

추가성토에 의한 성토체 하부에서의 연직응력 산정

이승현¹, 한진태^{2*}
¹선문대학교 토목공학과
²서울대학교 건설환경공학부

Estimation of Vertical Stress Developed in Subsurface due to Additional Embankment

Seung-Hyun Lee¹ and Jin-Tae Han^{2*}

¹Dept. of Civil Engineering, Sunmoon University

²Dept. of Civil & Environmental Engineering, Seoul National University

요 약 매년 증가하는 교통량과 물동량으로 인해 기존 도로의 성토폭을 넓혀야 하는 경우가 빈번하게 발생한다. 본 연구에서는 추가 성토로 인해 기존 성토체 하부지반에 전달되는 연직응력 산정식을 유도하고자 하였다. 유도과정을 통해 평면변형률 지반조건에 대한 이론적 배경을 검토하여 보았다. 해석에서 고려한 응력함수는 적합조건 및 경계조건을 만족함을 알 수 있었다. 유도된 연직응력 산정식을 적용함에 있어 주의점을 살펴보고 계산예를 통해 산정식의 신뢰성을 확인하였다.

Abstract The needs for enlargement of width of existing embankment have been increasing due to heavy traffic and large amount of transporting goods. In this study, it was intended to derive formula for estimating vertical stress induced by additional embankment. Theoretical background for handling plain strain problem was investigated. It can be seen that stress function considered in the analysis was justifiable for compatibility and boundary condition. Notes for using derived formula were also considered.

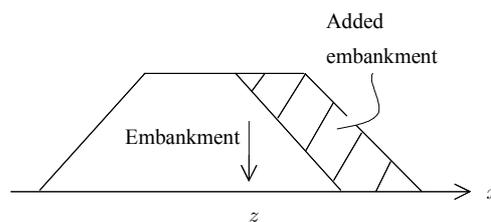
Key Words : Additional embankment, Vertical stress, Plain strain, Stress function

1. 서론

나날이 증가하는 교통량과 물동량의 증가로 매년 신규 도로공사가 발주되고 있으며 기존 도로의 확장공사가 빈번하게 이루어지고 있다. 기존도로를 확장하는 경우 그림 1에 나타낸 바와 같이 기존 성토체에 추가적으로 성토하중이 작용하게 되므로 당초 성토체 하부지반에 작용하는 응력에 추가적인 응력이 작용한다.

성토체 하부지반의 압밀검토, 토류구조물의 안정성 검토를 위해서는 추가성토에 의한 성토체 하부지반의 응력 증가량을 알 필요가 있다. 본 연구에서는 반무한 탄성지반상에 하중이 작용하는 경우 성토체 하부지반에 발생하

는 응력성분 유도과정을 이론적으로 규명하여 보았고 추가성토에 의해 성토체 하부지반에 발생하는 연직응력 산정식을 유도하였다.



[그림 1] 추가성토 단면

*교신저자 : 한진태(jimmy76@snu.ac.kr)

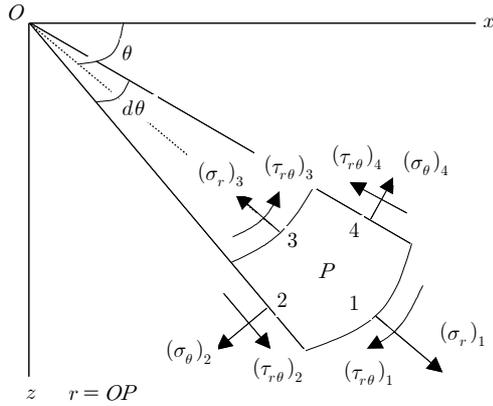
접수일 11년 03월 15일

수정일 11년 04월 06일

게재확정일 11년 05월 12일

2. 기본 이론

2차원 평면 변형을 분체에서 탄성지반에 대한 응력해석시 그림 2와 같은 극좌표를 이용하여 재료의 미소요소에 작용하는 응력성분을 고려하면 편리하다.



[그림 2] 극좌표에서의 미소요소

그림 2에 나타난 미소요소에 대한 평형조건식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2)$$

식 (1)과 식 (2)에 나타난 평형조건식을 만족하는 응력성분들을 응력함수를 써서 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (3)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

한편, 직각좌표계에 대한 응력성분과 극좌표계에 대한 응력성분 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\sigma_r = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_z \sin^2 \theta + 2\tau_{xz} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_z \cos^2 \theta - 2\tau_{xz} \sin \theta \cos \theta \quad (4)$$

$$\tau_{r\theta} = (\sigma_z - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xz} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

또는 직각 좌표계에 대한 응력성분들을 극좌표계에 대한 응력성분들로 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_z = \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \quad (5)$$

$$\tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

임의의 함수 $f(x,y)$ 를 고려할 때 이 함수에 대하여 연쇄법칙을 적용하면 다음 식들을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) - 2\sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) + 2\sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (7)$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (8)$$

함수 f 를 응력함수로 하면 식 (6)~(8)의 좌변은 각각 $\sigma_z, \sigma_x, \tau_{xz}$ 가 된다. 세 식의 우변을 식 (4)의 우변에 대입하면 식 (3)을 얻을 수 있다. 식 (6)과 식 (7)을 변변 더하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) f \quad (9)$$

식 (5)의 첫 번째 식과 두 번째 식을 변변 더하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sigma_x + \sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta \quad (10)$$

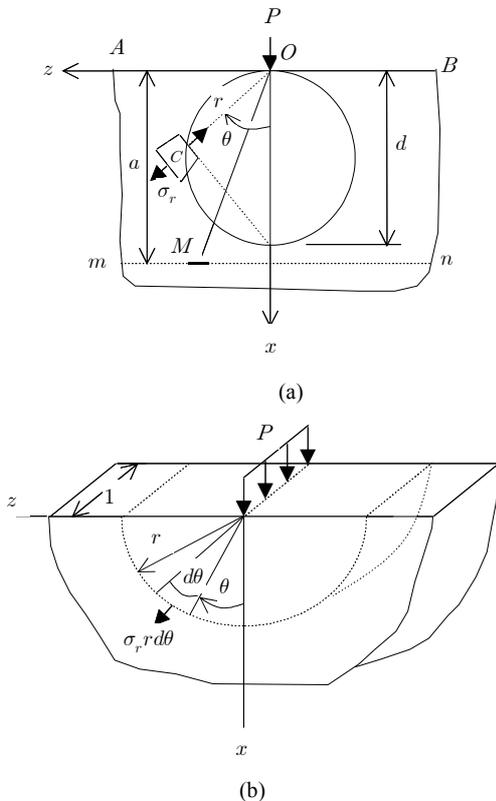
체력이 0인 경우 직각 좌표계에 대한 적합조건식은 $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2)(\sigma_x + \sigma_z) = 0$ 으로 표현되므로 식 (10)을 식 (9)의 f 로서 고려하고 식 (3)의 첫 번째 식과 두 번째 식을 적용하면 다음과 같은 미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (11)$$

식 (11)에 나타낸 편미분 방정식에 경계조건을 적용하여 2차원 문제의 해를 구할 수 있다.

3. 반무한 지반상의 하중에 의한 응력

반무한 탄성지반에서의 응력분포를 살펴보기 위해 그림 3과 같이 집중하중이 작용하는 경우를 고려한다 (Timoshenko & Goodier, 1987). 그림 3과 관련하여 응력에 대한 부호규약은 인장을 정(+)의 값으로 한다.



[그림 3] 반무한 탄성지반에서의 응력

그림 3에서 하중 P 는 단위 두께당 하중이다. 그림 3에 나타낸 문제에 대하여 평형방정식 및 적합조건을 만족하는 응력함수는 다음과 같이 가정한다.

$$\phi = -\frac{P}{\pi} r\theta \sin\theta \quad (12)$$

식 (12)를 식 (3)에 대입하면 다음과 같은 응력성분을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\frac{2P \cos\theta}{\pi r} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0 \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)으로부터 원주방향 응력, σ_θ 와 전단응력, $\tau_{r\theta}$ 가 0이 됨을 알 수 있고 경계면 AB 에 대하여 경계조건을 만족함을 알 수 있다. 즉, 그림 3(a)로부터 하중이 작용하지 않는 AB 면상의 모든 점에서 응력이 0이 됨을 알 수 있다. 그림 3 (b)에 나타낸 원통형 표면에 작용하는 응력에 의한 연직방향의 합력은 지표면에 작용하는 하중과 같아야 하는데 이는 다음과 같이 확인된다.

$$2 \int_0^{\pi/2} \sigma_r r \cos\theta d\theta = -\frac{4P}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta = -P$$

식 (13)으로부터 하중 작용점으로부터 r 만큼 떨어진 요소에는 반지름 방향으로 압축응력만 작용하게 된다. 이와 같은 압축응력을 단순압축(simple compression)이라 한다. 그림 3(a)에서 경계면 AB 에서 a 거리만큼 떨어진 수평면 mn 상에 존재하는 미소 사각형 요소에 작용하는 응력은 다음과 같다.

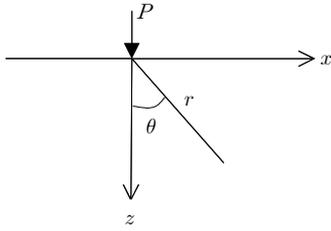
$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2\theta = -\frac{2P \cos^3\theta}{\pi r} = -\frac{2P}{\pi a} \cos^4\theta \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \sigma_r \cos\theta \sin\theta = -\frac{2P \sin\theta \cos^2\theta}{\pi r} \\ &= -\frac{2P}{\pi a} \sin\theta \cos^3\theta \end{aligned} \quad (15)$$

$$\sigma_z = \sigma_r \sin^2\theta = -\frac{2P}{\pi a} \sin^2\theta \cos^2\theta \quad (16)$$

4. 추가성토에 따른 지중응력

추가성토에 따른 지중응력을 살펴보기 위해 그림 4와 같은 좌표계를 고려한다.



[그림 4] 해석 좌표계

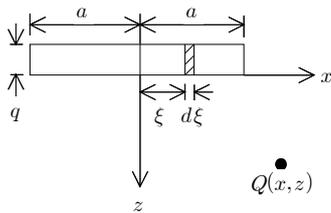
단순압축문제에서 연직방향 선하중이 작용하는 경우 직교좌표계에 의한 응력성분들이 식 (14)~(16)에 나타나 있는데 그림 4와 같은 좌표계를 고려하고 압축응력을 정 (+)의 값으로 보면 $\sigma_r = (2P/\pi)(\cos\theta/r)$ 이 되고 직교좌표계에 의한 응력성분들은 다음과 같다(Harr, 1967).

$$\sigma_z = \sigma_r \cos^2\theta = \frac{2Pz^3}{\pi(x^2 + z^2)^2} \quad (14)$$

$$\sigma_x = \sigma_r \sin^2\theta = \frac{2Px^2z}{\pi(x^2 + z^2)^2} \quad (15)$$

$$\tau_{xz} = \sigma_r \cos\theta \sin\theta = \frac{2Pxz^2}{\pi(x^2 + z^2)^2} \quad (16)$$

그림 5에 나타나 있는 바와 같이 반무한 탄성지반상에 등분포 선하중이 작용하는 경우 중첩원리를 적용하여 점 Q에 작용하는 응력들을 구할 수 있다.

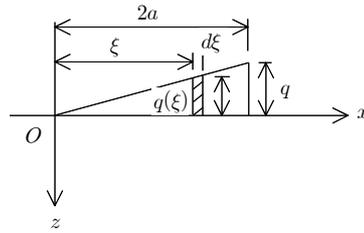


[그림 5] 등분포 하중에 의한 지중응력

그림 5에서 등분포 선하중이 폭 2a인 유연성 띠에 작용하는 경우 Q점에 작용하는 응력들은 $x = \xi$ 에서의 미소 폭에 대한 선하중인 $qd\xi$ 를 식 (14)를 참조하여 적분을 함으로써 다음과 같이 구할 수 있다(Kolosov, 1935).

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{2q}{\pi} \int_{-a}^a \frac{z^3}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2} d\xi \quad (17) \\ &= \frac{q}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{z}{x-a} - \tan^{-1} \frac{z}{x+a} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2az(x^2 - z^2 - a^2)}{(x^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2} \right] \end{aligned}$$

중첩원리를 적용하기 위해서는 재하면이 완전 연성 (perfectly flexible)이어야 함을 주의할 필요가 있다. 삼각형 분포하중이 작용하는 경우에는 그림 6을 고려한다.

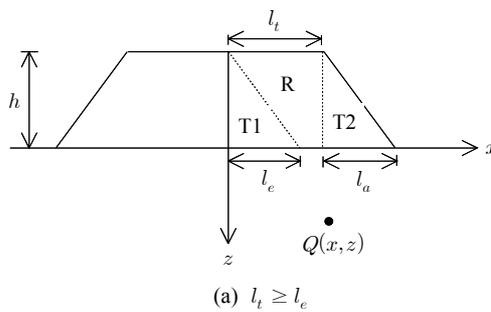


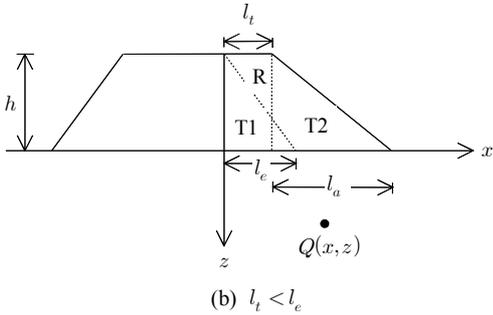
[그림 6] 삼각형 분포하중에 의한 지중응력

그림 6에서 집중하중 $q(\xi) = q\xi/(2a)$ 에 대하여 중첩원리를 적용하여 적분을 수행하면 연직응력을 다음과 같이 결정할 수 있다(Florin, 1959).

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{xq}{2\pi a} \left(\tan^{-1} \frac{z}{x-2a} - \tan^{-1} \frac{z}{x} \right) \quad (18) \\ &\quad - \frac{qz}{\pi} \frac{x-2a}{(x-2a)^2 + z^2} \end{aligned}$$

주의해야 할 점은 식 (17)과 (18)을 적용함에 있어 수식 포함된 탄젠트 함수의 역함수 값의 범위는 $0 \leq \tan^{-1}(\text{function}) < \pi$ 이 되어야 한다. 즉, arctan 값이 음수로 계산되면 π 를 더한 값을 사용해야 한다. 추가 성토에 따른 지중응력 산정을 위해 다음 그림 7과 같은 성토단면을 고려한다. 그림 7에서 T1은 기존 성토체에서 법면을 포함하는 삼각형부분을 나타내는데 l_e 는 법면 하부의 길이로 정의된다. R은 폭 l_t 로 정의되는 직사각형부분을 나타내며 T2는 추가성토체의 법면을 포함하는 삼각형부분을 나타내는데 l_a 는 법면 하부의 길이로 정의된다.





[그림 7] 추가성토에 의한 지중응력

그림 7에는 두 가지 경우의 추가성토 단면이 나타나 있는데 그림 7(a)는 $l_t \geq l_e$ 인 경우를 나타내고 그림 7(b)는 $l_t < l_e$ 인 경우를 나타낸다.

그림 7에서 추가성토에 따라 Q점에 작용하는 연직응력을 산정하기 위해 그림 5와 그림 6에 나타난 좌표계에 대하여 x좌표의 평행이동을 다음과 같이 고려한다.

$$\begin{aligned} T1 : x' &= l_e - x \\ R : x' &= x - l_t/2 \\ T2 : x' &= l_t + l_a - x \end{aligned}$$

위의 x' 과 x 의 관계는 그림 7에 나타낸 두 가지 경우에 있어 동일하게 적용할 수 있다.

그림 7에 나타낸 각각의 영역에 의한 연직응력 산정을 위해서는 그림 7에 나타낸 T1, R, T2영역에 대응하는 연직응력을 $\sigma_{z(T1)}$, $\sigma_{z(R)}$, $\sigma_{z(T2)}$ 로 나타내면 각각의 응력은 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_{z(T1)} = \frac{(l_e - x)q}{\pi l_e} \left(\tan^{-1} \left(-\frac{z}{x} \right) - \tan^{-1} \frac{z}{l_e - x} \right) + \frac{qz}{\pi} \frac{x}{x^2 + z^2} \quad (19)$$

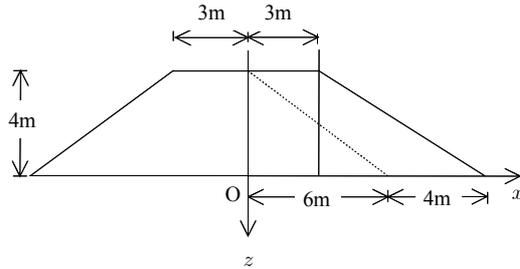
$$\sigma_{z(R)} = \frac{q}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{z}{x - l_t} - \tan^{-1} \frac{z}{x} - \frac{z l_t (x^2 - x l_t - z^2)}{(x^2 - x l_t + z^2)^2 + l_t^2 z^2} \right] \quad (20)$$

$$\sigma_{z(T2)} = \frac{(l_t + l_a - x)q}{\pi l_a} \left(\tan^{-1} \frac{z}{l_t - x} - \tan^{-1} \frac{z}{l_t + l_a - x} \right) - \frac{qz}{\pi} \frac{l_t - x}{(l_t - x)^2 + z^2} \quad (21)$$

따라서 응력중첩에 의해 그림 7의 Q점에 작용하는 응력은 다음과 같이 산정된다.

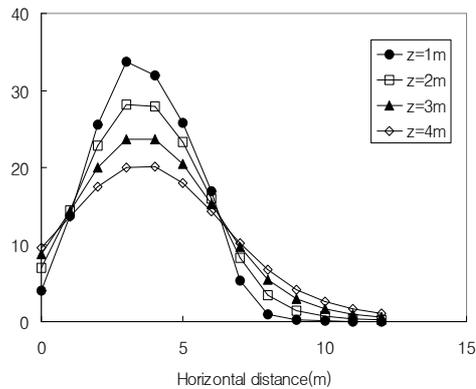
$$\sigma_z = \sigma_{z(R)} + \sigma_{z(T2)} - \sigma_{z(T1)} \quad (22)$$

추가성토에 의한 지중응력 증분을 그림 8과 같은 계산 예를 통해 살펴보았다.



[그림 8] 계산 예

계산 예에서는 높이 4m의 성토체를 고려하였는데 성토체의 단위중량은 $20kN/m^3$ 로 보았다. 추가성토에 의해 성토체 하부지반에서의 연직응력 증분을 깊이 1m, 2m, 3m 그리고 4m에 대하여 구해 보았다. 각각의 깊이에 대하여 수평방향으로는 0m에서부터 12m까지 1m씩 증가시켜 연직응력 증분량의 분포를 살펴보았다. 계산시 고려한 깊이들에 대하여 수평방향으로의 거리에 따른 연직응력 증분량을 구해 보았는데 그 결과는 그림 9에 나타내었다.



[그림 9] 깊이에 따른 연직응력 분포

그림 9를 통해 알 수 있듯이 지표면으로부터 깊이가 증가함에 따라 응력전달량이 감소함을 알 수 있으며 응력곡선의 형상은 깊이가 증가함에 따라 좀 더 완만한 분포를 보인다. 이상에서 고려한 연직응력 산정식을 통해 추가 성토를 하는 경우, 보다 간편하게 성토체 하부지반에서의 연직응력 분포를 구할 수 있을 것으로 기대된다.

5. 결론

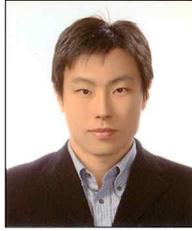
본 연구에서는 빈번히 발생하는 기존 성토체의 폭을 확장하는 문제와 관련하여 성토체 하부로 전달되는 연직 응력 산정식을 제안하였다. 산정식을 유도함에 있어 반무한 탄성지반상의 하중재하에 따른 이론을 규명하여 보았다. 해석시 고려한 응력함수는 적합조건 및 경계조건을 만족함을 알 수 있었으며 그로부터 직각좌표계로 표현되는 연직응력 증분량 산정식을 유도하였다. 유도된 산정식을 적용함에 있어 특히 주의해야 할 점은 산정식에 포함된 탄젠트의 역함수 값을 구할 때에는 0 이상이고 π 보다 작은 값을 사용해야 한다는 점이다.

참고문헌

- [1] Florin, V. A., "Fundamentals of Soil Mechanics", Vols. 1 and 2, Gosstroizdat, Moscow, 1959.
- [2] Harr, M. E., "Foundations of Theoretical Soil Mechanics", McGraw-Hill Book Company, pp. 58-69, 1967.
- [3] Kolosov, G. B., "Application of Complex Diagrams and the Theory of Functions of Complex Variables to the Theory of Elasticity," ONTI, 1935.
- [4] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., "Theory of elasticity", McGraw-Hill Book Company, pp. 97-104, 1987.

한 진 태(Jin-Tae Han)

[정회원]



- 1999년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학사)
- 2001년 2월 : 서울대학교 지구환경시스템공학부 (공학석사)
- 2006년 8월 : 서울대학교 지구환경시스템공학부 (공학박사)
- 2010년 10월 ~ 현재 : 서울대학교 건설환경공학부 BK계약교수

<관심분야>

지반내진공학, 기초공학

이 승 현(Seung-Hyun Lee)

[정회원]



- 1988년 8월 : 서울대학교 토목공학과 (공학사)
- 1991년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학석사)
- 1997년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학박사)
- 2000년 3월 ~ 현재 : 선문대학교 토목공학과 부교수

<관심분야>

토질역학, 기초공학