韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2011. 4. 제 14권, 제 1호, 57-67

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Apr. 2011, Vol. 14, No. 1, 57-67

어떻게 수학퍼즐을 제시할 것인가

홍 갑 주 (부산교육대학교)

이 연구에서는 진정한 '수학수업'의 맥락에서 수학퍼즐을 어떤 방법으로, 어떤 관점에서 제시할 것인지 논의하였다. 우선, 수학퍼즐의 일반적인 특징을 추출하고 수업 안팎에서의 다양한 활용을 조사하였다. 둘째로, 수학퍼즐을 의미 있게 전달하기 위한 수업방법을 논의하였다. 셋째로, 수학퍼즐을 어떠한 관점에서 다룰 것인지를 논의하였다. 마지막으로, 수학퍼즐을 통한 수업은 학생들에게뿐 아니라 교사들에게도 '수학에 있어서의 여유'를 경험하게 해 준다는 점에 그 중요한 가치가 있음을 지적하였다.

I. 서 론

우리나라에서 '퍼즐'이라고 하면 흔히 빈 칸을 적절한 글자로 채우는 가로세로 퍼즐과 같은 언어퍼즐을 생각하며, '수학퍼즐'이라고 하더라도 칠교놀이와 같이 조각난 도형을 맞추는 놀이나 스도쿠(數獨)와 같이 규칙에 맞는 숫자를 채우는 문제를 생각하는 것이 일반적이다. 그러나 'math puzzle'로 인터넷 검색을 해 보면 쉽게 확인할 수 있듯, 수학퍼즐은 수학적 개념과 발상을 바탕으로 하는 매우 폭넓은 종류와 수준의 문제를 포함한다.

일반적으로 보아 수학퍼즐이 전문적인 수학의 문제와 구별되는 점이 있다면 많은 수학적 지식보다는 수학적 착상을 보다 강조한다는 점, 그리고 실생활과 관련된 상황, 놀이기구, 일용품을 소재로 하는 경우가 많다는 점이다. 수학퍼즐 서적에서 흔히 발견할 수 있는, 마주보는 두 귀퉁이가 잘려나간 체스 판을 도미노 즉, 2×1칸짜리 조각들로 덮는 문제, 파티의 손님들이 원하는 사람끼리 악수를 했을 때 홀수 번 악수한 사람은 짝수 명 있음을 보이는 문제는 수학퍼즐의 이러한 특징을 보여주는 전형적인 예가 될 수 있을 것이다. 수학퍼즐의 이러한 특징은 전문적인 수학적 지식을 갖고 있지 않은 학생들 혹은 예비교사들에게 수학의 학문적 특성을 보여주고 다양한 수학적 경험을 제공하는데 수학퍼즐이 흥미로운 소재가 될 수 있을 것임을 암시한다. 사회 전반적으로 그리고 국가 교육과정에서 창의적 사고의 중요성이 강조되는 지금, 수학퍼즐을 통한 수업은 창의성 신장의 구체적인 방안으로서 고려해 볼 가치가 있다.

수학퍼즐은 학생들을 진지한 수학으로 안내하는 통로로서의 역할도 한다. RSA 암호체계를 개선하는 연구를 통해 16세의 나이로 Esat Young Scientist Exhibition, EU Young Scientist of the Year Award 등의 여러 대회에서 우승하여 유명해진 Sarah Flannery는 자신의 수학적 성장 과정을 담은 저서에서, 비록 수학자인 아버지를 두었지만 자신을 수학으로 이끈 것은 아버지의 특별한 수학 지도가 아니라 아버지가 종종 제시했던 수학퍼즐이었다고 말한다. 수학퍼즐이 자신에게 어떠한 의미였는지, 그녀는 다음과 같이 설명한다(Flannery & Flannery, 2001, p. 21).

> 많은 (수학퍼즐) 문제들은 수학을 재미있고 이해하기 쉽게 해 주었다. 더 근본적으로 그것들은 스스로 추론하고 생각하는 방법을 가르쳐 주었다. 이런 면에서 퍼즐은 몇 년 동안 공식이나 증명을 배우는 것보다 훨씬 더 유익했다.

수학퍼즐의 이러한 가능성을 염두에 두고 진정한 '수학 수업'의 맥락에서 수학퍼즐을 다루기 위해서는, 단지 '재미있는 퍼즐'이 아니라 수업 목표에 적합한 수학퍼즐을 선정하여 배치하고, 그 퍼즐의 특징에 맞는 효과적인 수업 진행 방법을 모색하는 등의 노력이 필요할 것이다.

본 연구자는 예비 초등교사들을 대상으로 하는 교양수학 강의에서 매 수업시간마다 두세 개의 수학퍼즐을 제시하여 일반화, 특수화, 유추 등의 수학적 사고전략과 함께 합동식, 동치관계, 귀납법, 귀류법 등 몇 가지 기초적인 수학적 개념을 지도하고자 시도한 바 있다. 본 연구자 나름대로는 이 강의에서 목표한 성과를

* 접수일(2011년 3월 11일), 수정일(2011년 4월 18일), 게재확정일(2011년 4월 25일)
* ZDM classification : A23
* 2000 Mathematics Classification : 97D50
* 주제어 : 수학게임, 수학퍼즐, 창의력

어느 정도 달성했다고 생각하고 있었으나, 한 번은 어떤 학생이 "왜 수학시간에 수학문제가 아니라 퍼즐을 풀어요?"라는 질문을 던져 매우 당황한 바 있다. '지금 내가 지도하는 것은 다름 아닌 수학'이라고 스스로는 줄곧 생각해 왔기 때문이다. "퍼즐을 통해 '수학'을 가르친다는 의도가 어떤 학생들에게는 제대로 전달되지 못했구나." 하는 반성과 함께, "이 학생이 생각하는 수학이란 단지 일차 이차함수, 지수와 로그, 미분과 적분 등 수학의 내용적 지식들의 집합이 아니었을까" 하는 안타까운 생각도 들었다. 이 학생의 질문은 이후 수학퍼즐을 수업시간에 다루는 방식과 그 목표에 대해 좀 더 고민하는 기회가 되었다.

본 연구에서는 먼저 수학퍼즐의 의미를 논의하고 수학퍼즐이 교실 안팎에서 어떻게 활용되는지 살펴본다. 그리고 주로 초등 심화수업과 영재원 수업, 그리고 초등예비교사 지도에 활용할 수 있을만한 수학퍼즐을 예로 제시하며 수학퍼즐을 어떤 관점에서 제시하고 어떤 방법으로 수업할 것인지를 논의한다. 이를 통해 퍼즐을 통한 수학수업의 구성과 실제적인 진행에 지침을 제공하는 한편, 수학교육에 있어서 수학퍼즐의 가치를 재음미하고자 한다.

Ⅱ. 수학퍼즐의 의미와 활용

1. 수학퍼즐의 의미

"수학퍼즐이란 무엇인가?"라는 질문은 "수학퍼즐은 학교에서 일상적으로 배우는 수학과 어떻게 다른가?"라는 질문으로써 대신할 수 있을 것이다. 일반적으로 수학퍼즐은 많은 수학 내용적 지식을 요구하지 않는다. 실제로 대부분의 수학퍼즐은 기초산술, 짝수와 홀수의 성질, 비둘기집의 원리, 간단한 논리추론, 기본도형의 성질 등을 바탕으로 해결할 수 있다. 또한 복잡한 계산보다는 문제의 통찰과 결정적인 아이디어의 도출에 보다 많은 노력을 요구한다.

수학퍼즐의 또 하나의 특징은 그것이 사회적으로 큰 이슈가 되었던 한 사건을 음미해 봄으로써 알 수 있다. 유명한 퍼즐 제작자인 Sam Loyd는 '15 퍼즐', 즉 14와 15의 위치가 서로 바뀐 15조각 퍼즐을 표준상태로 바꾸어 놓으라는 (불가능한) 문제를 내놓았는데, 1870년대에 이 문제에 매료된 미국과 유럽의 대중들은 자기 생업을 잊으면서 하루 종일 몰두할 정도였다 (Archer, 1999). 사실 이렇게 바꾸어 놓는 방법은 없으며, 일반적으로 치환의 패리티(Parity)를 이용하는 그 증명은 가장 간단한 것도 일반 대중들에게 설명하기는 힘든 점이 있다. 그러나 문제 자체는 누구나 이해할 수 있고 도전의식을 불러일으켰으며, 더욱이 말판의 조작을 통해 직접 실험할 수 있었으므로 수많은 사람들이 정열적으로 도전했던 것이다. 즉 일반적으로 수학퍼즐은 비록 그 풀이는 어려울 수 있지만 문제 자체는 이해하기 쉬우며, 각종 구체물 혹은 지필로 직접 실험할 수 있는 여지를 가진다.

Eastaway(1997)는 퍼즐과 일반적인 수학적 질문의 차이는 보는 사람의 관점에 달려있으며 그것을 구별하는 일이 자신에게 실질적인 문제가 되었던 적은 없다고 밝히고 있다. 그에 의하면 중요한 것은 아이들(그리고 어른들도) 수학이 실생활과 관련이 있거나 자신을 즐겁게 할 때 흥미를 느낀다는 점이다. 앞서 언급한 Sarah Flannery는 수학퍼즐의 특징에 대해 '놀라움'이라는 측면을 강조하여 다음과 같이 묘사하고 있다 (Flannery & Flannery, 2001, p. 43).

> 어떤 의미에서 보면, 유머와 퍼즐의 활력소가 똑같이 놀라움(surprise)이라는 점에서 이 둘 사이에는 유사점이 있다. 깜짝 놀라면서 웃음을 터트릴 대목이 쉽게 예상되는 유머가 금새 잊혀지는 것처럼, 답이 명백한 문제는 퍼즐이라고 부를 만한 가치가 없다. 진정한 퍼즐은 모든 사람이 가까이 할 수 있어야 하며, 답을 찾기 위해서 초보적인 산수와 대수 이외에 특별한 전문지식을 요구해서는 안 된다. 누구나 동등하게 퍼즐을 즐길 수 있다고 은연중에 느낄 수 있기 때문에 퍼즐이 더욱 매력적인 것이다.

이상을 종합하자면, 수학퍼즐이라고 하면 대략적으로 다음의 조건들 전부 혹은 그 일부를 만족하는 문제라고 말할 수 있을 것이다.

- 전문적인 수학지식과 복잡한 계산을 요구하지 않는다.
- 일상생활 혹은 각종 놀이에서 소재를 가져온다.
- 문제를 이해하기 쉽고 문제 풀이자 스스로 여러 가지 시도를 할 수 있다.
- '놀라움'의 요소를 포함한다.

단, 여기서 어떤 수학지식이 전문적인 것인지, 문제의 이해가 쉬운지의 여부는 문제 풀이자의 수준에 따라 다르다는 점을 고려하면, 어떤 문제가 수학퍼즐인지의 여부는 그 내용과 수준 자체에 의해 결정되어 있는 것이 아니라, 대상이 되는 문제풀이자와의 관계 속에서 결정되는 것이라 볼 수 있다.

2. 수학퍼즐의 활용

수학퍼즐은 그 자체를 주제로 하는 여러 서적 뿐 아니라 수학 안팎의 영역에서 유용하게 활용된다. 수학문제해결 이론을 전개할 때 수학퍼즐은 빼놓을 수 없는 소재이다. G. Polya가 저술한, 이 분야의 대표적인 책 'How to solve it'의 연습문제들(Polya, 1957, pp. 233-238) 중 많은 것은 수학퍼즐의 형식을 가지고 있다. 좀 더 전문적인 수준의 수학을 바탕으로 수학적 사고전략과 문제풀이의 심리를 다르고 있는 'Mathematics and Plausible Reasoning'(Polya, 1954)에서도 수학퍼즐은 중요한 소재로서 각 장의 연습문제에서 자주 다루어진다.

수학퍼즐은 인지심리학의 실험연구에도 중요하게 활용되고 있다. 실제로 Anderson(1995)에서는 부화효과[1]를 검증한 실험의 예로 '싸구려 목걸이 문제' 실험을 들고 있다. 싸구려 목걸이 문제란 다음과 같다. "세 개의 고리들이 연결된 네 개의 사슬이 있는데, 한 고리를 여는데 2센트, 닫는데 3센트가 든다. 시작 단계에서는 모든 고리가 닫혀있다고 할 때, 15센트 이하의 돈을 사용해서 12개의 고리로 된 목걸이를 만들어라." 이 실험에서 연구자는 싸구려 목걸이 문제를 피험자들에게 반 시간동안 풀게하고 두 집단으로 나누어 각각 반시간, 4시간의 다른 휴식시간을 주었을 때 4시간 쪽의 집단이 문제를 더 잘 풀었음을 관찰하였다. 또한 차이 감소법과 수단-목표 분석이라는 두 인지모델을 문제해결의 분석틀로 채택한 실험연구로서 '하노이 탑 문제' 실험을 소개한다. 이 실험에서는 하노이 탑 문제를 받은 피험자들이 초기에 택한 차이 감소법을 포기하고 수단-목표 분석으로 전략을 바꾼 후에 문제를 해결할 수 있었다는 사실이 관찰되었다. 수학퍼즐은 이와 같이 피험자, 결국 교육의 맥락에서는 학생들의 사고를 분석하고 촉진하는 소재로 이용될 수 있다.

수학퍼즐은 아마도 일반인도 문제를 이해하기 쉽다는, 그리고 발견과 놀라움이라는 요소를 포함한다는 특징으로 인해 여러 영화에서 다루어져왔다. 영화 '다이하드'에서 주인공은 폭탄을 제거하기 위해 3갤런과 5갤런들이 물통을 이용해 정확히 4갤런의 물을 저울 위에 올려야 했다. '페르마의 밀실'에서는 퍼즐이 영화의 핵심 소재로 사용되었는데, 페르마라는 가명의 집주인에게 초대받은 4명의 수학자 및 과학자들은 계속적으로 주어지는 수학퍼즐을 풀지 못할 경우 사방의 벽이 점점 좁혀져 들어오는 두려움을 겪어야 했다. '용의자 X의 헌신'에서는 유명한 4색 문제의 '아름다운 해법'에 대한 주인공의 집착을 볼 수 있다. 이런 영화들은 학생들에게 수학퍼즐을 소개하는데 좋은 자료가 된다.

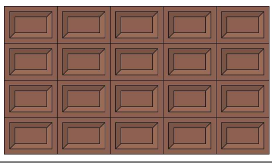
Ⅲ. 수학퍼즐을 통한 수업방법

이 장에서는 수학퍼즐을 의미 있게 전달하기 위한 수업방법을 모색한다. 특히 다수의 학생들이 수업을 듣는 교실수업 환경에서 사용할 수 있는 수업방법을 제안함으로서 그 실제적인 활용 범위를 넓히고자 한다.

1. 의도된 속임수와 집단적인 시도

다음은 초콜릿이라는 친숙한 소재를 통해 제시하는 퍼즐로서(藤村幸三郎, 1980), 실재의 초콜릿을 실험도구로 제공할 수 있다.

5×6칸으로 된 판초콜릿이 하나 있다. 이 판초콜릿을 뿔뿔이 낱개의 조각들로 나누려면 최소한 몇 번 쪼개야 할까? 단, 2개 이상 포개서 한 번에 쪼개지는 않는 것으로 한다.



1) 일단 충분히 몰입했던 문제는 며칠 혹은 몇 주간을 제쳐두더라도 무의식의 어떤 활동이 그 발명을 준비하며 이 시기를 부화기라고 부른다. J. Hadamard(1949)의 저서 '수학적 발명의 심리학'에서는 유명한 수학자 J. H. Poincaré의 경험을 예로 들어 부화 효과를 설명하였다.

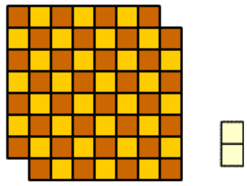
규칙을 지킨다면 어떤 방법을 이용하더라도 쪼개는 일은 정확히 19번 필요하다. 한 번 쪼갤 때마다 들고 있던 한 조각이 두 조각이 되므로 전체 조각 수는 정확히 하나씩 늘어나는데, 1조각이었던 것이 20조각이 될 때까지 19조각만큼 늘어야 하기 때문이다. 따라서 이 문제의 답은 19번이다. 이 퍼즐을 다루는 수업은 다음과 같이 진행될 수 있다.

교사: 자, 규칙은 알겠지? 한 조각씩만 들고 양쪽으로 뚝 잘라야 하는 거다. 몇 번 만에 할 수 있는지 도전해 보자!
학생: 19번 만에 되요.
교사: 어떻게 했니?
학생: 우선 가로로 길게 세 번 자르면 네 줄이 되요. 하나씩 붙들고 4번 끊으면 낱개로 쪼개지고, 다른 줄도 마찬가지예요. 3+4+4+4+4 이니까 19예요.
교사: 응 잘 하긴 했는데, 그건 너무 단순한 방법이잖아. 좀 더 머리를 잘 쓰면 횟수를 줄일 수 있단다! 누구 좀 더 횟수를 줄인 사람?
(학생들은 다시 시도를 하고, 때로 19번보다 적은 회수를 얻었다고 발표하기도 한다. 그러나 그 경우는 규칙을 잘못 이해한 경우이다.)
교사: 잘 안 되지? 사실은 어떻게 해도 19번밖에 안 나온단다.
학생들: 에이, 어쩐지!
교사: 하하, 미안. 왜 그런지 한 번 살펴볼까?

여기서 풀이의 극적인 제시를 위해 이용된 수단은 '의도된 속임수'와 '집단적인 시도'이다. 학생들은 횟수를 더 줄일 수 있다는 교사의 거짓말에 이끌려 많은 시도를 해 보게 된다. 이어, 자신 뿐 아니라 동료학생들의 결과도 항상 19번임을 관찰함으로써 교사의 말에 의심을 갖게 되고, 결국 답을 듣고 나서는 항상 19번이 되도록 하는 수학적 원리에 대한 깊은 감흥을 느끼게 된다. 자신과 동료 학생들의 시도 결과를 종합적으로 관찰하는 것은 한정된 수업시간을 효율적으로 활용하는 방법이라는데 장점이 있으며, 자기 혼자만의 시도를 통해 판단하는 것에 비해 '아무리 다양한 방법을 사용해도' 19번이 나올 것이라는 사실에 대한 보다 큰 확신을 심어준다.

다음의 '부서진 체스판' 퍼즐에 대해서도 이와 비슷한 방법으로 수업을 진행할 수 있다. 이 퍼즐은 특정한 모양의 블록으로 체스판을 덮는 유형의 많은 문제 중에서도 대표적인 것이다. 귀퉁이가 잘린 체스판을 덮는다는 목표가 흥미롭고 그 풀이가 매우 간단한 아이디어에 의존하고 있으므로, 이 문제는 가장 초보적인 수준의 퍼즐 서적에서도 종종 소개되고 있다.

체스판에서 대각선으로 마주보는 두 귀퉁이를 잘라 아래와 같은 모양을 만들었다. 이것을 도미노 (domino: 2×1 타일)들을 이용하여 빈틈없이 덮어라. 물론, 타일들이 겹쳐서는 안 된다.



이 부서진 체스판에서 도미노 하나는 검은 칸과 흰 칸을 각각 하나씩 덮는 반면 검은 칸과 흰 칸의 개수는 각각 32, 30개로 서로 다르다. 따라서 사실은 도미노로 이 체스판을 덮을 수는 없다. 그러나 교사가 '덮을 수 없음을 설명하라'가 아닌, '덮어보라'라고 문제를 제시함으로써 학생들은 여러 차례의 시도를 해 보게 된다. 자기 자신을 비롯한 모든 학생들의 도전이 실패로 돌아갔다는 결과로부터 학생들은 수학적 불가능성의 의미를 암묵적으로 인식할 수 있다. 교사의 설명은 학생들의 이러한 도전 후에 제시됨으로써 보다 극적으로 전달될 수 있다.

2. 시범적 시도와 관찰

악수의 상황은 간단한 정수론을 바탕으로 하는 많은 퍼즐 문제를 만들어준다. 대학수학과 관련시키자면, 이 문제들은 점과 그 연결 관계를 다루는 그래프 이론의 문제들로 번역될 수 있다. 예를 들어 다음의 두 퍼즐은 그래프이론 서적의 도입부에서도 종종 활용되는 문제이다.

> (1) 어느 파티에서, 파티가 시작하기 전에 각각의 사람들은 몇몇과 악수를 나누었다. 이 때 홀수 번 악수한 사람은 짝수 명 존재함을 보여라.
> (2) 파티에 6명의 손님이 참석했다. 파티가 시작하기 전 몇 사람끼리는 악수를 나누었다. 이 때 서로서로 악수를 한 세 사람 혹은 서로서로 악수를 하지 않은 세 사람이 존재함을 보여라.

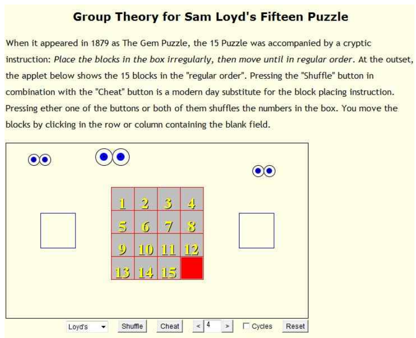
(1)은 하나의 악수는 두 사람이 한다는 사실 및 짝수와 홀수의 기본적인 성질을 바탕으로 쉽게 보일 수 있다. (2)는 비둘기집의 원리를 염두에 두고 적당히 경우를 나눔으로써 보일 수 있다. 교실수업에서는 이 두 퍼즐을 묶어서 다음과 같이 시범 학생들의 활동으로 제시함으로써 학생들의 참여와 흥미를 높일 수 있다.

> 교사: 이제, 앞에 나온 여섯 명은 마음 내키는 대로 악수를 합시다. '왠지 이 친구와는 악수를 해야겠다.'라고 생각되는 사람하고만 하면 되요. 그동안 나는 뒤 돌아서서 이 친구들 악수를 보지 않을 것인데, 보지 않고서도 두 가지 사실을 예언할 수 있습니다.
> 학생들: 두 가지가 뭔가요?
> 교사: 네, 칠판에 적겠습니다. "1. 홀수 번 악수한 사람은 짝수 명 있다. 2. 서로서로 악수를 한 세 사람 또는 서로서로 악수를 하지 않은 세 사람이 있다."
> (학생들의 악수가 끝난 후, 교사는 악수의 상황을 점과 그 사이의 선들로 만들어진 '그래프'로 추상화시켜 표현할 수 있음을 설명하고, 학생들과 함께 각 점의 지수를 확인하여 예언이 성립함을 확인한다.)
> 학생들: 우와!
> 교사: 정말 맞았지요? 사실, 저는 이 두 가지 사실을 100% 확신을 가지고 예언할 수 있었습니다. 왜 그럴 수 있었을까요?

그 이유는 교사가 두 사실에 대한 증명을 해 두었기 때문이다. 이와 같이 두 문제 각각의 주장을 예언의 맥락에서 제시하고 직접 실험으로 확인함으로써 학생들이 수학적 논증의 힘을 체득하도록 이끌 수 있다. 한편, 특별히 이 두 문제의 경우 이렇게 묶어서 제시하는 또 하나의 장점이 있는데, (1)은 꼭 6명이 아니라 임의의 사람 수에 대해서도 성립하는 명제인 반면 (2)는 6명 미만일 때는 성립하지 않는 명제인 바[2], 이 차이를 비교하며 수학적 일반화의 의미를 소개하고 논의할 수 있는 계기를 가질 수 있다는 것이다.

3. 컴퓨터 소프트웨어의 활용

컴퓨터에 친숙한 요즘의 학생들은 컴퓨터를 이용하는 활동에 큰 흥미를 보이는 경우가 많다. 인터넷상에는 수학퍼즐의 실험을 제공하거나 풀이의 보조 역할을 해 주는 많은 상호작용적인 소프트웨어들을 발견할 수 있다. 특히, 방대한 분량의 수학퍼즐 자료를 분야별, 수준별로 체계적으로 정리해 놓은 웹사이트인 Cut the knot (http://www.cut-the-knot.org/)에는 수많은 문제에 대해 자바 애플릿이나 플래시로 제작된 실험도구들을 제공한다 <그림 1>. 이 실험도구들은 학생들이 지치지 않고 여러 차례의 시도를 할 수 있도록 도와준다.



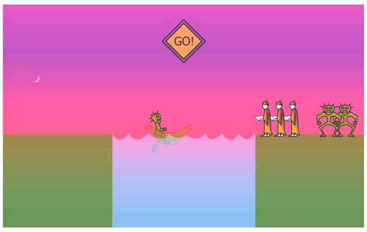
<그림1> 15퍼즐(http://www.cut-the-knot.org/)

퍼즐 소프트웨어들은 단지 문제 풀이 뿐 아니라, 교사의 의도에 따른 다양한 활동에 이용할 수 있다. 예를 들어 Plastelina(http://www.plastelina.net/)에서 볼 수 있는 '식인종과 선교사의 강 건너기 문제'[3]의 경우 학생들이 실험해가며 선교사가 잡아먹히는 조건을 스스로 찾아 친구들에게 설명하도록 할 수 있다. 조작을 통해 규칙을 발견하고 정리하여 의사소통하는 활동도 퍼즐 소프트웨어를 통해 도입할 수 있는 수학적 경험이다.

---

2) 예를 들어 5명인 경우 정오각형 모양의 그래프를 생각해 보면 (2)의 주장이 성립하지 않는다.

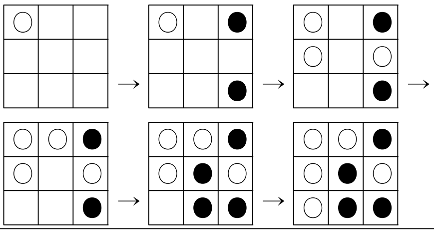
3) Plastelina에서는 플래시로 만든 다양한 논리퍼즐 소프트웨어를 제공한다. 유명한 '식인종과 선교사의 강 건너기'를 비롯하여 '무게가 다른 병 찾기', '성냥개비 퍼즐' 등 십 여 개의 퍼즐을 직접 조작해가며 풀 수 있다.



<그림 2> 식인종과 선교사의 강 건너기 문제 (http://www.plastelina.net/)

4. 게임과 경쟁의 활용

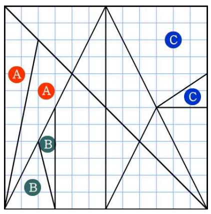
퍼즐 중에서도 게임의 형태를 띤 것, 특히 2명이 승부를 겨루는 게임은 학생들에게 흥미를 불러일으킬 수 있는 좋은 소재이다. 아래는 지필로도 즐길 수 있는 2인 대결 게임이다.

> 3×3 체커보드에 두 사람이 번갈아가며 말을 올리는데, 각 차례마다 하나의 행 혹은 하나의 열 안에서 말을 원하는 개수만큼 올릴 수 있다. 이때 마지막 즉, 아홉 번째의 말을 올리는 사람이 이긴다고 약속한다. 다음과 같이 진행된 게임에서는 선수(백)이 이겼다.
>
> 

이러한 2인 대결 게임의 경우 학생들에게 교구로 만들어진 말판 혹은 말판이 그려진 인쇄물을 제공하고 토너먼트 방식의 대회를 열어 학생들이 즐겁게 게임에 참여하도록 이끌 수 있다. 앞서 살펴본 것과 같은 웹 소프트웨어를 활용하는 것도 한 방법이 된다. 예를 들어 Mazeworks(http://www.mazeworks.com)에서는 Tactix, Hex, 토끼와 사냥개 등의 2인 대결 게임, 그리고 Fiver, 하노이 탑, Peg-solitaire 등의 1인 게임들을 다양하게 제공한다.

이러한 게임은 그 자체로 즐길 수 있으며, 그 과정에서 여러 가능한 경우를 모색하고 짧게나마 추론의 열을 만들게 되는 등의 교육적 효과가 있다. 그러나 이러한 게임들 속에는 보다 직접적인 수학적 문제가 내재해 있다. 우선, 2인 대결에서는 그 게임에 필승전략 즉, 상대가 어떻게 대응하던지 이길 수 있는 전략이 있는지, 있다면 무엇인지 찾는 문제가 발생한다. 예를 들어 1부터 출발하여 1개부터 3개까지의 수를 두 사람이 번갈아가며 부를 때 21을 부르게 되는 사람이 지는 게임의 필승전략은 널리 알려져 있다. 필승전략의 존재에 대한 일반적인 이론을 다루는 것은 어려운 일이지만 그에 대한 대략적인 설명은 이러한 게임을 많던 적던 해 왔던 학생들에게 흥미로운 이야깃거리이다. 위의 체커보드 게임의 경우 신중하게 경우를 나누고 대칭성을 고려하는 것으로 필승전략의 발견이 가능하며(Averbach & Chein, 2000), 이렇게 기초적인 수학 지식만으로도 필승전략의 설명이 가능한 또 다른 게임들이 다양하게 존재한다.

사실 단순한 게임으로부터 진지한 수학문제가 발견된 역사는 상당히 깊다. 고대 그리스 수학자 Archimedes의 저술 속에는 'Stomachion'이라는, 상대적으로 관심을 적게 받았던 논문이 실려 있었는데, 이 논문에는 우리나라의 칠교놀이와 비슷한 조각퍼즐에 대한 연구가 포함되어 있었다. 칠교놀이와 마찬가지로 이 조각퍼즐로 사람이나 코끼리 등의 여러 모양을 만들 수 있다.



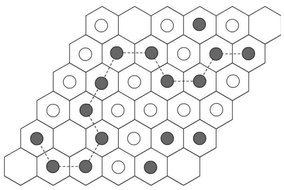
<그림 3> Stomachion.
(이렇게 12×12 격자판을 이용하여 만들 수 있다.)

이 논문은 앞부분의 극히 일부만 남아있었고 그마저도 많이 훼손되어 있었으므로 논문의 주제가 무엇인지 알 수 없었다. 그러나 최근의 연구를 통해 이 퍼즐에 대한 아르키메데스의 관심은 '이 조각들을 이용하여 처음과 같은 크기의 정사각형을 만드는 방법이 총

몇 개인가'라는, 역사상 최초의 전문적인 조합론 문제였음이 밝혀졌다(Netz & Noel, 2007). 유일하게 남아있던 그 논문의 첫 번째 정리는 조각들을 옮길 때 반드시 함께 붙어 다녀야 하는 조각들을 찾음으로써 문제를 단순화시키려는 것으로 판단할 수 있었다.[4)]

'Hex'라고 불리는 아래의 2인 대결도 학생들이 즐겁게 토너먼트전을 펼치기에 좋은 게임이다.

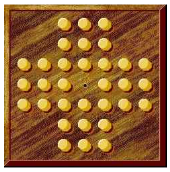
두 사람이 아래와 같은 정6각형 격자판 위의 빈 칸에 말을 번갈아가며 올린다. 흰 말은 위아래로의, 검은 말은 좌우로의 끊어지지 않는 열을 만드는 것이 목표이다. 먼저 열을 만드는 사람이 이긴다. (아래의 경우 검은 말이 이겼다.)



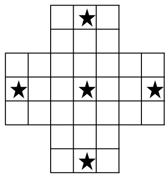
이 게임의 경우 필승전략의 존재조건을 만족하며, 먼저 두는 쪽에게 그 전략이 존재함은 밝혀져 있다. 그러나 큰 규모의 게임판에 대해서는 그 필승전략이 아직 발견되지 않았다. 그러나 게임을 충분히 즐긴 후 학생들 입장에서도 발견할 수 있는 수학적 문제가 하나 있는데, 이 게임에서 비기는 일 즉, 양쪽 모두 그러한 열을 만들지 못하는 경우는 없는데, 왜 그러한가 하는 문제이다.

'Peg-solitaire'라고 불리는 아래의 1인 게임에서는 한 말이 다른 말을 뛰어넘을 때, 뛰어넘음을 당한 말은 제거된다. 이것을 반복하여 최종적으로는 말을 하나만 남기는 것이 목표이다. 그런데 이 게임을 성공시켰을 때 남은 하나의 말은 그림 5의 다섯 개의 위치(대칭성을 고려하면 두 개의 위치) 중 하나에만 위치할 수 있으며, 왜 그러한지를 설명하는 것은 또 하나의 수학적 문제이다.

4) 그림 3에서 같은 기호가 붙여진 세 쌍의 조각 각각은 모든 답에서 그대로 붙어있어야 한다는 것이 정리의 내용이다. 따라서 원래 14개의 조각에 대한 것이었던 이 문제는 11개의 조각에 대한 문제로 단순화된다.



<그림 4> Peg-solitaire 퍼즐



<그림 5> 마지막 말의 가능한 위치

비록 모든 수준의 수업에서 그 풀이까지 다룰 수는 없겠지만, 이러한 수학 게임들 속에서 어떠한 수학적 문제를 발견할 수 있는지 학생들과 논의하는 것만으로도 유익한 수학적 탐구라 할 수 있다.

Ⅳ. 수학퍼즐 제시의 관점

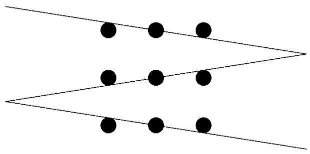
시중의 서적에서 수학퍼즐이 다루어질 때는 일반적인 수학문제와 다를 바 없이 문제와 답을 열거하는 방식으로 제시되는 것이 보통이다. 그러나 교육적인 관점에서 수학퍼즐은 소재의 친근함, 다양한 변형의 가능성, 그 개발 및 풀이에 관련된 수학자들의 일화 등으로 인해 수학에 관한 여러 가지 이야깃거리를 제공할 수 있는 가능성을 가진다. 수학퍼즐의 이러한 특징은 교사에게도 자신의 개성과 창의성을 발휘하여 문제와 그 풀이를 재해석하고 주체적으로 수업을 구성할 여지를 만들어 준다. 여기서는 몇 가지 예를 들어, 퍼즐을 통해 학생들과 수학에 관련된 어떠한 이야기를 할 수 있는지 살펴볼 것이다.

1. 수학적 대상의 특징

다음은 일반적으로 '발상의 전환'의 예로서 제시되는 수학퍼즐이다.

밭 전자(田)의 아홉 정사각격자점 위치에 점이 하나씩 놓여있다. 두 번 꺾어진 직선 하나로 이 점들을 모두 지나도록 하라.

조금 시도해 보면 일반적인 방법으로는 이런 일이 불가능함을 확신할 수 있다. 실제로 하나의 직선은 아홉 개의 점 중 기껏해야 3개만 지날 수 있고, 두 번 꺾어진 직선은 세 개의 직선으로 간주할 수 있다는 사실을 바탕으로 증명도 가능하다. 그러나 문제의 요구를 가능하게 하는 다음과 같은 해법이 있다.



<그림 6> 실세계의 점의 특징

이 풀이를 알려주고 나면 학생들은 "에이, 이게 뭐예요!" 하고 속았다는 반응을 보인다. 그러나 좀 더 생각해 보면 이 풀이는 학생들을 속인 것이라고 할 수 없다. 실세계에서는 아무리 작은 점이라도 그 크기가 있으며(즉, 격자점을 중심으로 하는 작은 원을 포함하며), 따라서 점들이 격자점 위치에 정확히만 배치되어 있다면 이런 일은 반드시 가능하기 때문이다.

실세계의 성질을 바탕으로 하는 이 풀이에 당혹해하는 학생들의 반응은, 그들이 이미 이상화된 점, 선, 직선, 그리고 그것들이 놓이는 평면을 머릿속에 가정하고 있었음을 보여준다. 학생들의 머릿속에서 점이란 예컨대 "위치만 있고 크기는 없는" 대상이었을 것이다. 이런 일이 가능한 것이 학생들이 학교수업을 통해 훈련을 받았기 때문일지, 혹은 공간을 해석하는 사람의 천부적인 능력 때문일지 판단하는 것은 어렵지만, 수학적 대상이란 지금 학생들의 머릿속에 있는 바와 같이 이상화된 것이고, 사람에게는 그런 대상을 다룰 수 있는 능력이 있다는 것을 이 퍼즐은 보여준다(홍갑주, 2006). 이러한 점에서 이 퍼즐은 단지 발상의 전환을 보여주는 것 이상의 이야깃거리를 담고 있다.

2. 다양한 풀이 방법의 가치

다음의 퍼즐은 수학자 John von Neumann과 관련된 일화로 유명하다.

시속 50km로 달리는 두 열차가 하나의 선로의 양쪽에서 마주보고 접근하고 있다. 그 중 한 열차의 앞 유리창에 파리 한 마리가 앉아 있다가 열차 사이의 거리가 100km일 때 날기 시작하여 양쪽 열차 사이를 왔다 갔다 한다. "맞은 편 열차를 만나면 돌아서고, 또 맞은 편 열차를 만나면 돌아서고.." 하기를 반복하는 것이다. 파리의 속력이 시속 70km라 할 때 두 열차가 충돌할 때까지 파리가 날아다닌 거리는 총 얼마인가?

계산을 통해 이 문제를 풀기 위해서는 우선 이 상황에서 무한등비급수가 얻어진다는 것을 알아야 하고, 또 그 급수의 합을 구해야 한다. 따라서 초등학생이나 일반 대중은 풀 수 없는 문제가 되어버린다. 그러나 다음과 같이 기발한 착상에 의한 '쉬운' 풀이가 알려져 있다.

두 열차가 충돌할 때까지는 1시간 걸린다. 파리는 시속 70km라는 일정한 속력으로 날고 있으므로 그 1시간동안 70km 날았어야 한다. 그래서 답은 70km.

Neumann과 관련된 일화란 다음의 것이다. 동료 수학자가 위의 방법을 염두에 두고 그에게 이 문제를 냈는데, 아니나 다를까 그는 단지 몇 초 만에 정확한 답을 제시하였다. 문제를 냈던 수학자는 Neumann의 천재성에 다시 한 번 놀라며, "역시 자네답군! 어떻게 풀었나?"라고 물었다. 그의 대답은 "그야 무한등비급수의 합을 구했지."

Neumann의 방법대로 이 문제를 풀기 위해서는 일단 파리가 다음 번 열차에 닿을 때까지 날아간 거리들의 수열이 등비수열임을 알아야 하고, 다음으로 초항과 공비를 구해야 한다. 계산에 천부적인 능력이 있던 Neumann의 입장에서는 무한등비급수의 합을 계산하는 것이야 말로 가장 쉬운 풀이였을 수 있다. 이렇게 수학 문제를 푸는 방법은 하나가 아니며, 사람에 따라 쉬운 풀이와 어려운 풀이가 다를 수 있다. 인지심리학의 용어로 말하자면, 어떤 사람에게는 통찰 문제[5]인

5) 하나의 핵심적 통찰에 의해 해결되는 문제를 뜻한다.

것이 어떤 사람에게는 비통찰 문제일수도 있는 것이다.

또 한편으로 다음과 같은 시사점도 생각할 수 있다. 쉬운 풀이를 이해하고 나면 어려운 풀이는 더 이상 생각하지 않는 것이 보통이다. 그러나 수학을 공부하는 입장에서는 멋진 아이디어를 발견하는 것 못지않게, 관련된 일반적인 이론을 찾아내고 적용하는 것도 중요하다. Neumann의 풀이는 비록 계산에 의존하고 있지만 그 역시 수치적 변화에 대한 일종의 통찰에 의한 것이라고 볼 수 있다. 이 일화는 기발한 아이디어의 중요성을 보여주는 동시에, 오히려 '쉽게 푸는' 방법을 생각해 내더라도 '어려운' 풀이 방법도 이해하려는 노력이 필요함을 시사한다.

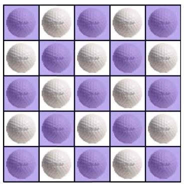
3. 수학적 증명의 의미

다음은 앞에서의 체스판 문제와 비슷하게, 생각을 보조하기 위한 색이 문제 해결에 도움이 되는 경우이다.

5×5칸으로 되어있는 상자의 각 칸마다 공들이 들어있다. 모든 공이 그 옆자리(전, 후, 좌, 우) 중 어딘가로 옮겨진 상태로 바꾸어놓으려고 한다. 그럴 수 있을까?

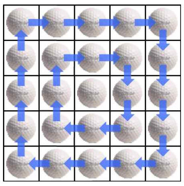
답은 다음과 같다.

이 공들을 다음과 같이 분류할 때, 흰 칸의 공은 검은 칸으로, 검은 칸의 공은 흰 칸으로 가야 한다. 그러나 흰 칸은 12개, 검은 칸은 13개. 개수가 다르므로 그렇게 옮길 수는 없다.



<그림 7> 공 옮기기 문제의 핵심 아이디어

초등영재원 수업에서 이 문제에서 요구하는 위치 바꿈이 불가능함까지는 알려준 이후에, 학생들이 제시하는 풀이는 대부분 다음과 같은 식이다. "이렇게 밖으로 한 바퀴 돌고, 그 안쪽에서 한 바퀴 돌아도 가운데 하나가 남아요." <그림 8>



<그림 8> 학생들의 전형적인 풀이

나름대로의 올바른 관찰을 담고 있지만, '다른 방법으로는 될 가능성이 있으므로' 이 설명은 완전하지 못하다. 실제로 교사는 다른 방법을 예로 들어 보이며 그 방법 역시 실패적임을 확인하고, 학생들에게도 또 다른 이용 가능한 방법을 묻고는 마찬가지로 실패적임을 확인할 수 있다. 이와 같이 여러 시도가 실패로 돌아감을 확인하고, 이렇게 모든 경우를 찾아 일일이 시험해 보는 것은 매우 힘든 일임을 지적한 후 위의 풀이를 제시함으로써 수학적 논증의 의미와 문제 전체에 대한 통찰의 가치를 느끼게 해 줄 수 있다. 수학을 다른 학문과 구별 짓는 가장 큰 특징 중 하나는 논리적 증명이다. 퍼즐은 이와 같이 학생들 스스로의 여러 시도를 바탕으로, 다른 가능성을 봉쇄하는 방법으로서 수학적 증명을 자연스럽게 도입하는 소재가 될 수 있다.

Ⅴ. 결 론

본 연구에서는 수학퍼즐의 의미와 교육적 가치를 고찰하고 수학퍼즐을 어떤 관점에서 어떤 수업방법으로 다룰 수 있을 것인지를 몇 가지 예를 통해 살펴보았다. 수학퍼즐을 단지 에피소드가 아니라, 즐거운 한편으로 진지한 수학 주제로서 의미 있게 다루기 위해서는 각각의 퍼즐에 내재한 수학적 사고와 지식에 대한 깊은 이해와 함께, 그것을 통해 학생들에게 감흥을 느끼게끔 해 주는 심리적 과정에 대한 고려가 있어야 한다는 입장에서 이 예들은 구성되었다.

수학퍼즐은 수학과 관련된 여러 수업에서 수학에 대한 흥미를 불러일으키기 위한 소재로서 활용될 수 있다. 그러나 수학퍼즐은 그 다양함과 진지함, 그리고 무엇보다 변형과 해석에 대해 열려있는 특징으로 인해 수학 그 자체의 학습을 위해, 혹은 수학이라는 학문의 특징을 보여주기 위해 활용될 수 있는 풍부한 가능성

도 가진다. 특히, 수학이라 하면 계산만을 떠올리는 학생들에게 수학퍼즐은 수학에 대한 그들의 인식을 개선하는데 도움이 될 것으로 보인다. 또한 초등예비교사들에게 수학퍼즐은 학교수학과 전문적인 수학 사이에 위치하며 수학적 사고방식을 체득하게 해 주고 수학의 즐거움에 대한 확신을 심어주는데 좋은 소재가 될 것이다.

일상적인 학교수학을 보완해주는 측면에서, 수학퍼즐을 통해 얻을 수 있는 가장 가치 있는 경험은 '수학에 있어서의 여유'라고 압축적으로 표현할 수 있을 것이다. 수학퍼즐은 한 문제를 붙들고 여러 가지 조작을 통해 많은 시행착오를 해 보는 여유를 학생들에게 제공한다. 그리고 퍼즐과 그 풀이를 극적으로 제시하기 위해 자신의 개성과 창의성을 발휘하는, 때로는 유머와 속임수도 동원하는 여유를 교사들에게 제공한다. 수학을 만들어 온 원동력은 결국 수학을 만들어온 사람들이 느꼈을 수학의 즐거움이겠지만, 수학을 공부하는 학생들, 그리고 가르치는 교사들이 실제로 이러한 즐거움을 느낄 기회는 많지 않다. 수학퍼즐은 그에 내재한 수학적 원리를 감싸는 인간적인 각색을 통해 수학도 역시 우리와 같은 사람이 만든 것임을 느끼게 해준다. 그 각색을 통해, 문제를 만든 사람이 느꼈을 즐거움과 놀라움을 문제 풀이자도 직접적으로 공유할 수 있다. 교육계의 안팎으로 개개인의 창의성이 강조되고 있는 이때, 수학퍼즐은 학생들 뿐 아니라 그것을 지도하는 교사들에게도 좀 더 자유로운 수업 분위기 속에서 자신의 창의성을 발휘하고 수학에 대한 새로운 이해를 제공할 기회를 제공할 것이다.

퍼즐의 이러한 긍정적인 측면을 고려하면, 퍼즐을 단편적으로 제시하는데 그치지 않고 퍼즐을 기반으로 자연스럽게 특정 수학 주제를 학습하는 교육과정의 개발을 시도해 볼 가치가 있다. 이때 퍼즐들을 어떠한 주제로 엮어 배치하고 어떠한 방식으로 수업을 진행할 것인가에 대한 교사의 많은 고민이 필요할 것이다. 수학퍼즐의 가치에 대한 공감이 커지고 여러 수학교육 현장에서 적극적으로 활용되기를 기대한다.

참 고 문 헌

홍갑주 (2006). 퍼즐로 배우는 수학, 수학으로 배우는 퍼즐(3). 한국수학교육학회지 뉴스레터, **22(6)**, 14-15.

藤村幸三郎 (1980). *パズル數學入門*. 東京: 講談社. 임승원 역(1995). 퍼즐수학입문. 서울: 전파과학사.

Anderson, J. R. (1995). *Cognitive psychology and its implications*. New York: Freeman and Company. 이영애 역(2000). 인지심리학과 그 응용. 서울: 이화여자대학교 출판부.

Archer, A. F. (1999). A modern treatment of the 15 puzzle. *The American Mathematical Monthly*, **106(9)**, 793-799.

Averbach, A., & Chein, O. (2000). *Problem solving through recreational mathematics*. New York: Dover.

Eastaway, R. (1997). What is the difference between a puzzle and a maths question?. *Teaching mathematics and its applications*, **16(1)**, 1-4.

Flannery, S, & Flannery,D. (2000). *In code:A mathematical journey*. London: Profile books. 김진수 역(2000). 사라와 함께하면 수학이 즐겁다. 서울: 나노미디어.

Hadamard, J. (1949). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press. 정계섭 역(1990). 수학 분야에서의 발명의 심리학. 서울: 범양사.

Netz, R., & Noel, W. (2007). *The archimedes codex*. Da Capo Press.

Polya, G. (1954). Mathematics and plausible reasoning (vol.1): Induction and analogy in mathematics. *Princeton*, New Jersey: Princeton University Press.

Polya, G. (1957). *How to solve it. Princeton*, New Jersey: Princeton University.

How to Present Math Puzzles in Classroom

Hong, Gap ju
Dept. of Mathematics Education, Busan National University of Education, Busan 6111-736, Korea
E-mail : gapdol@empal.com

The purpose of this study is to discuss the way and the purpose of presenting math puzzles in classroom. Firstly, the characteristics of math puzzles are discussed and the various uses of math puzzles are looked for. Secondly, The author illustrates models of classroom teaching with puzzles. Thirdly, The author discusses what subjects of mathematics could be dealt with in the math puzzle classroom. Finally, The author indicates that the teaching with math puzzles give chance of feeling ‘mathematical composure’ not only to students but also to teachers.

* ZDM Classification : A23
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : Creativity, Math game, Math puzzle