

# 타원 1-인벌루트-타원 2 형상을 조합한 새로운 형상의 제로터 개발

## Development of a New Gerotor for Oil Pumps with Multiple Profiles(Ellipse1, Involute and Ellipse2)

정성윤<sup>1</sup>, 김문생<sup>2</sup>, 김철<sup>1,✉</sup>  
Sung Yuen Jung<sup>1</sup>, Moon Saeng Kim<sup>2</sup> and Chul Kim<sup>1,✉</sup>

<sup>1</sup> 부산대학교 기계기술연구원 (Research Institute of Mechanical Technology, Pusan National Univ.)

<sup>2</sup> 부산대학교 기계공학부 (School of Mechanical Engineering, Pusan National Univ.)

✉ Corresponding author: chulki@pusan.ac.kr, Tel: 051-510-2489

Manuscript received: 2010.11.8 / Accepted: 2011.1.28

*An internal lobe pump is suitable for oil hydraulics of machine tools, automotive engines, compressors, constructions and other various applications. In particular, the pump is an essential machine element of an automotive engine to feed lubricant oil. The subject of this paper is the theoretical analysis of internal lobe pump whose the main components are the rotors: usually the outer one is characterized by lobe with multiple profile(ellipse1, involute and ellipse2) shapes, while the inner rotor profile is determined as conjugate to the other. Also, the design of outer rotor depends on new applications with removing carryover phenomenon. The system generates new lobe profile and calculates automatically the flow rate and flow rate irregularity according to the lobe profile generated. In order to obtain rotor shapes in performance and to find optimize the design parameters, a Taguchi method is proposed in this paper. Results obtained from the analysis enable the designer and manufacturer of oil pump to be more efficient in this field.*

Key Words: Combined Profile Lobe (조합형상), Carryover (이행), Internal Lobe Pumps (내부로버 펌프), Flow Rate (유량), Irregularity (맥동), Taguchi Method (다구찌 법)

### 기호설명

A = Contact point on the lobe curvature along polar reference axis

A' = Contact point

b = rotor width

C = the curvature center of the first outer rotor lobe

C<sub>3</sub> = the curvature center of the third outer rotor lobe

C<sub>inv</sub> = the curvature center of involute gear

d = distance between the curvature center of the first elliptical lobe and its center along polar reference

axis

d<sub>3</sub> = distance between the curvature center of the third elliptical lobe and its center along polar reference axis

d<sub>inv</sub> = distance between the curvature center of involute and its center along polar reference axis

e = distance between the centers of the inner rotor and the outer rotor

k = the major-minor axis ratio of ellipse for the first elliptical lobe

k<sub>3</sub> = the major-minor axis ratio of ellipse for the third

elliptical lobe

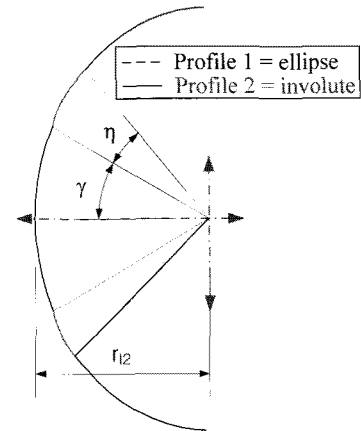
- $O_2$  = the curvature center of the outer rotor lobe
- $r_{12}$  = radius of curvature of the first elliptical lobe along polar reference axis
- $r_{12,3}$  = radius of curvature of the third elliptical lobe along polar reference axis
- $r_b$  = radius of base circle of involute curvature
- $r_1$  = pitch radius of the inner rotor
- $r_2$  = pitch radius of the outer rotor
- $z_1$  = number of the inner rotor teeth
- $z_2$  = number of the outer rotor teeth
- $\alpha$  = rotate angle of outer rotor
- $\text{inv}\alpha$  = involute angle
- $\gamma$  = starting angle of involute in outer rotor
- $\eta$  = range angle of involute in outer rotor
- $\theta$  = rotate angle for lobe profile

### 1. 서론

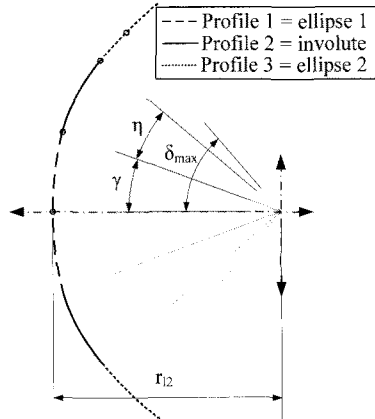
오일 펌프(oil pump)는 다른 펌프에 비하여 소음이 적어 엔진 윤활을 위한 윤활유의 공급원이나 자동 변속기의 유압원으로 널리 사용되고 있다. Colbourne<sup>1</sup> 은 내부 로터와 외부 로터의 접촉을 시뮬레이션 하여 내부 로터 치형의 좌표를 구하고 내부 로터와 외부 로터의 치형곡선으로 폐쇄되는 챔버에서의 면적을 계산하였다. Sae-gusa<sup>2</sup> 등은 내부 로터를 고정시키고 외부 로터를 회전시켜 외부 로터의 치형인 원호의 중심에 대한 궤적을 구하고, 내부 로터와 외부 로터의 물림 특성으로부터 내부 로터의 치형을 구하는 식을 유도하였다. 최근 Tsay<sup>3,4</sup> 는 절삭과정을 시뮬레이션 하여 내부 로터의 치형을 구하는 방법을 발표하였다. 이성철<sup>5</sup> 등은 운전 특성의 해석을 실시하였고 Mimmi<sup>6</sup> 등은 인벌루트 기어 펌프와 로버 펌프의 유량과 유량 맥동 값을 비교 고찰하였다. 김충연<sup>7</sup> 등은 제로터 설계변수에 따른 접촉응력의 변화를 관찰하였다. 또한 김철<sup>8-11</sup> 등은 지로터 펌프인 트로코이드의 치형에 관한 외부로터의 치형형상이 원, 타원이 아닌 타원-인벌루트 조합인 경우에 치형방정식을 유도하는 새로운 방법을 제안하고 이를 토대로 내외부로터의 궤적, 접촉점의 궤적, 회전시뮬레이션, 유량 및 유량맥동 등을 자동으로 구하는 통합적 시스템을 구축했다. 타원-인벌루트 로버형상은 Fig. 1(a)와 같이 하나의 타원을 모체로 하여 일정구간에 인벌루트를 삽입하는 방식이다. 따라서 타원과

인벌루트가 만나는 점에서 곡선의 불연속성이 나타나며, 이로 인해 소음 증가 및 내구성 감소등의 문제가 발생하게 된다.

본 연구에서는 타원-인벌루트 조합 시 발생하는 불연속점을 방지하기 위해 타원 1-인벌루트-타원 2 로 구성된 외부로터 로버(lobe)형상을 사용한 제로터 설계방법을 제안하고자 한다. 설계변수에 대한 내·외부로터 간 접촉점 구성방정식을 창출하였으며, 설계된 내부 로터 형상과 외부 로터의 로버형상을 이용하여 캐리오버(Carryover)가 발생하지 않도록 외부로터를 설계하였다. 또한 제안한 제로터의 설계방법으로 내외부로터의 최적설계를 위해 펌프성능인자(pump performance parameters)중 유량(flowrate)과 유량맥동(flowrate irregularity)에 대하여 실험계획법을 수행하였다.



(a) Lobe profile of ellipse-involute



(b) Lobe profile of ellipse1-involute-ellipse2

Fig. 1 Comparison between the previous lobe profile and a new lobe profile

## 2. 내·외부로터 접촉점을 이용한 내부로터 설계<sup>6</sup>

제로터 펌프의 외부 로터 잇수는 내부로터의 개수 보다 한 개가 많으므로 내·외부로터의 피치 원 반경은 식(1)과 같다.

$$r_1 = ez_1, r_2 = ez_2 \quad (1)$$

외부로터의 로버형상이 외부로터 중심점(O<sub>2</sub>)을 기준으로 α<sup>i</sup> 만큼 회전한 경우, 내·외부 로터의 접촉점(A')은 피치점(P)을 연결한 직선은 내부 로터의 법선이 된다. Fig. 2 와 같이 외부 로터의 로버형상이 원인 경우, 피치점과 접촉점을 연결한 선상에 외부 로터 로버형상의 중심점이 있으므로 내·외부 로터의 접촉점(A')은 식 (2)와 같다.

$$A' = \begin{Bmatrix} x_p(\alpha^i) \\ y_p(\alpha^i) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} d \cos \alpha^i - \frac{r_{12}}{m} (d \cos \alpha^i - r_2) \\ d \sin \alpha^i - \frac{r_{12}}{m} d \sin \alpha^i \end{pmatrix} \quad (2)$$

여기서,  $m = \sqrt{r_2^2 + d^2 - 2r_2d \cos \alpha^i}$ .

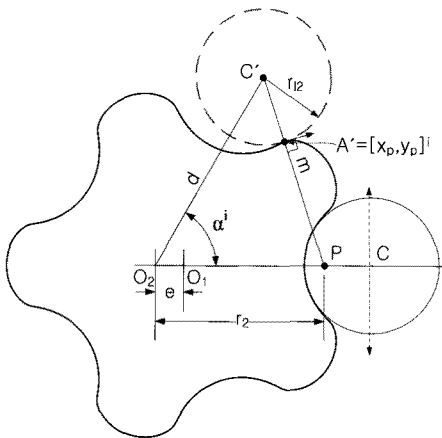


Fig. 2 Conjugated profile tracing for circle

그러나 Fig. 3 과 같이 외부로터의 로버형상이 원이 아닌 경우에는 피치점과 접촉점을 연결한 선상에 외부로터 로버형상의 중심점이 있지 않으므로 식 (2)를 사용할 수 없다.

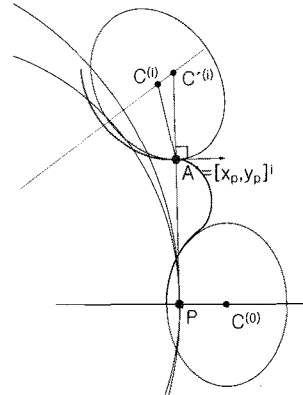


Fig. 3 Conjugated profile tracing for ellipse

이에 본 연구에서는 세가지 형상을 조합한 로버형상에 대한 접촉점 구성방정식을 뉴턴-랩슨 (Newton-Rapson)법을 이용하여 구했다.

### 2.1 세가지 형상의 로버 조합

Fig. 4 에 타원 1-인벌루트-타원 2 의 세가지 형상으로 조합된 외부 로터의 로버형상을 나타내었다. 각 구간의 시작점과 끝점은 식 (3)과 같이 표현하였다. 타원 1-인벌루트-타원 2 세가지 형상을 가지는 외부로터의 로버 형상은 먼저 타원 1 을 결정하며, 이에 대한 설계 변수는 외부로터의 중심과 타원의 중심점까지 거리(d), 장단축비(k) 및 단축길이(r<sub>12</sub>)이다. 다음 형상인 인벌루트는 타원 1 의 형상을 이용하여 결정하고 타원에서 인벌루트를 삽입할 구간은 시작각(δ<sub>ellipse</sub> = γ)일 때의 타원상의 점 P<sub>11</sub> 과 끝각(δ<sub>ellipse</sub> = γ + η)일 때의 점 P<sub>12</sub> 사이 이다.

$$P_{ij}, \begin{cases} i = \text{profile number} \\ j = \text{boundary point} \end{cases} \quad (3)$$

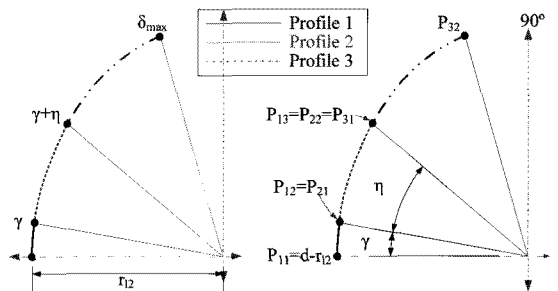
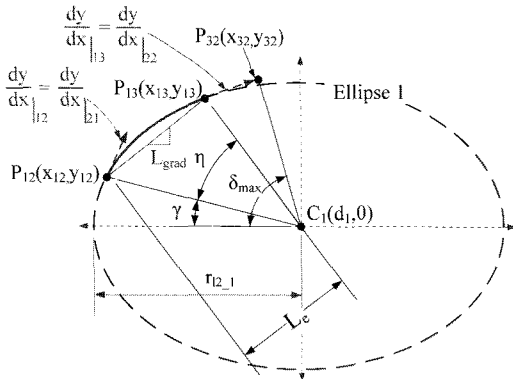
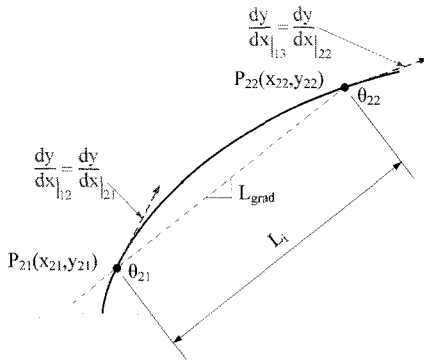


Fig. 4 Conjugated lobe profile for new rotor

Fig. 5 에 인벌루트에 대한 변수를 나타내었다. 타원 1에서 이 두 점을 잇는 선분 길이는  $L_e$ , 기울기는  $L_{grad}$ 이며, 이 구간에 삽입될 인벌루트의 선분 길이  $L_i$ , 기울기는 타원의 기울기와 동일한  $L_{grad}$ 가 된다.



(a) Conjugated profile for ellipse



(b) Conjugated profile for involute

Fig. 5 Conjugated lobe profiles for ellipse1 and involute

두 점  $P_{11}$ 와  $P_{12}$ 을 이용하여 타원과 조합할 인벌루트의 크기는 식(4)로 결정된다. 또한 Fig. 6과 같이  $factor_{rb}$ 가 1인 경우에는  $P_{13} = P_{22}$ 가 되며  $factor_{rb}$ 가 1보다 큰 경우는 타원 1보다 폭률이 크며,  $factor_{rb}$  1보다 작은 경우는 작게 된다.

$$r_{b,new} = factor_{rb} \times \left( \frac{L_e}{L_i} \right) \quad (4)$$

인벌루트와 factor가 결정되면  $P_{21} = P_{12}$ 가 되기 위한 인벌루트의 좌표변환 그리고  $P_{22} = P_{31}$ 이 되기 위한 경계조건을 이용하여 타원 2를 결정한다. [부록 A1 참조]

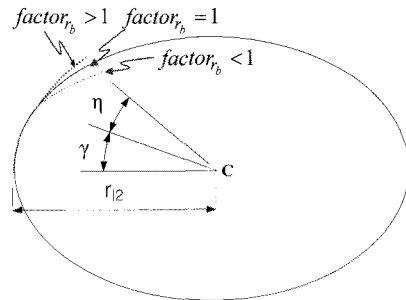


Fig. 6 Scale factor of involute for lobe profile

## 2.2 Newton Rapson 법을 이용한 접촉점 구성 방정식

외부로터의 로버 형상이 타원 또는 인벌루트인 경우는 원의 경우와는 달리 접촉점에서의 법선이 타원 또는 인벌루트의 중심점을 향하지 않는다. 그러므로 Fig. 7에서와 같이 피치점  $P$ 를 시계방향(CW)으로 각도  $\alpha$ 만큼 회전시킨 점  $P'$ 와 타원 또는 인벌루트 형상 위의 점을 연결하면서  $\theta_{cir}$  또는  $\theta_{inv}$ 를 뉴턴-랩슨법을 이용하여 구한다. 이를 이용하여 점  $A$ 를 구하고 외부로터 중심점을 기준으로 반시계방향으로  $\alpha$ 만큼 회전하여 접촉점  $A'$ 의 좌표를 구할 수 있다. [부록 A2 참조]

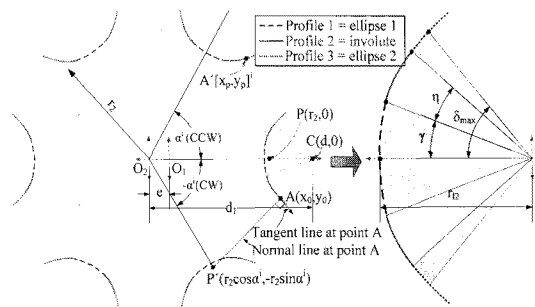


Fig. 7 Conjugated profile tracing for the new rotor point equation

## 2.3 접촉점을 이용한 내부로터 설계

Fig. 8에서와 같이 접촉점,  $A'$ 로부터 내부로터의 궤적점  $R(x_{in}, y_{in})$ 은 식 (5)로 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x_{in} \\ y_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha' & -\sin \alpha' \\ \sin \alpha' & \cos \alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c - e \\ y_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

여기에서  $\alpha'$ 는  $\alpha \left( 1 - \frac{r_2}{r_1} \right)$ 이다.

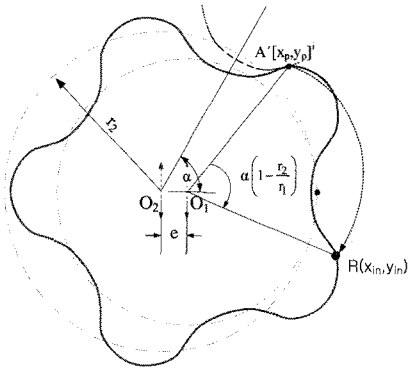


Fig. 8 Profile tracing for tri-choid shape

### 3. 캐리오버 현상을 극복하는 외부로터 설계

내·외부로터 접촉점을 이용하여 내부로터를 설계하는 방법은 Fig. 9 와 같이 캐리오버 현상이 발생한다. 이러한 캐리오버 현상으로 인해 고압 포터에서 저압포터로의 유체 이송 시 형상오차만큼 체적 손실이 발생하여 펌프의 체적 효율이 떨어진다.

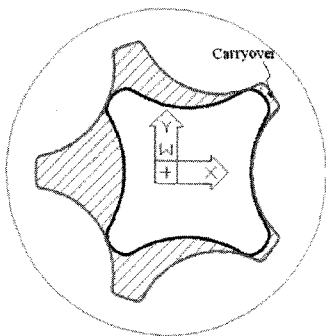


Fig. 9 Traditional design of gerotors

이러한 캐리오버 현상을 극복하기 위하여 내부로터의 곡률의 형상을 이용하여 외부로터의 형상설계를 수행한다. 외부로터 잇수가  $Z_2$  라 하면, 내부로터의 곡률반경이 최대가 되는 경우는 Fig. 10 에서와 같이 내부로터가 외부로터의 중심으로부터 회전각이 식 (6)과 같이 되는 경우이다. 이 때 내부로터 치형은 외부로터의 치저경에 완전히 들어가게 된다.

$$\alpha = \frac{\pi}{z_2} \rightarrow \text{contact point : } (x_c, y_c) \quad (6)$$

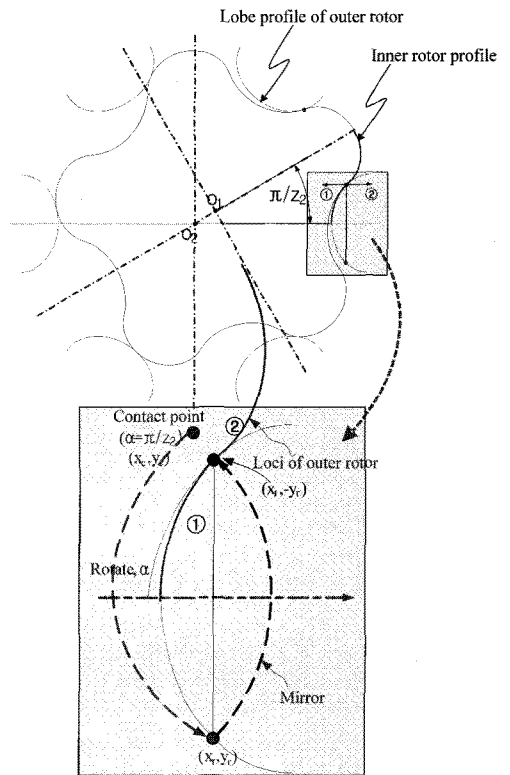


Fig. 10 The new design method of outer rotor

따라서, 본 연구에서 외부로터의 치저경 (dedendum)은 입력한 로버형상으로 구성하고 캐리오버형상이 발생하는 치선경(addendum)은 회전된 내부로터 형상을 이용하여 외부로터의 형상을 설계하였다. Fig. 10 는 외부로터의 형상 설계 예를 나타내었다. ①구간은 치저경 부분으로 외부로터의 로버형상으로 구성되고, ②구간은 치선경 부분으로 내부로터를 외부로터의 중심을 기준으로 식 (6)만큼 회전한 형상으로 구성된다. ① 및 ②구간의 경계점은 식 (7)과 같다.

$$\begin{pmatrix} x_r \\ -y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{z_2} & -\sin \frac{\pi}{z_2} \\ \sin \frac{\pi}{z_2} & \cos \frac{\pi}{z_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ -y_c \end{pmatrix} \quad (7)$$

Fig. 11 은 본 연구에서 제안한 방법으로 설계된 외부로터의 형상으로 캐리오버 현상이 발생하지 않음을 알 수 있다.

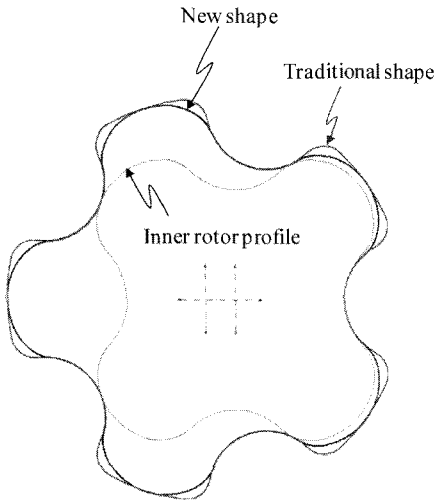


Fig. 11 Schematic drawing of outer rotor by new method

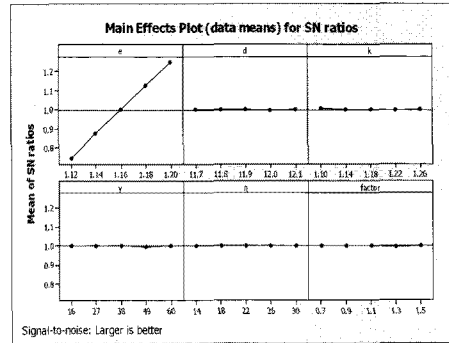
4. 적용 및 고찰

타원 1-인벌루트-타원 2 형상으로 조합된 로브 형상의 최적 설계를 위해 다구찌법을 이용하였다. Table 1 에 설계 인자 및 인자별 각 수준값을 나타내었다.

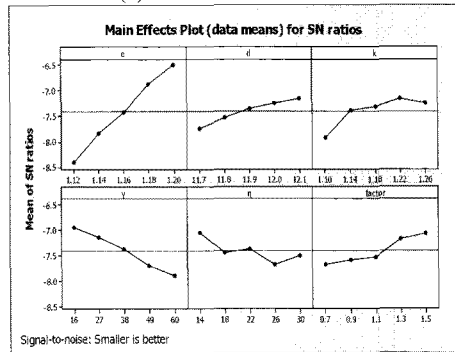
Table 1 Specification of teeth profiles

Design parameters	Factor Levels				
e	1.17	1.175	1.18	1.185	1.19
d	12	12.02	12.04	12.06	12.08
k	1.08	1.1	1.12	1.14	1.16
$\gamma$	52	54	56	58	60
$\eta$	20	21.25	22.5	23.75	25
f	0.9	1.05	1.2	1.35	1.5

Table 1 의 설계인자에 대한 직교배열표를 작성하고, 직교배열표의 각 경우에 대해 설계 자동화 프로그램을 이용하여 치형을 창출하고 유량 및 유량맥동을 목적함수로 하여 분산분석을 수행하였다. Fig. 12 에 유량 및 유량맥동에 대한 분산분석 결과를 나타내었다. Fig. 12(a)는 유량에 대한 분산분석 결과로 설계 인자 중 편심량(e)이 유량에 대한 영향도가 가장 크며, 편심량이 클수록 유량이 좋아짐을 알 수 있다. 또한, Fig. 12(b)는 유량맥동에 대한 분산분석 결과로 편심량과 외부로터 중심과 로버형상의 중심간의 거리(d)가 클수록 유량맥동이 좋아짐을 알 수 있다.



(a) SN ratio for flowrate



(b) SN ratio for flowrate irregularity

Fig. 12 Analysis of flow rate irregularity

또한 유량 및 유량 맥동에 대한 영향도가 가장 좋은 설계 인자를 구하여 Table 2 에 나타내었다.

Table 2 Specification of teeth profiles

Index	e	d	k	n2	$\gamma$	$\eta$	f	q	i
Rotor1-1	1.16	12.08	1.163	2.42	56.7	25	2	0.972	97.22
Rotor1-2	1.16	12	1.16	2.34	60	20	2	0.972	97.21
Rotor1-3	1.18	12.08	1.138	2.46	53	20	0.9	0.93	97.69
Rotor1-4	1.18	12.08	1.12	2.46	60	25	1.2	0.977	97.66

Table 2 의 사양으로 제작된 4 개의 시제품에 대한 성능테스트 결과를 Fig. 13 에 나타내었으며, 20Hr 유량 및 효율 측면에서 Rotor 1-4 이 가장 우수함을 알 수 있다. 또한 외부로터 형상이 타원-인벌루트일 때와 본 연구에서 제안한 타원 1-인벌루트-타원 2 일 때를 비교하여 그 결과를 Table 3 에 시제품 사진을 Fig. 14 에 나타내었다.

Fig. 13 에서와 같이 본 연구에서 제안한 Rotor 1-4 가 유량과 유량맥동 면에서 기존의 타원-인벌루트 치형보다 우수함을 알 수 있다.

Table 3 Comparison of results between previous and new gerotors

Product	Z <sub>2</sub>	e	d	η <sub>2</sub>	k	γ	η	factor	Flow rate(l/hr)	Irregularity(%)
(a) ellipse-involute	10	1.15	11.93	2.25	1.21	0°	20°	-	198.7	2.29
(b) ellipse-involute-ellipse2		1.18	12.08	2.46	1.12	60°	25°	1.2	210.0	2.27

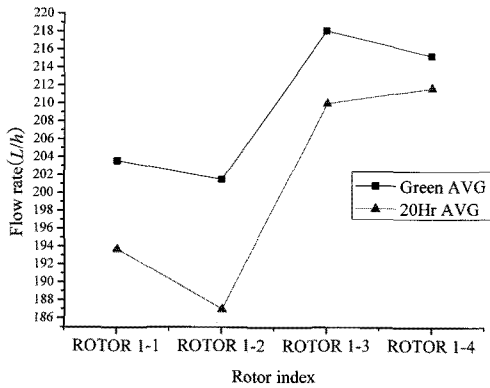
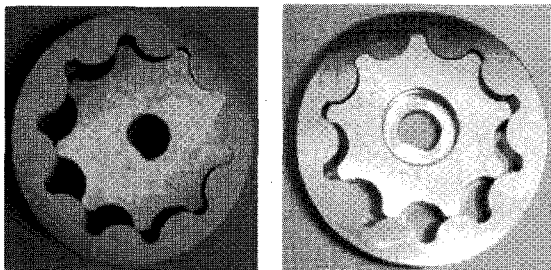


Fig. 13 Test results of variable profiles



(a) ellipse-involute gerotor (b) ellipse1-involute- ellipse2

Fig. 14 Photographs of previous and new gerotors

5. 결론

본 연구에서는 타원 1-인벌루트-타원 2 로 조합된 로버형상을 가지는 외부 로터의 기하학적인 분석과 운동학적인 분석을 통하여 로터에 관한 구성방정식을 제안하였다.

구성방정식을 토대로 최고의 유량과 최저의 유량맥동을 가지는 로터를 설계하기 위해 실험계획법을 수행하였으며, 최적 설계된 로터에 대한 시험을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 세가지형상(타원 1-인벌루트-타원 2)의 조합된 로버형상을 가진 외부로터를 이용한 제로터 설계 방법을 제안하였다.
- 2) 타원-인벌루트 조합 방법에서 발생하는 경

계점에서의 곡선의 불연속성 문제점을 해결하기 위해 경계점에서 각 형상에 대한 순간기울기를 이용하여 조합함으로써 곡선의 불연속성이 발생하지 않도록 하였다.

3) 외부로터 치저경에 발생하는 Carryover 현상을 방지하는 외부로터 설계 방법을 제안하였다.

4) 서로 다른 세가지지를 조합한 로버형상은 현재 디젤 승용차에 사용중인 로터보다 성능이 더 우수함을 알 수 있었다.

따라서 본 연구를 토대로 타원 1-인벌루트-타원 2 의 세가지 형상 이외에 다른 형상도 적용이 가능하며, 곡률형상에 따른 특성을 연구하여 다양한 형상을 조합 하는 새로운 제로터 개발에 크게 기여할 것으로 사료된다.

후 기

본 연구는 교육과학기술부와 한국산업기술진흥원의 지역혁신인력양성사업으로 수행된 연구결과임. 또한 본 결과물은 산업자원부의 대학전력연구센터 지원사업의 연구결과입니다.

참고문헌

1. Colbourne, J. R., "Gear Shape and Theoretical Flow Rate in Internal Gear Pumps," Transactions of the CSME, Vol. 3, No. 4, pp. 215-223, 1975.
2. Saegusa, Y., Urashima, K., Sugimoto, M., Onoda, M. and Koiso, T., "Development of Oil-Pump Rotors with a Trochoidal Tooth Shape," SAE Paper, No. 840454, 1984.
3. Tsay, C. B. and Yu, C. Y., "Mathematical Model for the Profile of Gerotor Pumps," J. CSME, Vol. 10, No. 1, pp. 41-47, 1989.
4. Yu, C. Y. and Tsay, C. B., "The Mathematical Model of Gerotor Pump Applicable to Its Characteristic Study," J. CSME, Vol. 11, No. 4, pp. 385-391, 1990.
5. Lee, S. C. and Lee, S. N., "Design and Analysis of

Gerotor for Hydraulic Motors,” Journal of KSTLE, Vol. 11, No. 2, pp. 63-70, 1995.

6. Mimmi, G. C. and Pennacchi, P. E., “Involute Gear Pumps Versus Lobe Pumps: A Comparison,” J. of Mechanical Design, Vol. 119, No. 4, pp. 458-465, 1997.

7. Kim, C. H., Kim, D. I., Ahn, H. S. and Chong, T. H., “Analysis of Tooth Contact Stress of Gerotor Hydraulic Motors,” J. of KSTLE, Vol. 15, No. 2, pp. 164-170, 1999.

8. Kim, J. H. and Kim, C., “Development of an Integrated System of Automated Design of Gerotor Oil Pump,” J. of KSPE Vol. 23, No. 2, pp. 88-96, 2006.

9. Kim, J. H., Kim, C. and Chang, Y. J., “Optimum Design on Lobe Shapes of Gerotor Oil Pump,” J. of Mechanical Science and Technology, Vol. 20, No. 9, pp. 1390-1398, 2006.

10. Chang, Y. J., Kim, J. H., Jeon, C. H., Kim, C. and Jung, S. Y., “Development of an Integrated System for the Automated Design of a Gerotor Oil Pump,” J. of Mechanical Design, Vol. 129, No. 10, pp. 1099-1105, 2007.

11. Colbourne, J. R., “The Geometry of Involute Gears,” Springer, pp. 24-44, 1987.

부 록

A1. 인벌루트 형상의 좌표변환 및 타원 2 결정

타원 1 과의 조합을 위해 인벌루트 형상의 좌표축을 식 (A1)을 이용하여 이동시킨다.

$$C'_{inv} = \begin{pmatrix} cx_{inv} + \Delta x \\ cy_{inv} + \Delta y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} - x_{21} \\ y_{12} - y_{21} \end{pmatrix} \quad (A1)$$

좌표축 이동 후의 인벌루트 궤적은 식 (A2)와 같다.

$$\begin{cases} x_{inv,new} = r_{b,new}(\sin \theta_{inv} - \theta_{inv} \cos \theta_{inv}) + \Delta x \\ y_{inv,new} = r_{b,new}(\cos \theta_{inv} - \theta_{inv} \sin \theta_{inv}) + \Delta y \end{cases} \quad (A2)$$

인벌루트와 조합될 타원 2 의 형상은 인벌루트의 끝 점인  $P_{22}$  에서 인벌루트 접선기울기와 타원 2 의 접선기울기가 같고 타원 2 의 중심이 X 축 선상에 있도록 식 (A3)~(A6)을 이용하여 결정한다.

$$\frac{dy}{dx}_{(P_{31})_{ellipse}} = \frac{1}{k_3} \cot \theta_{31}, \theta_{31} = \tan^{-1}(\tan \theta_{22}) \quad (A3)$$

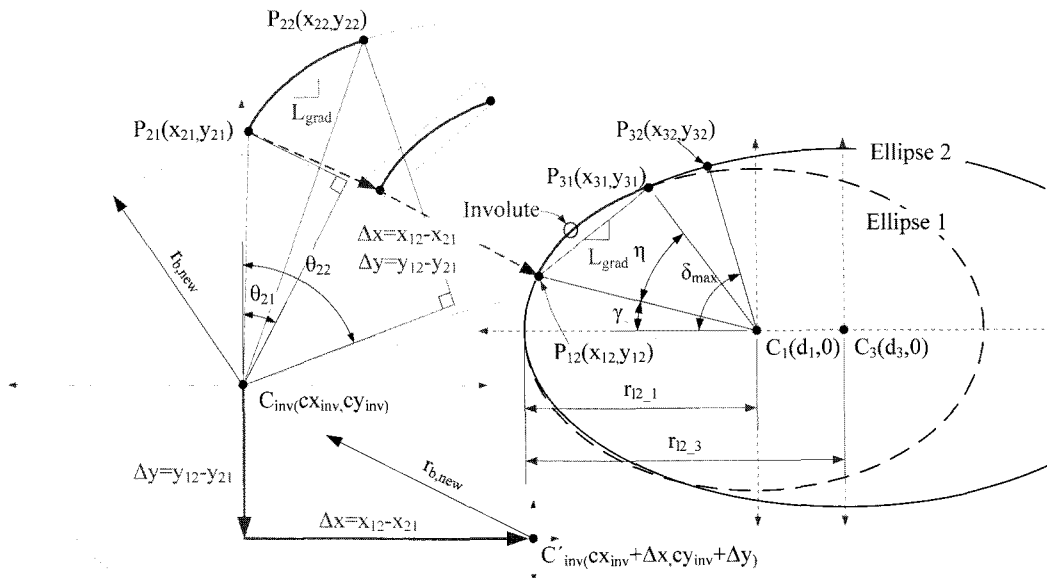


Fig. A1 Lobe profile for combining three different curvatures



$$k_3 = \sqrt{\cot \theta_{22} \frac{y_{22}}{x_{22}}} \quad (A4)$$

$$r_{12,3} = \frac{x_{22}}{\cos \theta_{31}} \quad (A5)$$

$$d_3 = r_{12,3} \times \cos \theta_{31} + x_{22} \quad (A6)$$

$$f(\theta) = (k^2 - 1)r_{12} \sin \theta - (r_2 \cos \alpha - d) \tan \theta - kr_2 \sin \alpha \quad (A14)$$

$$f'(\theta) = (k^2 - 1)r_{12} \cos \theta - (r_2 \cos \alpha - d) \sec^2 \theta \quad (A15)$$

접촉점 A'의 좌표는 점 A를 반 시계방향으로 α만큼 회전한 점이므로 식(A16)으로 구할 수 있다.

**A2. Newton Rapson 법을 이용한 접촉점 구성 방정식**

타원의 매개변수 방정식 (A7)에 대한 접선의 기울기는 식 (A8)과 같으며, 법선의 기울기는 식 (A9)와 같다.

$$A' = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d - r_{12} \cos \theta \\ -kr_{12} \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha (d - r_{12} \cos \theta) + kr_{12} \sin \alpha \sin \theta \\ \sin \alpha (d - r_{12} \cos \theta) - kr_{12} \cos \alpha \sin \theta \end{pmatrix} \quad (A16)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d - r_{12} \cos \theta \\ -kr_{12} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (A7)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{-kr_{12} \cos \theta}{r_{12} \sin \theta} = -k \cot \theta \quad (A8)$$

$$-\frac{1}{f'(\theta)} = -(-k \cot \theta)^{-1} = \frac{1}{k} \tan \theta \quad (A9)$$

본문의 Fig. 5에서 점 A와 점 P의 좌표는 각각 식 (A10) 및 식 (A11)과 같고  $\overline{AP}$ 와  $\overline{AC'}$ 의 기울기가 같으므로 식 (A12)의 관계식이 성립한다.

$$A = (d - r_{12} \cos \theta, -kr_{12} \sin \theta) \quad (A10)$$

$$P = (r_2 \cos \alpha, -r_2 \sin \alpha) \quad (A11)$$

$$\frac{-kr_{12} \sin \theta + r_2 \sin \alpha}{d - r_{12} \cos \theta - r_2 \cos \alpha} = \frac{1}{k} \tan \theta \quad (A12)$$

식(A12)에서 Newton-Rapson 법으로 구한 θ를 식 (A10)에 대입하면 식(A13)을 얻을 수 있다.

$$(k^2 - 1)r_{12} \sin \theta - (r_2 \cos \alpha - d) \tan \theta = kr_2 \sin \alpha \quad (A13)$$

주어진 α에서 변수 θ에 대한 f(θ) 및 f'(θ)를 식 (A14)와 식 (A15)로 각각 정의하고