Journal of the Korean Data & Information Science Society
2011, **22**(3), 505–513

한국데이터정보과학회지

후진 미분 연산자를 이용한 이산확률분포의 적률 유도

조길호[1]

[1]경북대학교 통계학과

접수 2011년 4월 26일, 수정 2011년 5월 18일, 게재확정 2011년 5월 23일

요 약

본 논문의 목적은 후진 미분 연산자를 이용하여 이산확률분포에 대한 원점으로부터의 r차 적률을 구하는 공식을 유도한다. 이 공식을 이용함으로써 r차 적률은 0에서 계산된 x^r의 r번째 후진 미분 연산자까지의 일차결합으로써 계산됨을 알 수 있다.

주요용어: 이산확률분포, 적률, 후진 미분 연산자.

1. 서론

대부분의 확률분포에 대한 적률은 잘 알려져 있고, 또한 그들의 공식도 문헌에서 이용할 수 있다 (Johnson과 Kotz, 1971; Kellison, 1975; Lindgren, 1976; Rao, 1955; Saran과 Pushkarna, 1999; Urbanik, 1999). 그러나 이들 공식의 유도는 다루기가 어려울 정도로 아주 복잡하고 어려운 경우도 있다.

이산확률분포에 대한 적률의 유도는 유한 미분 연산자 (finite difference operator)를 사용하여 아주 명확하게 표현할 수 있다. 유한 미분 연산자에 의해서 이루어지는 것은 $n+1$항이나 무한개 항의 합을 r개의 항의 합으로 전환하는 것이다.

Link (1981)는 전진 미분 연산자 (forward difference operator)를 이용하여 이산확률분포의 적률을 계산하였고, Beda (1982)는 확률재생함수 (probability generating function)를 이용하여 이산확률분포의 적률을 유도하였다.

본 연구에서는 후진 미분 연산자 (backward difference operator)를 이용하여 이산확률분포의 적률을 계산하고자 한다. 또한, 많이 응용되고 잘 알려진 이산확률분포인 이항분포, 포아송분포, 기하분포, 초기하분포, 음초기하분포에 대해 적용해 보고자 한다.

2. 유한 미분 연산자

연산자 E는 함수의 독립변수를 1만큼 증가 시키는 것으로 정의한다. 즉,

$$Ef(x) = f(x+1).$$

일반적으로 임의의 양의 자연수 n에 대해서

$$E^n f(x) = f(x+n).$$

[1] (702-701) 대구광역시 북구 산격동 1370번지, 경북대학교 통계학과, 교수. E-mail: khcho@knu.ac.kr

전진 미분 연산자 $\triangle$는

$$\triangle\ f(x) = f(x+1) - f(x)$$

로 정의한다. 따라서

$$f(x+1) - f(x) = Ef(x) - f(x) = (E-1)f(x)$$

이므로

$$\triangle \equiv E - 1 : E \equiv 1 + \triangle$$

가 성립한다. 만약 n이 양의 자연수라면,

$$\begin{aligned}\triangle^n\ f(x) &= (E-1)^n f(x)\\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j E^{n-j} f(x)\\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j f(x+n-j)\end{aligned}$$

이다. 후진 미분 연산자 $\triangledown$는

$$\triangledown f(x) = f(x) - f(x-1) = (1 - E^{-1}) f(x)$$

로 정의한다. 전진 미분 연산자와 유사하게 임의의 양의 자연수 n에 대해서

$$\begin{aligned}\triangledown^n f(x) &= (1 - E^{-}1)^n f(x)\\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j f(x-j)\end{aligned}$$

이다. 따라서 조합에 대해 적용하면

$$E\binom{x}{k} = \binom{x+1}{k} : \triangle \binom{x}{k} = \binom{x}{k-1} : \triangledown \binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1}$$

이 된다. 일반적으로 양의 자연수 n에 대해서

$$E^n\binom{x}{k} = \binom{x+n}{k} : \triangle^n \binom{x}{k} = \binom{x}{k-n} : \triangledown^n \binom{x}{k} = \binom{x-n}{k-n}$$

이다.

$x = 0$에서 계산된 0의 후진 미분 연산자는 $\triangledown^j O^r = \triangledown^j x^r$로 표현된다.

4차 적률까지를 구하기 위해 필요한 0의 후진 미분 연산자 $\triangledown^j O^r$는 표 2.1과 같다. $j = 0$ 혹은 $j > r$일 때 $\triangledown^j O^r = 0$이다.

표 **2.1** $\nabla^j O^r$의 값

j	r			
	1	2	3	4
1	1	-1	1	-1
2	0	2	-6	14
3	0	0	6	-36
4	0	0	0	24

3. 적률 유도

원점에 대한 r차 적률의 일반적인 표현을 살펴보자. 이 표현에서 j는 j번째 결과를 나타내며, P_j는 j번째 결과의 확률을 나타낸다.

모든 유도식에서 처음 단계는 j^r을 $(-1)^r E^{-j} O^r$로 대치하여 원점에 대한 r차 적률의 유도는

$$\mu_r' = \sum_{j=0}^{\infty} P_j (-1)^r E^{-j} O^r$$

을 계산하는 것이다.

3.1. 이항분포

$$\begin{aligned}
P_j &= \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, j = 0, 1, \cdots, n, q = 1 - p. \\
\mu_r' &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} j^r \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} (-1)^r E^{-j} O^r \\
&= (q + pE^{-1})^n (-1)^r O^r \\
&= (q + pE^{-1})^n (-1)^r O^r \\
&= (1 - p\nabla)^n (-1)^r O^r \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-p)^j \nabla^j (-1)^r O^r \\
&= \sum_{j=0}^{r} \binom{n}{j} p^r (-1)^r + j \nabla^j O^r.
\end{aligned}$$

첫 두 개의 적률은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\mu_1' &= \binom{n}{1} p^1 (-1)^1 + 1\nabla^1 O^1 = np, \\
\mu_2' &= \binom{n}{1} p^1 (-1)^2 + 1\nabla^1 O^2 + \binom{n}{2} p^2 (-1)^2 + 2\nabla^2 O^2 \\
&= np + n(n-1)p^2.
\end{aligned}
$$

3.2. 포아송분포

$$
\begin{aligned}
P_j &= \frac{e^{-\mu}\mu^j}{j!}, j = 0,\ 1,\ \cdots . \\
\mu_r^{'} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-\mu}\mu^j}{j!} \right) j^r \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-\mu}\mu^j}{j!} \right) (-1)^r E^{-j} O^r \\
&= e^{-\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(\mu E^{-1})^j}{j!} \right] (-1)^r O^r \\
&= e^{-\mu} e^{\mu E^{-1}} (-1)^r O^r \\
&= e^{-\mu\nabla} (-1)^r O^r \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-\mu\nabla)^j}{j!} \right] (-1)^r O^r \\
&= \sum_{j=0}^{r} \frac{\mu^j}{j!} (-1)^{r+j} \nabla^j O^r.
\end{aligned}
$$

첫 두 개의 적률은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\mu_1' &= \frac{\mu^2}{1} (-1)^1 + 1\nabla^1 O^1 = \mu; \\
\mu_2' &= \frac{\mu^1}{1!} (-1)^2 + 1\nabla^1 O^2 + \frac{\mu^2}{2!} (-1)^2 + 2\nabla^2 O^2 = \mu + \mu^2.
\end{aligned}
$$

3.3. 기하분포

$$
P_j = pq^{j-1},\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ q = 1 - p.
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_r^{'} &= \sum_{j=1}^{\infty} pq^{j-1}j^r \\
&= \frac{p}{q}\sum_{j=1}^{\infty} q^j(-1)^r E^{-j}O^r \\
&= \frac{p}{q}\sum_{j=1}^{\infty} q^j(1-\triangledown)^j(-1)^r O^r \\
&= \frac{p}{q}\sum_{j=1}^{\infty} q^j \sum_{s=1}^{j}\binom{j}{s}(-\triangledown)^s(-1)^r O^r \\
&= \frac{p}{q}\sum_{j=1}^{\infty} q^j \sum_{s=1}^{j}\binom{j}{s}(-1)^{r+s}\triangledown^s O^r \\
&= \frac{p}{q}\sum_{s=1}^{r}\sum_{j=1}^{\infty} q^j \binom{j}{s}(-1)^{r+s}\triangledown^s O^r \\
&= \frac{p}{q}\sum_{s=1}^{r}\sum_{j=s}^{\infty} q^j \binom{j}{s}(-1)^{r+s}N\triangledown^s O^r \\
&= \frac{p}{q}\sum_{s=1}^{r} q^s(1-q)^{-(s+1)}(-1)^{r+s}\triangledown^s O^r \\
&= \sum_{s=1}^{r}\frac{q^{s-1}}{p^s}(-1)^{r+s}\triangledown^s O^r.
\end{aligned}
$$

첫 두 개의 적률은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\mu_1^{'} &= \frac{q^{1-1}}{p^1}(-1)^{1+1}\triangledown^1 O^1 = \frac{1}{p}; \\
\mu_2^{'} &= \frac{q^{1-1}}{p^1}(-1)^{2+1}\triangledown^1 O^2 + \frac{q^{2-1}}{p^2}(-1)^{2+2}\triangledown^2 O^2 = \frac{1}{p} + \frac{2q}{p^2}.
\end{aligned}
$$

3.4. 초기하분포

$$
P_j = \binom{N}{n}^{-1}\binom{X}{j}\binom{N-X}{n-j}, \ \max(0, n-N+X) \le j \le \min(n,\ X).
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_r' &= \sum_{j=1}^{n} \binom{N}{n}^{-1} \binom{X}{j} \binom{N-X}{n-j} j^r \\
&= \binom{N}{n}^{-1} \sum_{j=1}^{n} \binom{X}{j} \left[\triangle_1^j \binom{N-X}{n-j} \right] [(-1)^r E_2^{-j} O^r] \\
&= \binom{N}{n}^{-1} \sum_{j=1}^{n} \binom{X}{j} (\triangle_1 \ E_2^{-1})^j \binom{N-X}{n} (-1)^r O^r \\
&= \binom{N}{n}^{-1} (1+ \triangle_1 \ E_2^{-1})^X \binom{N-X}{n} (-1)^r O^r \\
&= \binom{N}{n}^{-1} (E_1 - \triangle_1 \nabla_2)^X \binom{N-X}{n} (-1)^r O^r \\
&= \binom{N}{n}^{-1} \sum_{j=1}^{X} \binom{X}{j} E_1^{X-j} (-1)^j \triangle_1^j \nabla_2^j \binom{N-X}{n} (-1)^r O^r \\
&= \binom{N}{n}^{-1} \sum_{j=1}^{X} \binom{X}{j} E_1^{X-j} \ \triangle_1^j \ \binom{N-X}{n} (-1)^{r+j} \nabla_2^j O^r \\
&= \binom{N}{n}^{-1} \sum_{j=1}^{X} \binom{X}{j} \binom{N-j}{n-j} (-1)^{r+j} \nabla_2^j O^r \\
&= \sum_{j=1}^{X} \binom{N}{n}^{-1} \binom{X}{j} \binom{N-j}{n-j} (-1)^{r+j} \nabla_2^j O^r \\
&= \sum_{j=1}^{X} \binom{n}{j} \frac{X^{(j)}}{N^{(j)}} (-1)^{r+j} \nabla_2^j O^r.
\end{aligned}
$$

여기서 첨자 1인 연산자는 N에 영향을 주며, 첨자 2인 연산자는 O^r에 영향을 준다. 또한, $X^{(j)} = X(X-1)\cdots(X-j+1)$이고, $N^{(j)} = N(N-1)\cdots(N-j+1)$이다.

첫 두 개의 적률은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\mu_1' &= \binom{n}{1} \frac{X^{(1)}}{N^{(1)}} (-1)^1 + 1 \nabla_2^1 O^1 = \frac{nX}{N}; \\
\mu_2' &= \binom{n}{1} \frac{X^{(1)}}{N^{(1)}} (-1)^2 + 1 \nabla_2^1 O^2 + \binom{n}{2} \frac{X^{(2)}}{N^{(2)}} (-1)^2 + 2 \nabla_2^2 O^2 \\
&= \frac{nX}{N} + \frac{n(n-1)X(X-1)}{N(N-1)}.
\end{aligned}
$$

3.5. 음초기하분포

$$P_j = \binom{N}{X}^{-1} \binom{j-1}{a-1} \binom{N-}{X-}, \quad a \le j \le N - X + a.$$

$$\begin{aligned}
\mu_r' &= \binom{N}{X}^{-1} \sum_{j=a}^{N-X+a} \binom{j-1}{a-1} \binom{N-j}{X-a} j^r \\
&= \binom{N}{X}^{-1} \sum_{j=a}^{\infty} \binom{j-1}{a-1} E_1^{-j} \binom{N-j}{X-a} E_2^j O^r \\
&= \binom{N}{X}^{-1} \sum_{j=a}^{\infty} \binom{j-1}{a-1} (E_2/E_1)^j \binom{N}{X-a} O^r \\
&= \binom{N}{X}^{-1} \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^a \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+a-1}{a-1} (E_2/E_1)^s \binom{N}{X-a} O^r \\
&= \binom{N}{X}^{-1} [(E_2/E_1)/\left\{1-(E_2/E_1)\right\}]^a \binom{N}{X-} O^r \\
&= \binom{N}{X}^{-1} [E_1^{-1}/(E_2^{-1} - E_1^{-1})]^a \binom{N}{X-a} O^r \\
&= \binom{N}{X}^{-1} [(1-\nabla_1)/(\nabla_1 - \nabla_2)]^a \binom{N}{X-a} O^r \\
&= \binom{N}{X}^{-1} [\{(1-\nabla_1)/\nabla_1\} / \left\{1-(\nabla_2/\nabla_1)\right\}]^a \binom{N}{X-a} O^r \\
&= \binom{N}{X}^{-1} [(E_1^{-1}/\nabla_1)/\left\{1-(\nabla_2/\nabla_1)\right\}]^a \binom{N}{X-a} O^r \\
&= \binom{N}{X}^{-1} \left\{1-(\nabla_2/\nabla_1)\right\}^{-a} \binom{N}{X} O^r \\
&= \binom{N}{X}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a+j-1}{j} (\nabla_2/\nabla_1)^j \binom{N}{X} O^r \\
&= \binom{N}{X}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a+j-1}{j} \nabla_1^{-j} \binom{N}{X} \nabla_2^j O^r \\
&= \binom{N}{X}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a+j-1}{j} \binom{N+j}{X+j} \nabla_2^j O^r \\
&= \sum_{j=1}^{r} \left[\left\{a^{[j]}(N+1)^{[j]}\right\} / \left\{j!(X+1)^{[j]}\right\}\right] \nabla_2^j O^r.
\end{aligned}$$

여기서 첨자 1인 연산자는 N에 영향을 주며, 첨자 2인 연산자는 O^r에 영향을 준다. 또한, $N^{[j]} = N(N+1)\cdots(N+j-1)$이고, $X^{[j]} = X(X+1)\cdots(X+j-1)$을 나타낸다.

첫 두 개의 적률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mu_1' &= \left[\left\{a^{[1]}(N+1)^{[1]}\right\} / \left\{1!(X+1)^{[1]}\right\}\right] \nabla_2^1 O^1 = a(N+1)/(X+1); \\
\mu_2' &= \left[\left\{a^{[1]}(N+1)^{[1]}\right\} / \left\{1!(X+1)^{[1]}\right\}\right] \nabla_2^1 O^2 \\
&\quad + \left[\left\{a^{[2]}(N+1)^{[2]}\right\} / \left\{2!(X+1)^{[2]}\right\}\right] \nabla_2^2 O^2 \\
&= -\,a(N+1)/(X+1) + a(a+1)(N+1)(N+2)/(X+1)(X+2).
\end{aligned}$$

참고문헌

Beda, C. (1982). Derivation of moment formulas by operator valued probability generating functions. *The American Statistician*, **36**, 179-181.

Johnson, N. L. and Kotz, S. (1971). *Discrete distributions*, Houghton Mifflin, Boston.

Kellison, S. G. (1975), *Fundamentals of numerical analysis*, Homewood, Irwin.

Lindgren, B. W. (1976), *Statistical theory*, 3rd ed., Macmillan, New York.

Link, R. F. (1981), Moments of discrete probability distributions using finite difference operators. *The American Statistician*, **35**, 44-46.

Rao, C. R. (1955), *Linear statistical inference and its applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Saran, J. and Pushkarna, N. (1999), Moments of order statistics from doubly truncated linear-exponential distribution, *Journal of the Korean Statistical Society*, **28**, 279-296.

Urbanik, K. (1999), Moments and generalized convolutions. *Probability and Mathematical Statistics*, **19**, 153-169.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2011, **22**(3), 505–513

한국데이터정보과학회지

Derivations of moments for discrete probability distributions using backward difference operators

Kil Ho Cho[1]

[1]Department of Statistics, Kyungpook National Universtity

Received 26 April 2011, revised 18 May 2011, accepted 23 May 2011

Abstract

In this paper, we obtain the derivations of moments of discrete probability distributions by using the backward difference operators. Also, we presents such derivations for several well-known distributions; they are the binomial, Poisson, geometric, hypergeometric and negative hypergeometric distributions.

Keywords: Backward difference operators, discrete probability distributions, moments.

[1] Professor, Department of Statistics, Kyungpook National Universtity, Daegu 702-701, Korea.
E-mail: khcho@knu.ac.kr