 있어 모드 I과 II의 응력 집중계수(mode I and mode II stress intensity factors)는 다음과 같이 계산 될 수 있다.

$$\begin{aligned} (K_I^*)_j &= (\sqrt{2\{(c_j - a_j) - x\}})_{x \rightarrow (c_j - a_j)} \sigma_j^*(\bar{x}, p) \\ &= \frac{(G_y)_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M (-1)^m C_{jm}^y(p) \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (K_{II}^*)_j &= (\sqrt{2\{(c_j - a_j) - x\}})_{x \rightarrow (c_j - a_j)} \tau_j^*(\bar{x}, p) \\ &= \frac{(G_x)_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M (-1)^m C_{jm}^x(p) \quad (46) \end{aligned}$$

왼쪽의 크랙-팁(crack-tip)경우이며, 그리고

$$\begin{aligned} (K_I^*)_j &= (\sqrt{2\{x - (c_j + a_j)\}})_{x \rightarrow (c_j + a_j)} \sigma_j^*(\bar{x}, p) \\ &= -\frac{(G_y)_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M C_{jm}^y(p) \quad (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (K_{II}^*)_j &= (\sqrt{2\{x - (c_j + a_j)\}})_{x \rightarrow (c_j + a_j)} \tau_j^*(\bar{x}, p) \\ &= -\frac{(G_x)_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M C_{jm}^x(p) \quad (48) \end{aligned}$$

오른쪽의 크랙-팁(crack-tip)경우이다.

라플라스 영역에서 해가 얻어진 후에, 수치적으로 역 라플라스 변환이 수행되며, 이 방법은 Jin과 Noda(1994)[6, 7]가 열탄성 파괴 동역학에 적용하였으며, 참고문헌[1]에서 역 라플라스 변환에 대한 수치계산 검증에 대한 결과가 제시되었다.

### 3. 수치 해석

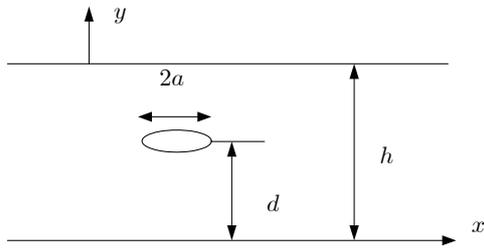


Fig. 3 Crack geometry and coordinates for a functionally graded material ( $2a = h$ )

수치예제를 계산하기 위해 경사기능재료로 구성된 금속/세라믹 시편이 선택되었다. Fig. 3에 수치계산 예제에 대한 크랙의 기하학적 형상과 좌표계를 나타내었다. 크랙은 판의 두께에 수직으로 존재한다고 가정되었으며, 크랙이 층과 층 사이에 있다. 경사기능재료 판 하부 면의 온도가 0(zero)로 유지되며, 갑자기 상부면에 균일한 온도 변화  $T_0$ 가 작용한다. 경사기능재료는 알루미늄 합금과 알루미늄으로 구성되며, 재료의 물성치인 열팽창계수, 밀도, 열전도계수, 비열, 탄성계수, 포아송의 비는 각각  $\alpha_m = 23 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $\rho_m = 2800\text{Kg}/\text{m}^3$ ,  $k_m = 154\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}$ ,  $c_m = 963\text{J}/\text{kg}$ ,  $E_m = 73\text{MPa}$ ,  $\nu_m = 0.33$ ,  $\alpha_c = 8.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $\rho_c = 3960\text{Kg}/\text{m}^3$ ,  $k_c = 46\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}$ ,  $c_c = 765\text{J}/\text{kg}$ ,  $E_c = 380\text{MPa}$ ,  $\nu_c = 0.22$  이며,  $m$ 은 금속과  $c$ 는 세라믹을 나타낸다. 경사기능재료 판의 하부 면은 순수 금속이며 상부 면은 순수 세라믹이다. 금속의 체적비는  $y$ 의 함수로서  $V_m(y) = (y/h_g)^g$ 의 형식으로 power-law type relation을 따르며,  $g$ 는 기울기 지수로서 알려져 있다. 그림에 있어 무차원 열응력 집중계수  $\bar{K}_I = K_I/(\alpha_m T_0 \sqrt{a}/h)$ 이며, 무차원 시간  $\bar{t} = t/(h^2 \rho_m c_m/k_m)$ 이다.

Fig. 4와 5는 무차원 시간에 따른 무차원 열응력 집중계수의 수렴성을 나타낸다. 경사기능재료를 수많은 층으로 가정했으며, 비정상 상태에서 정상상태로 진행됨에 따라 층의 수( $N$ )에 따른 해의 수렴성을 보여주고 있다. 이 결과는 재료의 이질성에 대한 효과를 나타내는데 적층판 이론을 사용할 수 있다는 것을 보여준다.

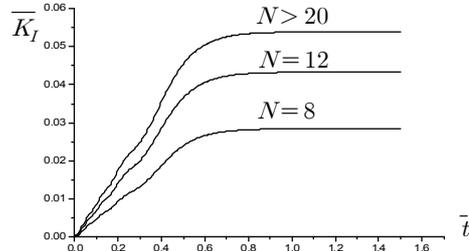


Fig. 4 Thermal stress intensity factor at right hand crack tip with time ( $g = 1$ )

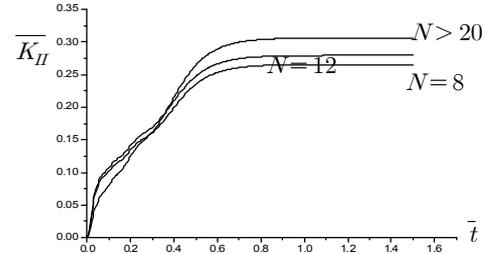


Fig. 5 Thermal stress intensity factor at right hand crack tip with time ( $g = 1$ )

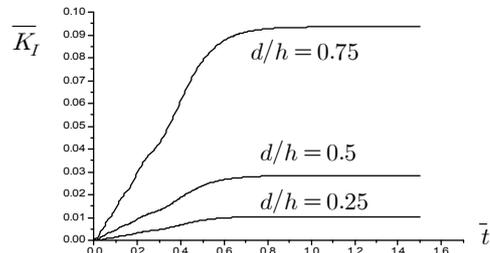


Fig. 6 Thermal stress intensity factor at right hand crack tip with time ( $g = 1$ )

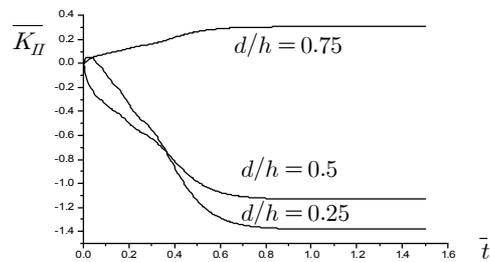


Fig. 7 Thermal stress intensity factor at right hand crack tip with time ( $g = 1$ )

크랙이 1개인 경우로서 고정된 기울기 지수  $g=1$ 에 있어, 크랙의 위치  $d/h$ 가 열응력 집중계수에 미치는 영향을 Fig. 6과 7에 나타내었다. Fig.6과 7을 통해  $d/h$ 의 값이 커지면 열응력 집중계수에 미치는 영향이 커짐을 알 수 있으며, 이것은 가열 면에 이웃한 재료가 더 크랙이 쉽게 일어난다는 의미한다.

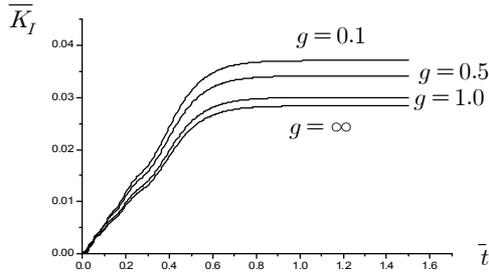


Fig. 8 Influences of gradient exponent  $g$  on mode I thermal stress intensity factors

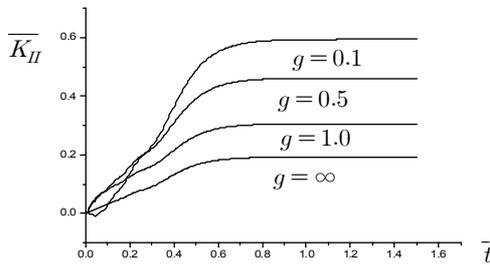


Fig. 9 Influences of gradient exponent  $g$  on mode II thermal stress intensity factors

Fig.8과 9는  $d/h=0.5$  크랙이 1개인 경우로서, 기울기 지수  $g$ 의 값이 열응력 집중계수에 미치는 영향을 나타내었다. 순수 금속은 세라믹보다 더 작은 탄성계수, 더 큰 열전도율을 가지므로 기울기 지수  $g$ 의 값에 따라 열응력 집중계수는 단순 감소하며, Fig. 8과 9에서 보는 바와 같이 순수 세라믹( $g=0$ )인 경우에 열응력 집중계수의 크기가 좀 더 큰 값에 수렴하고, 순수 금속( $g=\infty$ )인 경우에 좀 더 작은 값에 수렴한다.

크랙이 2개인 경우( $d/h=1/3, d/h=2/3$ ), 기울기 지수  $g$ 의 값이 열응력 집중계수에 미치는 영향을 Fig. 10과 11에 나타내었으며, 크랙이 1개인 경우와 같은 경향을 보여주고 있음을 알 수 있다.

### 4. 결 론

본 연구에서는 비정상 상태의 열 하중을 받는 이질재료의 다중 크랙 문제에 있어, 시간 변화에 따른 열응력 집중계수들의 거동이 계산되고 검토되었다. 적층판 이론을 사용하여, 두께 방향의 연속적인 함수 형태로 변화하는 재료의 이질성을 동질의 재료로 가정하였다. 또한 각 층에 대한 지배방정식에 라플라스 변환과 플리에 변환 기법을 사용하여, 다중 크랙 문제에 대한 특이 적분 방정식이 유도되었고, 이 방정식에 대한 해를 구하는 과정이 제시되었다. 적층 판 이론을 사용하여 재료의 이질성 특성을 나타낼 수 있음을 제시하였고, 다중 크랙의 열응력 집중계수에 미치는 영향이 검토되었다. 즉 비정상 열 하중에 의한 열응력 집중계수에 미치는 크랙의 위치 및 재료의 이질성의 영향이 검토되었다. 수치계산 결과의 검토를 통해 순수 금속과 세라믹의 조성분포의 조절을 통해 열응력 집중계수의 영향을 감소시킬 수 있음을 보여주고 있다.

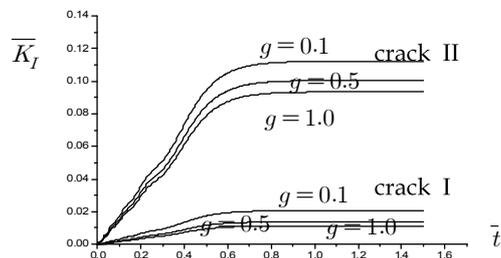


Fig. 10 Influences of gradient exponent  $g$  on mode thermal stress intensity factors in case of two cracks

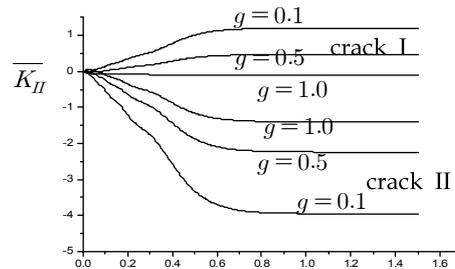


Fig. 11 Influences of gradient exponent  $g$  on mode II thermal stress intensity factors in case of two cracks

## 후 기

본 연구는 2009년도 인하공업전문대학 교내 학술연구비 지원에 의해 수행되었으며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- [1] 김귀섭, "비정상 열 하중을 받는 이질재료의 열량 집중 계수 해석", 한국항공공학학회지, 제16권 4호, 2008, pp. 26~34.
- [2] Saito, M., and Takahashi, H., 1990, "Development of Small Punch Test Procedure for FGM Fabrication," in Yamanouchi, M., et al. (eds.), FGM-90, Proc. 1st Int. Symposium on Functionally Gradient Materials, FGM Forum, Tokyo, Japan, pp. 297-305.
- [3] Noda, N., and Jin, Z. H., 1993a, "Thermal Stress Intensity Factors for a Crack in a Functionally Gradient Material," International Journal of Solids and Structure, Vol. 30, pp. 1039-1056.
- [4] Noda, N., and Jin, Z. H., 1993b, "Steady Thermal Stresses in an Infinite Non-Homogeneous Elastic Solid Containing a Crack," Journal of Thermal Stresses, Vol. 16, pp. 181-197.
- [5] Noda, N., and Jin, Z. H., 1994, "A Crack in a Functionally Gradient Material Under Thermal Shock," Arch. Appl. Mech., Vol. 64, pp. 99-110.
- [6] Jin, Z. H., and Noda, N., 1994a, "Transient Thermal Stress Intensity Factors for a Crack in a Semi-Infinite Plate of a Functionally Gradient Material," International Journal of Solids and Structure, Vol. 31, pp. 203-218.
- [7] Jin, Z. H., and Noda, N., 1994b, "Edge Crack in a Nonhomogeneous Half Plane Under Thermal Loading," Journal of Thermal Stresses, Vol. 17, pp. 591-599.
- [8] Erdogan, F., and Wu, B. H., 1996, "Crack Problem in FGM layers Under Thermal Stresses," Journal of Thermal Stresses, Vol. 19, pp. 237-265.
- [9] Nemat-Alla, M., and Noda, N., 1996, "Study of an Edge Crack Problem in a Semi-infinite Functionally Graded Medium with Two Dimensionally Non-homogeneous Coefficients of Thermal Expansion Under Thermal Loading," Journal of Thermal Stresses, Vol. 19, pp. 863-888.
- [10] Jin, Z. H., and Batra, R. C., 1996a, "Stress Intensity Relaxation at the Tip of an Edge Crack in a Functionally Graded Materials Subjected to a Thermal Shock," Journal of Thermal Stresses, Vol. 19, pp. 317-339.
- [11] Noda, N., 1997, "Thermal Stress Intensity Factor for Functionally Gradient Plate with an Edge Crack," Journal of Thermal Stresses, Vol. 20, pp. 373-387.