韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2011. 4. 제 14권, 제 1호, 69-79

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Apr. 2011, Vol. 14, No. 1, 69-79

초등학교 3, 4, 5학년 학생들의 확률 이해 실태

윤 혜 영 (대전태평초등학교)
이 광 호 (한국교원대학교)[1]

본 연구의 목적은 확률을 학습하지 않은 3, 4, 5학년 학생들의 확률 개념에 대한 이해 수준을 살펴보고, 확률 학습에 대한 가능성을 탐색하는 것이다. 이를 위해 3, 4, 5학년 학생을 대상으로 지필검사를 통한 조사 연구를 실시하였고, 선행연구를 토대로 한 확률 이해 분석의 틀을 분석 기준으로 삼았다. 본 연구의 결과 학생들의 확률 개념 평균 이해 수준은 표본공간에서 가장 높게 나타났고 사건의 확률, 공평성, 확률 비교 순이었으며, 특히 표본공간에 대해 가장 높은 수준을 나타냈고 이러한 결과는 3, 4, 5학년의 공통적인 현상이었다. 반면 학생들의 독립성에 대한 이해 수준은 낮은 편이었고 학년 간에 유의한 수준 차이가 없었으며, 조건부 확률에 대한 이해는 가장 낮았다.

I. 서 론

우리는 다양한 정보가 공존하는 현대 사회를 살아가면서 올바른 판단을 내려야 할 경우에 종종 부딪힌다. 이러한 불확실한 현상에 대한 과학적이고 논리적인 분석을 제시해 줄 수 있는 학문으로 확률의 필요성이 증대되고 있다(우정호, 2007). 또한 확률은 수학적인 개념이지만 의학, 생물학, 사회과학 등 다른 여러 학문 분야에서 폭넓게 사용되며, 특히 수 감각이나 비율, 기하 등의 수학 영역과 밀접하게 관련되어 있다(National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

그러나 논리적인 특성이 강한 기하, 대수의 수학적 사고와는 달리, 확률적 사고는 직관적이고 오개념이 많으며 쉽게 이해하기 어렵다(우정호, 2007). 또한 확률의 의미에 대해서도 여러 가지 관점이 공존하고 있어 확률에 대한 정의도 명확하지 않기 때문에 지도 또한 쉽지 않다. 학교 수학에서는 다양한 확률의 관점에 따라 개념적으로 접근하기 보다는 복잡한 사건의 경우의 수와 확률을 구하는 알고리즘 중심의 지도를 하고 있다. 또한 도입 시기에 있어 초등학교 6학년 과정에서 경우의 수를 이해하고 확률의 의미를 아는 것을 목표로 확률을 처음으로 도입하고 있다(교육과학기술부, 2008). 이는 초등학교 전 과정을 고려해 볼 때 매우 적은 양이며 그것도 학습에 대한 집중도가 떨어지는 6학년 후반부에서만 약간 다루어 그 어려움을 더 가중시키고 있다. 더구나 초등 수준에서 많은 내용을 다루지 않고 중, 고등학교로 진학하므로 학생들은 확률에 대한 가치를 제대로 인식하지 못하게 되고 확률을 어려운 것으로 생각하기 쉽다.

Fischbein(1975)은 구체적 조작기의 아동들도 확률 교육을 통해 확률 개념 형성이 가능하다고 주장하였고, NCTM(2000) 규준에서도 3학년부터 확률교육을 실시하고 유치원에서부터 확률을 비형식적으로 다루어야 한다고 권고한다. Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith(2009)와 Baroody & Coslick(1998), Chapin, Koziol, MacPherson, & Rezba(2003)에서는 3학년 이상의 학생들에게 적합한 확률 활동을 제안하고 있다. 따라서 학생들이 지니고 있는 확률 감각과 비형식적 지식을 잘 활용한다면 저학년 학생들도 확률 개념을 학습할 수 있으며, 초등학교 6학년에서만 확률을 다룰 것이 아니라 그 이전 학년부터 확률 개념을 지도할 수 있어야 한다.

이러한 관점에서 본 연구는 Jones, Langrall, Thornton, Mogill(1997, 1999)이 제시한 확률 이해 분석 기준과 확률에 관한 연구들을 통합하여 분석의 기준으로 하여 확률을 학습하지 않은 초등학생들의 확률 이해 수준을 분석하고 학생들의 확률 학습 가능성을 탐색하였다.

* 접수일(2011년 3월 15일), 수정일(2011년 3월 28일), 게재확정일(2011년 4월 25일)
* ZDM 분류 : D73
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 확률개념, 초등학생, 독립성
1) 교신저자

Ⅱ. 확률 이해 분석의 틀

Jones et al.(1997, 1999)은 표본공간, 사건의 확률, 확률 비교, 조건부 확률에 대한 4가지 사고 수준의 틀을 제시하였다. 본 연구는 확률 학습이 이루어지지 않은 학생들을 대상으로 한 연구이므로 각 개념에 대한 심층적인 선행연구 분석을 토대로 본 연구를 위한 세분화 된 분석 기준을 제시할 필요가 있었다. Watson & Moritz(2003)은 학생들에게 개별 면담을 통해 주사위의 공평성에 대한 신념을 조사하여 이해 수준을 분석하였고, English(1991)는 표본공간의 서술형 과제에 대한 학생들의 전략을 여섯 가지로 범주화 하였으며, Acredolo, O′Connor, Banks & Horobin(1989)은 학생들이 사건의 가능성이 크거나 적은 결과를 나타낼 때 사용하는 전략을 범주화 하였다. 또 Watson, Collis, & Moritz(1997)는 3, 6, 9학년의 다수 학생을 대상으로 한 연구에서 확률 비교와 관련된 과제에 대한 학생들의 응답을 범주화하였고, Tarr & Jones(1997)는 5학년 학생들에게 독립성 및 복원과 비복원 추출 상황이 포함된 조건부 확률 과제를 제시하여 학생들의 조건부 확률의 추론 양상을 범주화 한 바 있다. 따라서 본 연구에서는 Jones et al.의 연구에 이들의 연구를 통합하고, 과도기적 수준에 다수의 학생들이 포함되어 있어 이들의 수준을 세분화 할 필요가 있다고 판단되어 2수준을 2-1수준과 2-2수준으로 세분하여 이를 본 연구에서의 확률 이해 실태 분석의 기준으로 하였다.

<표 1> 1. 공평성

수준	
1	·공평한 상황과 불공평한 상황을 구분하지 못함 ·경험이나 특이한 생각을 바탕으로 불공평하다고 생각함 ·게임의 결과를 모르므로 단순히 공평하다고 생각함
2-1	·공평한 상황과 불공평 상황을 구별하기 시작함 ·공평함에 대한 근거를 제시하지 못함
2-2	·공평한 상황과 불공평한 상황을 구별함 ·물리적 특징으로 공평한 상황을 구별함 ·생각을 뒷받침하는 추가 설명을 제시함
3	·타당한 수량적 추론에 기초하여 공평, 불공평 상황을 구별함 ·수적인 표현을 사용하여 공평함을 나타내지만 정확한 확률 표현은 아님
4	·동등하게 일어날 듯한 사건에 동등한 수적인 확률을 지정함 ·수적인 확률을 통해 공평하다고 생각함 ·체계적인 실험을 통해 공평성을 인식함

<표 2> 2. 표본공간

수준	
1	·단순 사건에서도 모든 결과를 나열하지 못하고 불완전한 결과를 나열함
2-1	·단순 사건의 결과를 나열함 ·복합 사건에 대해 무작위적이고 비체계적인 전략으로 결과를 나열함
2-2	·복합 사건의 결과를 나름의 규칙을 적용하여 나열함 ·규칙을 끝까지 유지하지 못함
3	·부분적으로 생산적인 전략을 사용하여 복합 사건의 결과를 나열함 ·부분적으로 주행기록계 전략을 사용함
4	·복합 사건과 그 이상의 사건의 결과를 나열할 수 있는 생산적인 전략을 적용함 ·주행기록계 전략을 사용함

<표 3> 3. 사건의 확률

수준	
1	·주관적 판단과 비수학적인 경험에 기초하여 가장 많거나 적게 일어날 것 같은 사건을 예측함 ·확실한 사건과 불가능한 사건을 인식함
2-1	·구하고자 하는 요소의 수만 생각하는 부분-부분 추론을 함 ·수적인 것을 고려하지 못함 ·주관적인 판단으로 돌아감 ·가능성이 있는 사건을 가능성의 정도와 관계없이 같게 인식함
2-2	·가능성이 크거나 적은 사건을 인지함 ·수량적인 판단에 기초해 가장 많거나 적게 일어날 것 같은 사건을 예측함
3	·수량적 판단에 기초하여 가장 많거나 적게 일어날 것 같은 사건을 예측함 ·양적 추론과 측정을 사용해서 사건의 가능성을 나타냄 ·확률 비교를 위해 비형식적으로 숫자를 사용하나 정확한 확률적 표현은 아님
4	·구하려고 하는 요소의 수와 전체 요소의 수를 비교하는 부분-전체 추론을 함 ·가장 많거나 적게 일어날 것 같은 사건을 예측함 ·사건에 대한 실제적 확률이나 비율 형태의 확률적 표현을 통해 가능성을 나타냄

<표 4> 4. 확률 비교

수준	
1	·주관적 판단이나 기초하여 사건의 확률 비교함
2-1	·확률 비교의 상황을 인식하나 상황에 맞지 않는 판단에 기초하여 추론을 정당화 함 ·바르게 수량화 하지 못하거나 상대적인 수를 고려하지 못하고 부분-부분 추론을 함 ·주관적 판단으로 되돌아감
2-2	·확률 비교의 상황을 인식하고 설명이 구체적임 ·수량적 판단에 기초하여 확률 비교함
3	·일관된 수적인 표상을 사용해 사건의 가능성을 비교함 ·타당한 수량적 추론으로 정당화하나, 비연속적 사건이 관련된 경우 제약이 따름
4	·비율이나 수적인 측정으로 확률을 비교함 ·각각의 비율을 구하여 두 가지 사건을 비교하는 관계적 이해를 보임

<표 5> 5. 독립성

수준	
1	·이어지는 사건이 항상 연관되어 있다고 생각함 (독립성의 개념이 없음) ·사건의 결과를 조절할 수 있다고 생각함 ·주관적 판단을 함 ·사건 사이에 규칙이 있다고 생각함
2-1	·대표성 전략을 많이 사용함 ·최근 효과의 오류를 보임
2-2	·이어지는 사건의 연관성을 약간 인식(독립성을 인지하기 시작) ·대표성 전략을 사용함 ·정답을 제시하나 독립성을 부정확하게 인식함
3	·첫 번째 사건의 결과가 두 번째 사건의 결과에 영향을 주는지 여부를 인식함 ·독립 사건과 종속 사건을 구별할 수 있음 ·대표성 전략을 사용하기도 함
4	·추론을 정당화하기 위해 수적인 확률을 사용하여 복원 추출과 비복원 추출에서 독립 사건과 종속 사건을 구별할 수 있음 ·대표성 전략을 사용하지 않음

<표 6> 6. 조건부 확률

수준	
1	·비복원 추출에서 확률이 달라진다는 것을 인식하지 못함 ·수적인 정보를 고려하지 못함 ·주관적인 추론을 함
2-1	·비복원 추출에서 일부 사건의 확률이 달라진다는 것을 인지함 ·인식이 불완전하고 대체로 이전에 일어났던 사건에 제한되어 있음(대상이 되는 사건의 확률 변화만 인지함) ·주관적 추론을 하기도 함
2-2	·비복원 추출에서 사건의 확률이 달라진다는 것을 인지함 (대상이 아닌 사건의 확률 변화까지 인지함) ·정확한 확률적 추론이 아닌 추출의 무작위성에 의존하여 추론함
3	·비복원 추출에서 변화하는 확률 값을 결정할 수 있음 ·비복원 추출에서 모든 사건의 확률이 달라진다는 것은 완전히 인지함 ·해당 사건의 수와 전체 사건의 수를 구두로 비교함 ·비형식적으로 숫자를 사용 (수학적으로 정확하지 않을 수 있으나 의미 있는 표현임)
4	·복원 추출과 비복원 추출에서 수적인 확률을 지정함 ·실제적 확률이나 비율 형태로 확률을 나타냄

Ⅲ. 연구방법

본 연구를 위해서는 소수의 학생을 대상으로 하기보다는 비교적 많은 학생을 대상으로 객관적인 기준에 의해 확률의 이해 실태를 점검하는 것이 더 유용하다. 따라서 양적 연구방법을 통해 학생들의 확률 이해 실태를 조사하여 수준별로 나누어 확률적 사고 수준을 분석하였다. 연구대상은 대전광역시 소재 초등학교 중, 학생 수준과 가정의 사회 경제적 수준이 중간 정도에 속하는 학교를 4개 표집 하여 3, 4, 5학년 각 1개 반씩 총 12개 반의 3학년 118명, 4학년 115명, 5학년 115명을 연구대상으로 하였다.

우리나라 교육과정에서는 확률이 6학년에서만 도입되고 있으므로 3, 4, 5학년에게 적절한 수준의 확률 개념을 선정하기 위해 Watson & Moritz(2003), Baroody & Coslick(1998), Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith(2009), English(1991), Small(2009), 박영훈(2008), Jones et al. (1999), Tarr & Jones(1997), Fischbein & Grazit(1984)의 연구에서 제시한 확률의 기본 개념에 관한 문항을 선별하여 사용하고 경우에 따라 연구자가 수정·보완 하였다. 특히 연구대상이 확률에 관한 학습을 하지 않은 상태이기 때문에 수치적인 확률 계산과 개념적인 용어 사용 등을 지양하고 실생활 관련 문항으로 구성하며 그림을 통해 문제에 대한 이해를 도왔다. 본 검사지의 세부내용은 다음과 같다.

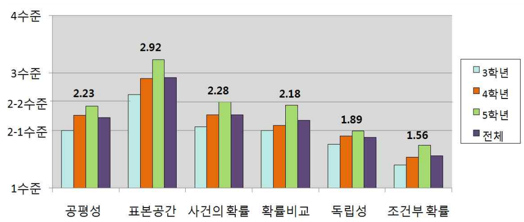
개념	세부내용
공평성	·주사위의 각 면이 나올 가능성이 공평한지 판단하기
	·회전판의 영역의 넓이에 따라 나올 가능성이 공평한지 판단하기
표본 공간	·동전을 한 개 던질 때의 표본공간 구하기
	·2×4 조합의 경우의 수 구하기
사건의 확률	·회전판의 영역을 보고 발생할 가능성이 높은 사건을 인지하기
	·사건이 일어날 가능성을 확률을 수적으로 표현하기
확률 비교	·표본공간의 크기가 다른 두 사건의 확률 비교하기
	·다르게 표현된 두 사건의 확률 비교하기
독립성	·동전 던지기 실험의 독립성 인지하기
	·동전 던지기 실험의 독립성 인지하기
조건부 확률	·비복원 추출 상황에서의 확률 변화 예측하기
	·비복원 추출의 실험에서 확률 변화를 예측하고 수로 표현하기

본 검사에 앞서 검사 시간, 진술 형태, 검사 문항 수, 검사 실시 상의 유의점, 학생들의 반응 경향에 대해 전반적인 검토와 수정을 위해 예비 검사를 실시하였다. 예비 검사는 대전광역시 소재 S초등학교 3, 4, 5학년 각 1개 반을 대상으로 연구자가 직접 실시하였으며 담임교사 및 학생들에게 검사의 목적, 실시 상의 유의점에 대해 충분히 전달하였다. 예비 검사 결과를 분석함으로써 도출된 문제점을 수정·보완하여 본 검사지에 반영하고 본 검사를 실시하였다.

수집된 자료의 분석 결과에 대한 객관도를 알아보기 위해 연구자를 포함한 3인의 채점자를 선정하여 채점자간 신뢰도를 산출하였다. 채점자간의 분류 일치도를 추정하는 일치도 통계법을 이용하여 채점자간 신뢰도를 추정하였고(성태제, 2002), 일치도를 구한 결과 분석 기준에 신뢰성이 있는 것을 알 수 있었다. 검사지 분석 기준의 신뢰성을 바탕으로 코딩한 학생들의 수준을 빈도분석과 학년 간 분산분석을 실시하였고, 평균 수준을 산출하는 과정에서 1수준-1점. 2-1수준-2점, 2-2수준-2.5점, 3수준-3점, 4수준-4점을 지정하여 각 개념의 합계 빈도수에 따른 평균 점수를 산출하였다. 다면 표본공간에 대해서는 각각의 문항이 단순사건과 복합사건을 다루고 있기 때문에 두 문항의 결과를 통합하여 하나의 결과를 제시하였다.

Ⅳ. 결과분석

확률 개념별 평균 수준은 공평성 2.23, 사건의 확률 2.28, 확률 비교 2.18로 비슷한 수준을 보이고 있으며, 표본공간이 2.92로 월등히 높은 수준을 나타냈다. 그러나 독립성 1.89, 조건부 확률 1.56으로 2수준 이하의 낮은 이해를 보였으며 조건부 확률에 대한 이해가 특히 낮다는 것을 확인할 수 있었다. 또한 학년이 증가함에 따라 평균 수준이 비슷한 폭으로 증가하는 것을 알 수 있다.



1. 공평성

공평성 문항은 주사위 면의 수에 따른 공평성과 회전판 영역의 크기에 따른 공평성을 인식하는 문항으로 이루어져 있으며, 수준별 빈도분석을 실시한 결과는 다음과 같다.

학년	수준									
	1		2-1		2-2		3		4	
3학년[3]	82	34.7%	36	15.3%	71	30.1%	44	18.6%	2	0.8%
4학년	52	22.6%	42	18.3%	70	30.4%	55	23.9%	11	4.8%
5학년	43	18.7%	14	6.1%	87	37.8%	74	32.2%	12	5.2%
전체	0	25.4%	0	13.2%	0	32.8%	0	24.9%	0	3.6%

공평성 문제에서 나타난 학생들의 수준은 2수준(2-1수준 13.2%, 2-2수준 32.8%)이 46.0%로 가장 많았다. 학년별로는 3학년 45.4%, 4학년 48.7%, 5학년 43.9%를 나타내어 과반수에 가까운 학생들이 2수준에 분포하고 있다는 것을 확인할 수 있었다. 이를 통해 초등학교 3, 4, 5학년 학생들은 공평성에 대해 주관적인 수준에서 양적 비형식 수준으로 발전해가는 과정인 과도기적 수준에 많이 분포하고 있음을 알 수 있다.

공평함에 대해 1수준의 반응을 보인 학생들 가운데 일부 학생들의 반응을 살펴보면, 게임의 결과를 모르기 때문에 단순히 공평하다고 생각하는 학생들이 많았다. 문제 상황에 드러나 있는 수적인 정보를 통해 추론을 하면서도 결과의 불확실성을 반영하여 공평하다고 생각하고 있었다. 이는 좀 더 높은 수준인 2-1수준에서도 나타나는데, 수적인 것을 고려하면서도 결과의 불확실성을 내포한 응답을 하는 학생들이 있었다.

공평성에 관한 문항1과 문항2 중, 문항1에서 1수준과 3수준이 문항2 보다 더 높았다. 문항1은 주사위 면의 수에 따른 공평함을 구분하는 문항이었고 문항2는 회전판 영역의 크기에 따른 공평함을 구분하는 문항이었다. 문항1에서 1수준에 34.2%, 3수준에 39.9%의 학생이 있었지만, 문항2에서는 1수준에 16.7%, 3수준에 9.8%의 학생들이 있었다. 이를 통해 학생들은 이산량에 따른 공평성을 구분하는 문항에 대해 주관적 추론과 양적 추론을 하는 반면, 연속량에서의 공평성을 구분하는 문항에서는 2수준(2-1수준 12.1%, 2-2수준 58.6%)이 훨씬 많아 주관적 추론과 양적 추론보다는 그 중간 단계인 과도기적 추론을 활용하고 있다는 것을 알 수 있다.

2. 표본공간

표본공간에 관한 문항은 사건의 단계에 따라 단순사건과 복합사건 두 문항으로 구성되었다. 문항1은 동전을 던지는 단순 사건에서의 표본공간을 인식하는 상황이고, 문항2는 옷의 티셔츠와 바지를 조합하여 표본공간을 구하는 복합 사건의 상황이며, 수준별 빈도 분석을 실시한 결과는 다음과 같다.

학년	수준									
	1		2-1		2-2		3		4	
3학년	18	15.3%	31	26.3%	9	7.6%	29	24.6%	30	25.4%
4학년	9	7.8%	24	20.9%	3	2.6%	38	33.0%	39	33.9%
5학년	2	1.7%	11	9.6%	2	1.7%	57	49.6%	43	37.4%
전체	29	8.3%	66	19.0%	14	4.0%	124	35.6%	112	32.2%

표본공간은 다른 개념들에 비해 학생들의 수준이 높게 나타났다. 평균적으로 사건의 확률 2.28, 확률 비교 2.18, 조건부 확률 1.56의 수준을 보인 것에 비하면 2.92를 나타낸 표본공간은 학생들의 이해 수준이 높다. 특히, 체계적인 방법으로 복합사건의 결과를 나열하는 학생들이 많았다. 3, 4, 5학년 학생들이 수형도에 대해 배우지 않았지만, 비형식적인 방법에 근거하여 두 단계 사이의 관계를 인식하여 스스로 자기만의 방법을 만들어 가능한 결과를 나타낼 수 있는 것으로 보아, 좀 더 체계적인 방법인 수형도에 대한 학습이 가능할 것이라고 예측할 수 있다.

학년별로 1수준의 학생들은 3학년 15.3%, 4학년 7.8%, 5학년 1.7%이고 2-1수준은 3학년 26.3%, 4학년 20.9%, 5학년 9.6%이며 2-2수준은 3학년 7.6%%, 4학년 2.6%, 5학년 1.7%로 1수준과 2수준은 학년이 올라감에 따라 학생 수가 감소하였지만, 3수준은 3학년 18.6%, 4학년 23.9%, 5학년 32.2%이고 4수준은 3학년 25.4%, 4학년 33.9%, 5학년 37.4%로 3수준과 4수준은 학년이 올라감에 따라 학생 수가 증가하는 것을 볼 수 있다. 즉, 1수준, 2-1수준, 2-2수준의 학생들이 학년이

2) 학년별 각 수준에 해당하는 응답자는 무응답자를 제외한 수준을 제시하였으므로 총 연구대상의 수가 다르며, 두 문항의 응답자수의 합임을 밝힌다.

올라감에 따라 학생 수가 감소하였지만, 3수준과 4수준은 학년에 따라 증가하였다. 사후검정(Scheffe test)을 실시한 결과, 유의확률 .000에서 3학년과 5학년, 4학년과 5학년의 수준도 큰 차이가 있음을 확인할 수 있었고, 이를 통해 학년 변화에 따른 이해의 발달이 뚜렷함을 알 수 있다.

(I)학년	(J)학년	평균차 (I-J)	표준오차	유의확률
3	4	-.2819	.1212	.068
	5	-.5825(*)	.1197	.000
4	3	.2819	.1212	.068
	5	-.3006(*)	.1220	.049
5	3	.5825(*)	.1197	.000
	4	.3006(*)	.1220	.049

*p<.05

3. 사건의 확률

사건의 확률과 관련된 문항은 회전판 영역의 크기에 따른 가능성을 인식하는 문항과 구슬의 개수에 따른 사건의 가능성을 인식하는 문항으로 이루어져 있으며, 수준별 빈도 분석을 실시한 결과는 다음과 같다.

학년	수준									
	1		2-1		2-2		3		4	
3학년	58	24.6%	26	11.0%	85	36.0%	51	21.6%	3	1.3%
4학년	39	17.0%	29	12.6%	83	36.1%	70	30.4%	2	0.9%
5학년	29	12.6%	16	7.0%	75	32.6%	99	43.0%	7	3.0%
전체	126	18.1%	71	10.2%	243	34.9%	220	31.6%	12	1.7%

사건의 확률 문제에서 나타난 학생들의 수준은 2수준이 가장 많았으며, 2-1수준 10.2%, 2-2수준 34.9%, 전체 45.1%로 나타났다. 학년별로는 3학년 47.0%, 4학년 48.7%, 5학년 39.6%로 학년의 발달에 따른 경향의 차이는 없었다. 이를 통해 초등학교 3, 4, 5학년 학생들은 사건의 확률에 대해 과도기적 수준을 많이 보이고 있음을 알 수 있다.

사건의 확률에 대해 2-1수준의 반응을 보인 학생들 가운데 일부 학생들의 반응을 살펴보면, 무작위적 추출에 의한 불확실성을 이유로 모든 사건의 가능성이 같다고 생각하는 경우가 많았다. 문제 상황에 드러나 있는 수적인 정보를 고려하지 못하고 단순히 결과의 불확실성을 내포한 응답을 하는 학생들이 있었다. 이는 사건의 확률 뿐 아니라 공평성, 확률 비교, 독립성, 조건부 확률에 대한 이해에서도 공통적으로 나타나는 현상이었다.

사건의 확률에 관한 문항5와 문항6 중, 문항6에서 1수준과 3수준의 학생들이 문항5보다 더 많았다. 문항5는 회전판 영역의 크기에 따른 사건의 가능성을 예측하는 문항이었고, 문항6은 구슬의 개수를 인식하여 사건의 가능성을 예측하는 문항이었다. 문항5에서는 1수준에 6.3%, 3수준에 21.0%의 학생이 있었지만, 문항6에서는 1수준에 29.9%, 3수준에 42.2%의 학생들이 있었다. 이를 통해 학생들은 연속량보다는 이산량에 따른 사건의 확률을 예측함에 있어, 주관적 수준(1수준)의 사고를 많이 하지만, 양적 수준(3수준)의 사고 또한 많이 한다는 것을 알 수 있다. 반면, 연속량에서 사건의 확률을 예측하는 문항에서는 주관적인 수준의 사고와 양적 수준의 사고가 문항6에 비해 훨씬 적으며 대부분 그 중간 단계인 과도기적 수준의 사고(66.3%)를 하고 있다는 것을 알 수 있다.

4. 확률 비교

확률 비교와 관련된 문항은 공이 들어 있는 상자를 비교하는 문항과 회전판 영역에 따른 사건의 가능성을 비교하는 문항으로 이루어져 있다. 두 문항 모두 전체의 수는 다르지만 전체와 부분의 비의 값이 같기 때문에 해당 사건이 일어날 가능성이 같은 상황으로 제시하였다. 확률 비교 문항에 대해 3, 4, 5학년별 평균 이해 수준에 차이가 있는지를 알아보기 위해 분산분석을 실시한 결과는 다음과 같다.

학년	수준									
	1		2-1		2-2		3		4	
3학년	27	11.4%	144	61.0%	26	11.0%	23	9.7%	6	2.5%
4학년	10	4.3%	156	67.8%	14	6.1%	20	8.6%	16	7.0%
5학년	17	7.4%	95	41.3%	24	10.4%	53	23.0%	34	14.8%
전체	54	7.8%	395	56.8%	64	9.2%	96	13.8%	56	8.0%

확률 비교에서 나타난 학생들의 수준은 2-1수준이 가장 많았으며, 문항7에서 51.7% 문항8에서 61.8% 전체 56.8%로 절반이 넘는 학생들이 이 수준에 위치하고 있는 것으로 나타났다. 이는 학생들이 두 사건의 확률을 비교함에 있어 전체의 수와 부분의 수를 동시에 고려하는 사고보다는 대상이 되는 사건만을 고려하여 추

론하고 있음을 보여준다.

높은 수준인 3수준과 4수준의 학생 반응을 학년별로 살펴보면 3, 4학년은 비슷하게 낮은 수준으로 큰 차이를 보이지 않았으나, 5학년에서는 앞의 학년에 비해 2~3배가 가량의 학생들이 분포하고 있었다. 확률 비교의 상황은 두 사건에서 해당되는 사건의 가능성을 비교하는 비례적 사고가 필요한 상황인데, 3, 4, 5학년 학생 모두 비례에 대한 선행 학습이 이루어지지 않은 상태이지만 수에 대한 감각이 발달한 5학년 학생들의 비례 추론 능력이 더 발달하였음을 보여준다.

5. 독립성

독립성 문항은 동전을 네 번 던져 나온 결과가 있는 상태에서 다섯 번째에 어느 면이 나올 가능성이 큰지를 예측하는 문항과 동전을 다섯 번 던졌을 때 일어날 가능성이 가장 큰 경우를 고르는 문항으로 이루어져 있다. 동전을 던지는 실험은 이전의 사건이 다음 사건에 영향을 주지 않은 독립 사건이기 때문에 두 문항의 정답은 ‘일어날 가능성이 같다’이다. 조건부 확률을 제외한 4개의 영역에서 평균 2수준 이상을 보인 것에 비해 독립성의 평균 수준은 1.89로 비교적 낮은 수준을 보였다. 독립성에 대해 3, 4, 5학년별 평균 이해 수준에 차이가 있는지를 알아보기 위해 분산분석을 실시한 결과는 다음과 같다.

학년	수준									
	1		2-1		2-2		3		4	
3학년	93	39.4%	57	24.2%	23	9.7%	44	18.6%	5	2.1%
4학년	69	30.0%	44	19.1%	33	14.3%	54	23.5%	9	3.9%
5학년	72	31.3%	53	23.0%	38	16.5%	47	20.4%	11	4.8%
전체	234	33.6%	154	22.1%	94	13.5%	145	20.8%	25	3.6%

독립성에서 나타난 학생들의 수준은 1수준과 2-1수준이 가장 많았으며, 대부분 독립성에 대한 개념이 없고 주관적인 판단을 하고 있었다. 특이한 점은 두 번째 문항에서 동전의 앞, 뒷면 사이에 규칙이 존재한다고 믿는 것이었다. 이 학생들의 대부분은 동전의 규칙이 뒤, 앞, 앞, 앞, 뒤이기 때문에 5번째 시행에서 뒷면이 나올 것이라는 추론을 하였다. 앞서 언급했듯이, 교과서에서 동전을 규칙찾기의 소재로 많이 다루기 때문에 나타난 현상이라고 볼 수 있다.

학생들은 독립성 문항에 대해 학년의 변화에 따른 경향을 보이지 않았다. 다른 개념들에서는 학년의 변화에 따라 1수준이 감소하거나 3, 4수준이 증가하는 경향이 보였다. 그러나 독립성에 대해서는 학년에 따른 뚜렷한 경향이 없었다. 1수준과 2-1수준은 4학년이 가장 적었고, 3수준은 4학년이 가장 많았으며, 평균 이해 수준도 학년 간에 유의미한 차이가 없었다. 다른 개념과는 달리 독립성의 개념은 학년의 증가에 따라 자연스럽게 발달되는 개념이 아니라는 판단을 할 수 있다.

6. 조건부 확률

조건부 확률과 관련된 문항은 상자에서 빨간색 곰인형이 뽑혔을 때, 뽑힐 확률이 변한 곰인형을 인식하는 문항과 사탕병에서 포도맛 사탕을 먹었을 때 레몬맛 사탕의 확률 변화를 인식하는 문항으로 이루어져 있다. 두 문항 모두 비복원 추출의 상황을 다루고 있으며 대상이 아닌 사건의 확률 변화를 인지하고 있는가를 알아보기 위한 문항이다. 수준별 빈도 분석을 실시한 결과는 다음과 같다.

학년	수준									
	1		2-1		2-2		3		4	
3학년	143	60.6%	51	21.6%	32	13.6%	2	0.8%	0	0%
4학년	108	47.0%	67	29.1%	36	15.7%	6	2.6%	1	0.4%
5학년	96	41.7%	67	29.1%	58	25.2%	6	2.6%	2	0.9%
전체	347	49.9%	185	26.6%	126	18.1%	14	2.0%	3	0.4%

조건부 확률은 평균 수준이 1.56으로 확률의 여섯 가지 개념 중에서 가장 낮았다. 조건부 확률에 대해 3수준 이상을 보인 학생은 문항11에서 2.3%, 문항12에서 2.6%, 전체의 2.4%에 불과했는데 이는 3, 4, 5학년에서 조건부 확률이 학습하기 어려운 개념임을 말해준다.

두 문항 중에서는 두 번째 문항에서 2-2수준의 학생이 더 많았다. 이는 대상이 아닌 모든 사건의 확률 변화를 한 번에 인식하는 것보다는 한 가지 사건의 확률 변화를 인식할 수 있는 학생들이 더 많다는 것을 의미한다. 조건부 확률에 대한 이해가 이루어지지 않은 상태에서 한꺼번에 많은 정보를 인식하기보다는 정보가 하나씩 주어졌을 때 인식할 수 있는 학생들의 비

율이 높았다.

이상에서 학생들의 확률 이해 수준을 개념별로 살펴보았다. 개념별 이해수준은 표본공간, 사건의 확률, 공평성, 확률 비교, 독립성, 조건부 확률의 순으로 높게 나타났고, 학년별 이해 수준은 전반적으로 5학년, 4학년, 3학년 순으로 높게 나타났으며 독립성에 대해 학년 간에 의미 있는 수준 차이가 없다는 것을 확인할 수 있었다. 문항별로는 연속량의 문항보다는 이산량의 문항에서 학생들의 이해가 높았다.

Ⅴ. 결 론

본 연구는 3, 4, 5학년 학생들의 확률 이해 수준이 어떠한지를 살펴보기 위해 여섯 가지 확률 개념을 통해 학생들의 반응을 살펴보고, 이해 수준을 분석하였다. 본 연구에서 얻은 결과를 바탕으로 선행 연구 및 수학 교수·학습과 관련지어 논의해 보고자 한다.

첫째, 학생들의 확률 개념 평균 이해 수준은 표본공간 >> 사건의 확률 > 공평성 > 확률 비교 > 독립성 >> 조건부 확률 순이었고, 모든 학년에서 같은 결과를 나타냈다. 이는 상대적으로 조건부 확률이 3, 4, 5학년 학생들에게 이해하기 어려운 개념이며 표본공간은 충분히 학습할 수 있는 개념임을 보여준다고 할 수 있다. 이것은 이은희(2007)의 연구에서 표본공간에 대해 5, 6학년 학생들의 69.11%가 1수준을 보였던 것과는 반대되는 결과이다. English(1991)는 이보다 어린 학생들을 대상으로 한 연구를 통해 초등학교 교육과정에 조합 영역을 도입할 수 있음을 시사한 바 있으며 오인숙·이영하(1994)는 취학 전 아동에게도 경우의 수에 대한 지도가 가능하다고 하였다. 이러한 결과는 검사 문항의 난이도가 낮고 문제의 소재가 학생들의 일상생활 경험이기 때문으로 볼 수 있다. 현행 초등학교 교육과정에서는 6학년에서 경우의 수를 다루고 있는데, 활동의 소재가 주로 동전, 주사위, 구슬이기 때문에 학생들에게 친숙하지 않다. 따라서 학생들에게 친숙한 상황을 제시하여 복합사건의 결과를 조합하도록 한다면 어린 학생들도 복합사건의 표본공간을 쉽게 학습할 수 있음을 보여준다고 할 수 있다.

둘째, 사건의 확률에 대해 3수준 이상을 보인 학생들은 33.3%로 표본공간 다음으로 많게 나타났다. 이러한 결과는 확률을 배우지 않은 학생들도 사건의 가능성을 양적으로 표현할 있음을 보여주는 결과이다. 그러나 확률을 배우지 않은 3, 4, 5학년 학생들이 정확한 확률 값을 표현하는 것은 사실상 어렵다. 이러한 맥락에서 Acredolo et al. (1989)은 1, 3, 5학년 학생들이 확률을 표현할 때 나타나는 문제를 최소화하기 위해 질적 표현을 통해 답을 나타내도록 하였다. 이들은 사건의 가능성을 알아보는 과제에 대해 웃는 얼굴과 슬픈 얼굴이 그려진 막대에 있는 눈금을 옮겨 확률을 표현해보게 하였다. 반면, 현행 교육과정에서는 확률을 처음으로 학습하는 6학년 학생들에게 어떤 사건이 일어날 경우의 수의 비율을 통해 확률을 나타내게 한다. 이는 확률이 무엇인지에 대해 생각할 겨를도 없이 확률을 수적인 형태로 표상화하도록 하기 때문에 실제로 학생들이 생각하고 있는 사건의 가능성과 수적인 표상을 연결시키지 못하게 할 우려가 있다. 따라서 확률과 관련한 교수·학습 시, 정확한 비율로서의 양적 표현에 앞서 질적인 정보의 형태로 확률을 표현할 수 있도록 도와야 한다.

셋째, 확률 비교에서는 3, 4학년 학생들에 비해 5학년 학생들이 통계적으로 유의미한 높은 수준을 보였는데, 수학적 확률의 차이가 없으나 표본공간의 크기가 다른 두 사건의 가능성을 양적으로 추론하기 위해서는 먼저 비례 개념이 선행되어야 한다. Fischbein(1975)은 학생들이 사건의 가능성에 관한 직관적 이해가 부족하기 때문에 다른 수학적 조작들에 비해 확률의 비교가 어렵다는 것을 확인하였다. 오인숙·이영하(1994)의 연구에서는 가능성이 다른 사건을 비교하는 것에 비해 가능성이 같은 사건의 비교에 대해 많은 학생들이 오답을 하였으며, 가능성이 같은 확률 비교는 특히 비례 개념이 형성될 수 있는 5학년 이상에서 이해할 수 있다고 하였는데 이것은 본 연구의 결과와 같다. 3, 4, 5학년 학생 모두 비례에 대해 학습하지 않았지만, 본 연구를 통해서도 확인할 수 있듯이 5학년 학생들은 비례에 대한 개념이 형성되기 시작하는 시점이라고 볼 수 있다. 이는 제7차 교육과정에서 6학년에 있던 비와 비율의 개념을 2007 개정 교육과정에서는 5학년에서 학습하게 된 것과 일맥상통한다고 할 수 있겠다. 이와 관련하여 비의 값이 같은 확률 비교에 대한 5학년 학생들의 학습 가능성을 시사하며 그보다 낮은 학년에서의 비의 값이 다른 확률 비교에 대한 학습을 시도해

볼 수 있다.

넷째, 독립성에 대한 이해 수준은 조건부 확률 다음으로 낮았으며, 유일하게 학년 간에 유의한 수준 차이가 없는 개념이었다. 이는 독립성이 인지 발달에 따라 자연스럽게 발달하는 개념이 아니라는 것을 보여준다. 4~8학년 학생들을 대상으로 한 Fischbein, Nello, & Marino(1991)의 연구에서도 학교 급에 따라 독립성에 대한 개념이 없는 학생들의 수가 큰 차이를 보이지 않았는데, 이것은 학생의 인지 발달 간에 큰 차이가 없었던 본 연구와 일치하는 결과이다. 독립성의 이해 수준이 낮다는 점과 인지발달에 따라 발전하기 어렵다는 점을 고려했을 때, 독립성을 도입하는 것은 어려울 것이라고 판단되며 독립성을 도입할 때 동전의 앞, 뒷면보다는 학생들의 경험에 의해 방해받지 않는 소재를 통해 다루는 것이 바람직할 것이다.

다섯째, 조건부 확률에 대한 이해 수준은 매우 낮았으며, 특히 비복원 상황에서의 확률 변화를 전혀 인지하지 못하는 학생들이 49.9%나 되었고, 양적으로 추론할 수 있는 3수준 이상을 보인 학생들도 전체의 2.4%에 불과했다. 이것은 Fischbein & Grazit(1984)의 연구에서 학생들이 복원 추출의 과제에 비해 비복원 추출의 과제 수행 능력이 현저하게 낮았던 것과 일치되는 결과이다. 검사지의 문항을 확률 학습 경험이 없는 학생들에게 친숙하도록 인형 뽑기와 사탕을 소재로 구성했음에도 불구하고, 학생들은 비복원 상황에서의 확률 변화를 인식하지 못하였다. 이를 통해 조건부 확률은 초등학생들의 인지 수준에 적합하지 않은 개념이며 인지 구조가 발달한 상위 학년에서 학습해야 하는 개념이라고 판단할 수 있다. 종합적으로 살펴보면, 학생들은 독립성과 조건부 확률에 대해 낮은 이해를 보였고 표본공간, 사건의 확률, 공평성, 확률 비교에 대해 상대적으로 높은 이해를 나타내었다. 표본공간, 사건의 확률, 공평성, 확률 비교에 대해 본 연구에서 드러난 세부적인 결과들을 토대로 3, 4, 5학년 교육과정에 이들의 도입 가능성을 고려해 볼 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2008). 초등학교 교육과정 해설: 수학, 과학, 실과. 서울: 교육과학기술부.

박영훈 (2008). 새로 쓰는 초등 수학 교과서: 확률과 통계. 서울: 동녘주니어.

성태제 (2002). 타당도와 신뢰도. 서울: 학지사.

오인숙・이영하 (1994). 아동들의 확률 개념 형성 시기에 관한 연구. 대한수학교육학회논문집, 4(1), 123-133.

우정호(2007). 학교 수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

이은희 (2007). 일반 학생과 영재 학생의 확률적 사고 특성 분석. 청주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

Acredolo, C., O'Connor, J., Banks, L., & Horobin, K. (1989). Children's ability to make probability estimates: Skills revealed through application of anderson's functional measurement methodology. *Child Development*, 60(4), 933-945.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Assocoates. 권성룡・김남균・김수환・김용대・남승인・류성림・방정숙・신준식・이대현・이봉주・조완영・조정수 공역(2005). 수학의 힘을 길러주자. 왜? 어떻게? 서울: 경문사.

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational studies in mathematics* 22(5), 451-474.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht, Netherlands: Reidel.

Fischbein, E., & Grazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?: An exploratory research study. *Educational Studies in Mathematics,* 15(1), 1-24.

Fischbein, E., Nello, M., S., & Marino, M., S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics,* 22(6), 523-549.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing nurturing young children's thinking in probability. *Mathematical Education Research Journal,* 9(2), 101-125.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30(5), 487-519.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: The Author. 류희찬·조완영·이경화·나귀수·김남균·방정숙 공역 (2007). 학교 수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). *Helping children learn mathematics* (9th ed.). NY: John Wiley & Sons.

Small, M. (2009). *Good questions: Great ways to differentiate mathematics introduction.* NY: Teachers Collage Press.

Tarr J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematical education research journal,* 9(1), 39-59.

Watson, J. M., Collis, K. F., & Moritz, J. B. (1997). The development of chance measurement. *Mathematical education research journal,* 9(1), 60-82.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2003). Fairness of dice: A longitudinal study of students' beliefs and strategies for making judgments. *Journal for research in mathematics education,* 34(4), 270-304.

3rd, 4th and 5th Graders' Probability Understanding

Yoon, Hye Young
Daejeon Taepyung Elementary School, yoochonro 117, JungGu, Daejeon, Korea
E-mail : zammanbo1@hanmail.net

Lee, Kwang Ho
Korea National University of Education. San 7, Darakri, Gangnaemyon, Cheongwongun, Chungbuk, Korea
E-mail : paransol@knue.ac.kr

The purpose of this study is to analyze 3rd, 4th and 5th graders' probability understanding and raise issues concerning instructional methods and search for the possibility of learning probability. For the purpose, a descriptive study through pencil-and-paper test regarding fairness, sample space, probability of event, probability comparison, independence and conditional probability was conducted.

The following conclusions were drawn from the results obtained in this study.

First, the 3rd, 4th, and 5th grade students scored the highest in the sample space questions. In descending order of skill, the students scored the highest in sample space following probability of events, fairness and probability comparison. Second, however, the level of independence understanding was low. There was no meaningful differences between grades and the conditional probability was the least understood. The independence is difficult to develope naturally according to cognitive development. The conditional probability recognizing the probability of an event changes in non-replacement situations was very difficult for these students. Third, there were significant differences between the 5th graders and the 3rd and 4th graders in the probability comparison questions. It shows that 5th graders understand the concept of proportion when they compare equal ratio probability of an event. The 3rd graders could do different ratio probability of an event more easily than equal ratio probability of an event after they were instructed on probability comparison.

* ZDM Classification : D73
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : The concept of probility, elementary students, independence