韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2011. 4. 제 14권, 제 1호, 27-41

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Apr. 2011, Vol. 14, No. 1, 27-41

유클리드의 자료론(The Data)과 분할론(On Divisons)에 기초한 수학교육에서 분석과 종합에 대한 고찰[1)]

서 보 억 (대구가톨릭대학교)

본 연구는 분석과 종합에 대한 역사적 출발이라고 볼 수 있는 유클리드의 저작인 '자료론'과 '분할론'에 대한 분석 연구이다. Euclid의 원론에 비해 거의 관심이 없는 두 문헌에 대한 분석을 통해 사고활동으로서의 분석 및 종합에 대한 의미를 살펴보았다. 먼저 분석, 종합이 포함된 다양한 용어들에 대한 개념을 살펴보고, 이를 바탕으로 본 연구에서 사용한 분석과 종합의 개념을 명확화하였다. 또한 두 문헌에 제시된 명제에 대한 분석을 통해 분석은 '외재적 분석'과 '내재적 분석'으로 분류하였는데, 외재적 분석은 제시된 명제에 자체에서 외형적으로 드러난 수학적 대상, 요소, 성질, 속성에 대한 분석이고, 내재적 분석은 외재적 분석의 결과로 추출된 수학적 대상, 요소, 성질, 속성에 대한 재분석 혹은 결합 및 관련성의 추출을 통한 분석이다. 종합은 '이론적 종합'과 '경험적 종합'으로 분류하였는데, 이론적 종합은 경험보다는 논리적, 이성적 과정을 통한 새로운 대상의 추출이고, 경험적 종합은 과거의 학습 경험과 이에 대한 활용을 통한 대상의 추출이다. 이러한 분류를 기초로 하여 초등학교 교과서에 제시된 문제를 통해 실제 적용하여 탐색하였다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

학교교육에서 수학을 잘 하는 것의 중요성에 대해 학생, 학부모, 교사 모두가 인식하고 있다. 반면 수학을 배움으로써 얻을 수 있는 교육적인 효과가 무엇인가에 대한 질문에 대해서는 크게 주목하지 않는다. 일반적으로 수학을 배움으로써 수학적인 사고능력을 높일 수 있다는 말을 흔히 한다. 여기서 수학적 사고능력은 다양한 부분으로 해석할 수 있지만 일반적으로 학습심리학자들은 수학을 통해 분석, 종합적인 사고능력을 함양시킬 수 있다는 공통된 생각을 지니고 있다. 따라서 수학교육에서 분석과 종합적인 사고에 대한 정확한 이해는 수학교육의 중요한 목적 중의 하나인 논리적 사고력을 향상에 큰 기여를 한다고 볼 수 있고, 특히 고대 논리적 수학의 발생 시대에 해당하는 고대 그리스의 문헌을 통한 분석과 종합에 대한 수학교육적 고찰은 큰 의미를 가지는 연구임에 분명해 보인다.

한인기(2006)는 분석과 종합을 사고의 최소단위이자 가장 기본적인 사고활동이라고 보고 있다. 이것은 분석과 종합을 통해서 수학적 활동이 출발하고 이것으로부터 문제해결을 위한 중요한 방향설정을 수립할 수 있는 것을 의미한다.

또한, 분석과 종합은 수학교육의 중요한 근간이 되는 일반화와 추상화를 생성해내는 기저가 된다. 먼저, 추상화는 현상이나 대상에서 본질적인 것을 감추고 비본질적인 것들을 분리시키는 분석이라는 사고활동을 통해서 가능하다. 그리고 일반화는 경험적인 일반화와 이론적인 일반화로 세분화될 수 있는데, 경험적인 일반화는 비교가 중요한 역할을 수행하게 되고 이 비교는 분석을 통해서만 가능하다. 이론적인 일반화는 분석과 종합을 통해 객체의 본질적인 성질을 추출해냄으로 이루어진다.

러시아의 수학교육학자 Krutetskii(1976)는 수학적 재능에 대한 연구에서 개인차를 유발하는 개인의 심리적인 특성에 대해 분석하였는데, 이러한 개인의 심리적인 특성을 문제 해결을 위한 정보수집단계, 정보처리단계, 정보기억단계로 세분화하여 추출하였다. 특히, 정보수집단계에서 개인의 심리적인 특성을 유발하는 가장 중요한 변인으로 분석-종합적인 지각을 제시하였다. 따라서 교육인적자원부(2007)의 개정교육과정의 모토인 개인차를 고려한 수준별 수업의 활성화를 위해서라도 사고활동으로서 분석과 종합에 대한 이해는 중요한 연구 가치를 지니고 있다.

---

* 접수일(2011년 3월 14일), 수정일(2011년 4월 21일), 게재확정일(2011년 4월 25일)
* ZDM 분류 : C33
* MSC2000 분류 : 97C30
* 주제어 : 분석, 종합, 자료론, 분할론, 기하
1) 이 논문은 2010년도 정부재원(교육과학기술부 인문사회연구역량강화사업비)으로 한국연구재단의 지원을 받아 연구되었음(NRF-2010-332-B00419).

수학교육자 Polya(우정호, 2006에서 재인용)는 수학교육은 수학적 사고, 즉 수학을 하는 정신적 활동의 교육이라고 보았다. 그는 훌륭한 교육은 학생들에게 독자적인 발견의 기회를 체계적으로 제공하는 것이라고 보고, 이것을 수학적 발견술이라고 하였다. Polya는 수학적 발견술 가운데 가장 강력하고도 오래된 것은 분석법이라고 하였고, 이러한 분석법을 위한 기본적인 사고활동으로 분석과 종합이 중요한 역할을 감당하고 있다.

이처럼 분석과 종합과 관련된 다양한 활동은 수학교육에서 매우 가치 있는 것으로 볼 수 있으며 이에 대한 정확한 분석은 학문적인 가치가 큰 것으로 볼 수 있다.

그런데 분석과 종합에 대한 의미를 찾기 위해서는 이것의 역사적인 발생에서부터 살펴보는 것이 필수적인 과제이다. 분석과 종합의 역사적인 기원은 고대 그리스 시대부터임은 분명해 보인다. 실제로 고대 그리스 시대부터 분석과 종합이라는 두 사고 활동을 자유롭게 사용한 것으로 보여 지고 있다.

고대 그리스의 수학자들 중에서 지금까지 가장 큰 영향을 끼치고 있는 수학자 중의 한 사람은 Euclid이다. Euclid는 '원론(The Elements)'의 저자로 잘 알려진 당대 최고의 수학자이다. 그의 원론은 20세기 초까지 학교의 교재로 사용된 거의 유일한 수학교과서라 할 만큼 오랫동안 사용되어져 왔고, 이로 인해 Euclid와 원론을 동일시 할 만큼 거의 대다수의 사람은 원론을 잘 알고 있지만 Euclid의 다른 저작에 대해서는 그렇지 않는 것 같다. Heath(1981)에 따르면 '자료론(The Data)', '분할론(On divisions)', '오류론(Pseudaria)', '원추곡선론(Conics)', '곡면자취론(Surface loci)', '천문현상론(Phaenomena)' 등이 Euclid의 저작으로 전해지지만 우리가 유독 원론만을 잘 알고 있는 것은 다른 저작들의 내용이 수학적 가치가 적기 때문이 아니라, 워낙 원론의 수학적 가치가 높기 때문이다. Heath(1981)에 따르면 Pappus는 고대 그리스의 '분석의 보고(The treasury of analysis)'라는 33권의 책 목록을 작성하면서, '자료론'을 맨 위에 올려 놓았을 만큼 자료론에 대한 수학적 가치를 높게 평가하고 있었다.

지금까지 분석과 종합과 관련된 활동이 수학교육에서 중요한 가치를 가지고 있음을 살펴보았고, 이러한 분석과 종합에 대한 수학적인 본질을 찾기 위해 논증수학의 근원인 고대 그리스 시대의 유클리드의 저작에 대해 언급하였다. Euclid의 수학에 대한 저작들 중 원론을 제외한 나머지 두 저작 즉, 자료론과 분할론에 대해서는 별 관심이 없음을 살펴보았다. 따라서 수학교육에서 중요한 가치를 가지는 분석과 종합에 대한 본질의 파악을 위해 그 기원이라고 볼 수 있는 고대 그리스의 저작에 대한 분석은 중요한 문제임을 알 수 있었다. 특히 연역적 전개의 대표격인 원론의 저자인 Euclid가 '자료론'과 '분할론'에서 보여주고 있는 '분석'과 '종합'을 통한 문제해결과정 및 증명과정에 대한 학문적인 탐구는 매우 필요한 실정이다. 이러한 필요성에 의해서 본 연구에서는 분석과 종합에 대한 의미를 명확히 하는 것과 더불어 Euclid의 자료론과 분할론을 구체적으로 분석하여 수학교육 특히, 기하교육에서 사고활동으로서의 분석과 종합에 대한 체계화를 본 연구의 목적으로 한다.

2. 연구내용

위의 연구의 목적과 필요성에 따라 본 연구의 연구내용은 아래와 같다.

첫째, 문헌 분석을 통해 수학교육에서 분석 및 종합과 관련된 용어의 의미를 명확히 한다.

둘째, 자료론과 분할론에 제시된 명제의 고찰을 통해 사고활동으로서 분석 및 종합에 대한 개념을 체계화한다.

Ⅱ. 분석과 종합

이 장에서는 본 연구의 목적인 분석과 종합에 대한 의미의 명확화를 위해 첫째, 분석과 종합이라는 단어를 포함하는 다양한 용어에 대한 다양한 문헌 분석 결과를 통해 관련된 용어의 체계화 결과를 제시하고, 둘째, 본 연구와 직접 관련이 있는 분석과 종합에 의미를 도출한다.

1. 분석, 종합과 관련된 용어의 체계화

수학교육에서 사용되어지는 다양한 용어들 중에 개념적인 혼돈을 일으키는 것들이 있는 것 같다. 예를 들어, 러시아의 수학교육자인 Krutetskii(1976)의 저서

인 'The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren'에서 사용된 'Ability'는 국내에서는 능력으로 번역되기도 하고, 재능으로 번역되기도 한다. 그런데 능력과 재능의 혼재된 사용은 이미 우리 인지 속에 내재된 선개념과 더불어 개념의 이해에 큰 어려움을 야기시키는 것으로 보인다. Krutetskii의 'Ability'를 현재 수행 가능한 것으로 보느냐, 잠재적으로 수행 가능한 것으로 보느냐의 차이는 매우 중요한 문제이기 때문이다.

본 연구에서 다루고자 하는 분석과 종합도 이와 유사한 문제에 처해있는 것으로 판단된다. 실제로 서보억(2006)이 이러한 이유로 인해 분석과 종합의 차이를 규명하려고 노력한 것으로 보인다.

수학교육학 관련 서적을 통해 살펴보면, 분석과 종합과 관련된 용어의 사용을 아래 <표 1>과 같이 정리할 수 있다.

<표 1> 분석 및 종합 관련 용어

구 분	관련된 용어
분 석	분석(해석), 분석적(해석적) 사고, 분석법, 분석적 방법, 분석적 증명, 발견적 전개
종 합	종합, 종합적 사고, 종합법, 종합적 방법, 총합적 방법, 종합적 증명, 연역적 전개

Reuben(1997)은 데카르트의 '정신 지향의 규칙(Rules for the direction of the mind)'에서 이를 인용하면서 '처음 원리들은 그 자체로 직관에 의해서만 주어지고, 반면에 멀리 떨어진 결론들은 이와 반대로 추론에 의해서만 제공된다. 이 두 가지 방법은 지식에 이르는 가장 확실한 길이다.'라고 하였다. 여기서 말하는 두 가지 방법은 해석적 방법과 종합적 방법을 지칭하고 있다. 구체적으로 종합적 방법은 유클리드의 방법으로 공리에서 출발하여 추론을 거쳐 정리에 도달하는 것이고, 해석적 방법은 문제에서 출발해서 그것을 '해석' 해서 답을 찾는 것을 의미한다. Reuben은 여기에 덧붙여 해석적 방법은 발견적 방법과 동일시하고 있다.

한인기(2003)와 Eves(1990)는 Pappus가 남긴 수학집성(Mathematical Collection)을 언급하면서 고대의 '분석'과 '종합'에 대한 내용을 기술하였다. 여기서 수학 명제 기술 방법과 논증 방법으로서 종합적 방법과 분석적 방법을 제시하였다. 종합적 방법에 대해, '어떤 정리를 증명하기 위해 유클리드는 타당성이 이미 알려진 명제들, 문제의 가정에 기초하였는데, 얻어진 명제로부터 새로운 결과를 얻는 과정을 반복하여 최종적으로 증명하려는 명제에 도달할 때까지 이러한 과정을 반복하였는데 이러한 방법을 종합적 방법이다'라고 제시하였고, 분석적 방법에 대해서는 '종합적 방법과 반대의 방법으로, 증명하려는 명제를 옳다고 혹은 증명된 것으로 받아들이고 이로부터 새로운 결론은 얻는 과정을 반복하여 참임이 알려진 결론을 얻을 때까지 계속하는 것이다'고 제시하였다.

Boyer(1991)는 Riemann의 해석학을 언급하면서 '그가 사용한 증명도 반증도 할 수 없었던 여러 수학적 대상에 대한 추측을 통해 새로운 수학을 창조하려는 방법'을 발견적 방법이라고 하였다. 또한 Boyer의 수학사에 대한 국내 역서를 보면, Pappus가 제시한 분석의 보고(Treasury of Analysis)을 언급하면서, 분석에 대해 '찾아서 구하는 사항을 마치 그것이 인정되는 것처럼 받아들여 그로부터 출발하여 결과를 차례로 찾아 종합적으로 인정되는 것으로 되돌아가는 방법'이라고 설명하였고, 종합은 분석의 반대라고 하였다.

Erdniev, 한인기(2005)는 사고 과정으로는 분석과 종합을 제시하고 있다. 분석과 종합은 사고 활동을 구성하는 가장 기본적이고 주요한 사고 조작으로 보았다. 분석이란 '전체를 부분들, 요소들로 분해하거나 전체에서 개개의 속성, 측면을 분리하는 사고 조작을 의미한다'고 밝혔고, 종합이란 '대상이나 현상의 부분들을 연결시키는 사고 조작 또는 대상이나 현상의 속성들, 측면들을 결합시키는 사고 조작을 의미한다'고 주장하였다.

한인기(2006)는 Rubinstain의 연구결과를 언급하면서 사고 과정은 분석과 분석하여 추출된 것들을 종합이 가장 근본적인 사고 과정이라고 하였다. 여기서 분석은 '전체를 부분들, 요소들로 분해하거나 전체에서 속성들, 징표들, 측면들, 연결 및 관련성들을 추출하는 사고 조작'이라고 보았고, 종합은 '전체에 대한 분석을 통해 얻어진 부분들을 연결시키는 사고 조작 또는 대상의 속성들, 측면들, 연결성 및 관련성을 결합시키는 사고조작'으로 보았다.

Dreyfus(1991)은 종합은 '부분들을 결합하고 구성하여 전체적 실체를 형성하는 것', '각각의 사실들은 상호관련을 맺어 하나의 상으로 합쳐지는 과정'이라고 보

았다.

이강율, 성현경, 정동권, 박영배(1993)와 Mayer와 Hegarty(1996)는 분석적 사고와 종합적 사고를 언급하였다. 분석적 사고는 '작도문제에만 국한 되는 것은 아니고, 어떤 문제를 풀 때 먼저 해답이 얻어졌다고 가정하여 그 성질을 알아보고 그 성질로 해답을 탐색하는 방법', '구하려는 것이 얻어졌다고 하면 어떤 사실이 성립하지 않으면 안 되는가라는 생각을 전개해 나가는 사고 방법'이라고 하였다. 종합적 사고 혹은 총합적 사고는 '해답이 제시되고, 그것이 주어진 문제의 답임을 순차적으로 증명하는 방법', '주어진 조건으로부터 무엇을 말할 수 있는가, 또는 어떤 사실이 성립하는가라는 방향으로 사고를 전개해 가는 방법'이라고 하였다.

Petrovskii(1993)는 인간행동의 심리학에서 분석이란 '한 대상을 구성요소로 분리하는 것, 대상의 측면, 요소, 속성, 연관, 관계 등을 전체로부터 추상하는 것'이라고 정의하였고, 종합이란 '분석에 의해 분리된 요소들로 전체를 재건하는 것', '인지하는 동안 대상으로부터 분리된 요소들을 통합하고 상호관련 시키는 것'이라고 정의하였다.

우정호(2006)은 발견술의 대표적인 방법으로 분석법을 제시하였다. 그러면서 분석은 '하도록 요구하고 있는 것을 이미 이루어진 것처럼, 구하고 있는 것을 이미 찾은 것처럼, 증명해야 할 것을 참인 것처럼 가정하고, 그 다음 선행하는 어떤 것으로부터 바라는 결과가 유도될 수 있는가를 묻고 다시 그 선행자의 선행자는 무엇인가 묻기를 계속하여 결국 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 것에 이르게 하는 과정'이라고 서술하였고, 종합은 '분석의 과정을 거꾸로 하여 분석에서 마지막에 도달한 지점, 곧 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 명제로부터 출발하여 분석과정을 거꾸로 되밟아 감으로써 마지막에 요구하는 명제에 도달하는 연역과정'이라고 서술하였다.

Kalmykova(1975)와 한인기(2001)은 종합적 방법은 문제에 제시된 구체적인 자료(주어진 것)를 출발점으로 하여 미지의 것을 찾아 가는 것이고, 분석적 방법은 미지의 것(구해야할 것)을 출발점으로 하여 주어진 자료로 진행해 가는 것이라고 하였다.

이상과 같이 분석, 종합이라는 용어와 관련이 있는 다양한 용어의 사용에 대한 문헌 고찰 내용을 제시하였다. 고찰을 통해 나타난 한 가지 의문은 분석, 분석법의 혼재된 사용과 종합, 종합법의 혼재된 사용을 발견할 수 있었다. 즉, 분석과 분석법, 종합과 종합법에 대한 용어의 사용이 명확하지 못하다는 것이다. 그 이유는 심리학에서 분석, 종합과 발견술에서의 분석, 종합이 서로 다른 의미로 사용되고 있기 때문으로 판단된다.

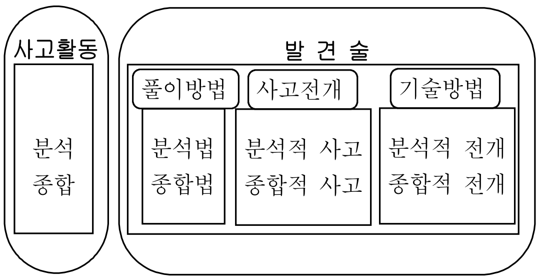
수학교육에서 수학학습심리학은 매우 중요한 의미를 가지고 있다. 따라서 발견술에서의 사용과의 혼돈을 피하기 위해 다음과 같이 용어에 대한 개념을 체계화하고자 한다(<그림 1> 참고).

첫째, 문제해결을 위한 사고 과정에서 나타난 사고활동의 유형으로서는 분석(analysis), 종합(synthesis)이라고 하는 것이 타당할 것으로 보인다. 더불어 해석이라는 용어는 분석으로, 총합이라는 용어는 종합으로 통일하여 사용하도록 한다.

둘째, 발견술의 한 방법으로서 문제해결 및 증명의 풀이방법의 유형에 대한 분석과 종합은 분석법(analytic method), 종합법(synthetic method)으로 하여 사고 과정으로서의 분석과 종합과의 혼돈을 피하는 것이 타당할 것으로 보인다. 이에 따라, 풀이방법의 유형으로 분석적 방법, 종합적 방법, 증명방법의 유형으로 분석적 증명, 종합적 증명으로 하는 것이 타당할 것이다.

셋째, 풀이방법을 찾아 가는 사고의 전개 방법의 유형으로 분석적 사고(analytic thinking), 종합적 사고(synthetic thinking)로 보고, 풀이방법을 구체적으로 서술하거나 기술하는 방법의 유형으로 분석적 전개(analytic description), 종합적 전개(synthetic description) 혹은 발견적 전개, 연역적 전개로 하는 것이 타당할 것으로 보인다.

이상의 결과로부터 분석과 종합과 관련된 용어를 체계화하여 <그림 1>과 같이 나타내었다.



<그림 1> 분석 및 종합 관련용어의 체계화

2. 분석과 종합에 대한 고찰

본 연구의 수행에 기본이 되는 분석과 종합에 대한 의미를 보다 구체화하기 위해 다양한 문헌을 분석하였다.

먼저, Rubinstain(한인기, 2006 재인용)은 분석과 종합은 사고 활동을 구성하는 가장 기본적이고 주요한 사고 조작으로 보았다. 또한 분석과 종합은 동일한 사고 과정의 두 측면으로서 서로 연결되어 있는 것으로 보았다. 즉, 분석과 종합은 한 가지 과정에 대한 두 가지 측면으로 볼 수 있다는 것이다.

둘째, Dreyfus(1991)에 의하면 종합은 부분들을 결합하고 구성하여 전체적 실체를 형성하는 것을 의미한다. 이 전체는 흔히 부분들의 합보다 훨씬 더 크다. 예를 들어, 선형대수에서 학생들은 벡터의 직교화, 행렬의 대각화, 기저의 변환, 일차연립방정식의 해 등 아주 많은 개별 사실들을 배운다. 학습 과정의 후반부에서 그 때까지 배운 이러한 서로 무관해 보이는 사실들은 하나의 상으로 합쳐진다. 그 속에서 각각의 사실들은 상호관련을 맺게 된다. 이와 같이 하나의 상으로 합쳐지는 과정이 종합으로 보고 있다.

셋째, Erdniev 외(2005)에 의하면, 어떤 대상의 분석은 대상의 붕괴로 귀착되는 것이 아니라, 대상의 변형으로 연결된다. 이러한 변형, 즉 분석에 의해 분리된 요소들은 새로운 방식으로 연결시키는 것이 종합이다. 따라서 분석과 종합은 매우 밀접한 관련성을 지니고 있다고 보았다.

넷째, 한인기(2006)는 분석에서 연결성 및 관련성들도 추출되므로 분석이 사고 대상의 분열, 붕괴로 귀착되는 것은 아니며 분석은 사고 대상인 전체의 변환으로 귀착된다고 보았다.

다섯째, Pavlov(Kalmykova, 1975 재인용)는 그의 생물학적인 실험을 통해서 분석이란 '복합적인 세계'를 '분리된 부분'으로 분해하는 사고과정, 요소들을 개별화시키는 측면이라고 설명하였고, 종합은 분리된 부분 혹은 분석에 의해 개별화된 것들을 '함께 결합된' 것으로 유기적 조직체로 만드는 활동이라고 설명하였다. Pavlov는 분석과 종합은 복잡성에 있어서 수준의 차이가 있다는 것을 지적하였는데, 분석이 더 수준이 높은 사고 과정으로 판단하였다.

여섯째, Kalmykova(1975)는 분석은 '분리된 부분'으로 쪼개는 활동으로부터 시작을 한다고 하면서, 문제에 제시된 개별적인 단어, 수, 문제의 요소들을 낱낱이 추출해 내는 것이라고 하였다. 종합은 분석을 통해 얻어진 낱낱의 대상들 사이의 관련성을 찾는 것이라고 하였다.

분석과 종합에 대한 개념을 정리하여 표로 제시하면 <표 2>, <표 3>과 같다.

<표 2> 분석에 대한 개념

구 분	분석에 대한 개념
Rubinstain	전체를 부분들, 요소들로 분해하거나 전체에서 개개의 속성, 측면을 분리하는 사고 조작
Erdniev	부분들의 분석, 요소들의 분석, 속성들의 분석, 특징들의 분석뿐만 아니라, 이들 사이의 관계의 분석, 연결성의 분석을 포함
한인기	첫째, 전체를 구성하는 부분들, 요소들로 분해하는 사고 조작 둘째, 전체에서 개별적인 징표들, 속성들, 성질들, 측면들, 연결 및 관련성들을 추출하는 사고 조작
Petrovskii	대상을 구성요소로 분리하는 것, 대상의 측면, 요소, 속성, 연관, 관계 등을 전체로부터 추상하는 것

<표 3> 종합에 대한 개념

구 분	종합에 대한 개념
Rubinstain	대상이나 현상의 부분들을 연결시키는 사고 조작 또는 대상이나 현상의 속성들, 측면들을 결합시키는 사고 조작
Tommy Dreyfus	부분들을 결합하고 구성하여 전체적 실체를 형성하는 것
Erdniev	분석에 의해 분리된 요소들은 새로운 방식으로 연결시키는 것
한인기	첫째, 전체(대상)의 부분들을 연결시키는 사고 조작 둘째, 대상의 개별적인 징표들, 속성들, 성질들, 측면들, 연결 및 관련성을 결합하는 사고 조작
Petrovskii	분석에 의해 분리된 요소들로 전체를 재건하는 것 인지하는 동안 대상으로부터 분리된 요소들을 통합하고 상호관련 시키는 것

분석과 종합은 언제나 상호의존적이다. 양자의 불가분 단일성은 상호관련 시켜 인지하는 과정에서 이미 명백하게 나타난다. 하지만 상호의존적이지만 많은 학자들이 이들 사이의 차이가 명확함을 다양하게 언급하고 있음을 다양하게 제시하였다. 즉, 분석과 종합은 서로 독립적인 공간과 영역 및 이들 간의 상호 차이가 있으므로 이에 대한 구체적인 의미를 분석, 종합 활동의 초기 발생의 문헌인 자료론과 분할론을 기반으로 분석하고자 한다.

Ⅲ. 자료론과 분할론에서 분석과 종합

이 장에서는 Euclid의 자료론과 분할론을 체계적으로 분석하여 수학교육 특히, 기하교육에서 사고활동으로서의 분석과 종합에 대한 수학교육적인 의미의 고찰이라는 본 연구의 목적 달성을 위해 자료론과 분할론에 제시된 130개의 명제를 분석과 종합이라는 사고 활동의 결과라는 관점에서 분석하고, 그 분석 결과를 체계화하여 제시한다.

1. 문헌 분석 대상

본 연구는 문헌 연구이므로 어떤 문헌을 연구대상으로 삼았느냐는 중요한 문제가 아닐 수 없다. 다음은 본 연구를 위해 분석한 문헌이다.

첫째, 자료론을 분석하기 위해 사용한 문헌이다. Herz-Fischler(1984)가 명제 84, 명제 85의 내재적 의미를 분석한 문헌, Taisbak(1996)이 명제 86의 대수적 의미에 대해 분석한 문헌, Taisbak(2003)이 자료론에 대한 그리스 원어를 영어로 번역하여 주석과 함께 출판한 문헌, 마지막으로 Mcdowell과 Sokolik(1993)가 그리스 원어를 영어로 완역한 문헌이다.

둘째, 분할론을 분석하기 위해서는 Archinald(1915)가 아라비아 원어를 영어로 번역하여 출판한 문헌이다.

2. 분석과 종합에 대한 분류

문제해결에서 사고 과정으로서 분석과 종합의 역할에 대한 인식은 초기 그리스 시대에서부터 시작되었다(Kalmykova, 1975). 당시 주어진 문제를 해결하기 위해 문제에서 주어진 조건, 알려져 있지 않은 미지의 정보, 알려진 자료들 사이의 관련성을 찾는 활동을 다양하게 진행되었고, Euclid의 수학에 대한 저작은 이러한 활동을 직접적으로 보여주기에 충분할 것으로 보인다.

자료론에는 총 94개의 명제가 있고, 분할론에는 36개의 명제가 있다. 자료론은 주어진(Given)이라는 소재를 이용하여 자료(datum)가 되는 명제들을 체계적으로 증명하고 있다. 이러한 명제들의 증명 과정에 대한 고찰을 통해 사고 과정으로서의 분석과 종합에 대해 분석하였다. 또한 분할론은 도형의 분할이라는 소재를 이용하여 주어진 조건에 부합되도록 다각형, 원, 평면도형을 분할하는 작도의 방법의 탐색과 그 탐색 결과에 대한 정당성을 체계화하고 있다. 이러한 탐색과정과 정당화 과정에서 사고 과정으로서의 분석과 종합에 대해 분석하였다.

본 장에서는 이러한 130개의 명제에 대한 분석으로부터 얻은 분석과 종합에 대한 결과를 범주화하여 제시하고, 각각의 유목에 해당하는 구체적인 예를 통해 그 의미를 구체화할 것이다.

첫째, 자료론과 분할론을 통해 본 분석의 유형에 대한 고찰 결과는 다음과 같다.

먼저 자료론과 분할론에 제시된 130개 명제들을 외재적인 측면에서 살펴보면, 불과 다섯 개의 명제인 Dvt 18[2], Dvt 22, Dvt 24, Dvt 25, Dtt 79[3]를 제외한 모든 명제가 공통적으로 포함하고 있는 개념이 있다. 그것은 주어짐(Given)이다. Taisbak(2003)은 자료론에 대한 그의 해설서의 부제목으로 ‘주어져 있는 것의 중요성(The Importance of Being Given)’으로 할만큼 주어짐(Given)은 매우 중요한 의미를 가지고 있다. 윤대원, 서보억, 김동근(2007)은 ‘주어짐’의 중요성에 대해 다양한 측면에서 논의하고 있다. 또한 이들 모든 명제들은 작도와 직접적인 관련성을 가지고 있는 것으로 나타났다.

다음으로 자료론과 분할론에 제시된 130개 명제들을 내재적 측면에서 살펴보면, 주어진 것, 구할 것, 배경지식, 절차와 같은 수학적인 개념과 원리, 지식 등을 다양한 방법으로 추출해 내고 있었다.

---

2) Dvt 18이란 분할론 명제 18번을 의미한다.
3) Dtt 79란 자료론 명제 79번을 의미한다.

이처럼 자료론과 분할론에 제시된 명제들은 분석의 관점에서 고찰한 결과 다음과 같은 활동으로 분석을 범주화하여 <그림 2>와 같이 분류하고, 명명하였다.

외재적 분석	내재적 분석
○ 주어진 것 분석	○ 의미적 분석
○ 구할 것 분석	○ 결합적 분석

<그림 2> 분석의 유형

외재적 분석은 제시된 명제에 자체에서 외형적으로 드러난 수학적 대상, 요소, 성질, 속성에 대한 분석이다. 자료론의 서술 체계는 명제 제시, 명제 의미 제시, 주어짐을 통한 증명이라는 세 단계로 이루어져 있고, 분할론은 명제 제시, 작도 방법 제시, 특수한 사례 제시(필요한 경우), 작도의 타당성 증명이라는 세 단계 혹은 네 단계로 이루어져 있는데, 외재적 분석은 명제 제시 혹은 명제 의미 제시에 대한 분석이다. 이러한 외재적 분석은 명제의 구성 요소 중, 가정이나 전제, 주어져 있는 것에 관심을 가지면 '주어진 것 분석', 명제의 구성 요소 중, 결론이나 결과, 주어진 것으로 볼 수 있는 것에 관심을 가지면 '구할 것 분석'으로 세분화할 수 있다.

자료론	분할론
1. 명제 제시	1. 명제 제시
2. 명제 의미 제시	2. 작도 방법 제시
3. 주어짐을 활용한 증명	3. (특수한 사례)
	4. 작도의 타당성 확보를 위한 증명

<그림 3> 두 저작의 서술 체계

내재적 분석은 외재적 분석의 결과로 추출된 수학적 대상, 요소, 성질, 속성에 대한 재분석 혹은 결합 및 관련성의 추출을 통한 분석이다. 내재적 분석은 두 저작에 나타난 서술 체계 중, 주어짐을 활용한 증명과정, 작도 방법 제시, 작도의 타당성 확보를 위한 증명 과정에 분석이다. 이러한 내재적 분석은 추출된 수학적 대상, 요소 등의 본질적 의미에 대한 탐색이나 이와 관련된 새로운 수학적 대상, 요소의 추출에 관심을 가지면 '의미적 분석', 처음 추출된 수학적 대상, 요소뿐만 아니라 새롭게 추출된 수학적 대상, 요소들 사이의 결합, 관련성을 통한 수학적 본질적 의미를 탐색하거나 새로운 수학적 대상이나 요소의 추출에 관심을 가지면 '결합적 분석'으로 세분화할 수 있다.

둘째, 자료론과 분할론을 통해 본 종합의 유형에 대한 고찰 결과는 다음과 같다.

서보억(2008)은 문제 구조의 서로 다른 요소들을 결합시켜 집합체로 만들고, 수학적 관계들과 기능적인 종속성을 찾아, 문제의 수학적인 구조를 찾기 위한 활동으로 종합이라고 하였다. 또한 이러한 활동을 빠르게 일어나도록 유도하기 위해 본질적으로 동일한 유형의 문제를 체계적으로 제공하는 방법을 제시하고 있다. 종합이란 분석을 통해 추출된 다양한 대상들의 관계성을 파악하고 이들을 통합적인 관점에서 주어진 문제상황의 큰 틀을 찾고 통합화할 수 있는 사고 활동으로 볼 수 있다. 이러한 사고 활동의 결과는 문제해결을 위한 핵심적인 방향을 잡을 수 있다는 결정적인 측면을 지니고 있다.

자료론에 제시된 명제들의 증명과정, 분할론에 제시된 명제들의 작도방법 및 증명과정에 대한 분석을 기초로 하여 종합에 대한 유형을 분류하였다. 먼저 명제의 증명과정, 작도 방법 및 작도의 증명 과정에서 경험보다는 논리적, 이성적 과정을 통해 분석으로부터 추출한 대상들 사이의 상호 관련된 재개념화에 주된 관심을 기울이면 '이론적 종합'이라고 보았고, 반대로 기호에 의한 연역적이고 논리적인 과정보다는 학습을 통해 획득한 과거의 경험적 지식을 적용하여 분석으로부터 추출한 대상들 사이의 상호 관련된 재개념화에 주된 관심을 보이면 '경험적 종합'으로 세분화하여 명명하였다.

이제 분석과 종합에 대한 이러한 분류에 대한 각 유형의 분류 근거와 의미를 구체화하기 위해 자료론과 분할론에 서술되어져 있는 명제 제시, 명제 의미 제시, 작도 방법 제시, 특수한 사례, 증명 과정 등을 통해 고찰해 보자. 제시된 문항의 수준은 우리나라에서 직관기하와 논증기하를 배우는 초등학교 고학년과 중학교 전학년 수준으로 설정하였다.

3. 분석과 종합에 대한 이해

(1) ‘주어진 것 분석’에 대한 이해

분석의 주된 관심을 제시된 명제의 가정이나 조건, 주어져 있는(given) 것에 두는 것으로 구체적 사례는 다음과 같다.

Dvt 1. 주어진 삼각형의 한 변과 평행하면서 이 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선을 작도할 수 있다.

분할론 명제 1에서는 삼각형, 밑변, 밑변에 평행, 넓이의 이등분 등을 분석의 결과로 추출하고 있었는데, 이는 제시된 명제에서 직관적으로 명확하게 인식할 수 있는 것 즉, 주어져 있는 것에 대한 추출이다.

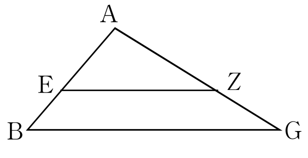
Dtt 39. 세 변의 길이가 주어져 있으면, 삼각형은 주어진(결정된) 것이다.

자료론 명제 39에서는 삼각형, 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 등을 분석의 결과로 추출하고 있었는데, 이것 또한 제시된 명제의 조건에서 직관적으로 명확하게 인식할 수 있는 주어져 있는 것에 대한 추출이다.

(2) ‘구할 것 분석’에 대한 이해

제시된 명제의 결론, 구해야할 것, 주어진 것으로 볼 수 있는 것에 분석의 주된 관심을 가지는 것으로 구체적 사례는 다음과 같다.

Dvt 3. 삼각형 한 변 위에 주어진 한 점을 지나, 이 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선을 작도할 수 있다.



<그림 4>

분할론 명제 3에서는 주어진 변 위의 한 점을 지난 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선을 분석의 결과로 추출하고 있었는데, 이는 제시된 명제의 결론, 구해야할 것, 주어진 것으로 볼 수 있는 것과 관련되어 있다.

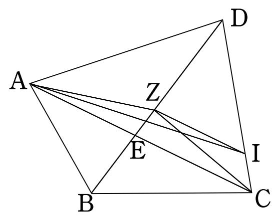
Dtt 63. 삼각형이 주어져 있고, 각각의 변을 한 변으로 하는 정사각형을 그리면, 처음 삼각형과 각각의 정사각형의 넓이의 비는 주어진(구할 수 있는) 것이다.

자료론 명제 63에서는 주어진 삼각형과 삼각형의 각 변에 대한 정사각형의 넓이의 비를 분석의 결과로 추출하고 있었는데, 이는 제시된 명제의 결론, 구해야 할 것, 주어진 것으로 볼 수 있는 것과 관련되어 있다.

(3) ‘의미적 분석’에 대한 이해

주어짐을 활용한 증명과정, 작도 방법 제시, 작도의 타당성 확보를 위한 증명 과정 등에서 추출된 수학적 대상이나 요소 등의 본질적 의미에 대한 탐색이나 이와 관련된 새로운 수학적 대상, 요소의 추출을 위해 분석의 주된 관심을 기울이는 것으로 구체적 사례는 다음과 같다.

Dvt 14. 임의의 사각형의 주어진 한 꼭짓점을 지나, 이 사각형의 넓이를 이등분하는 직선을 작도할 수 있다.

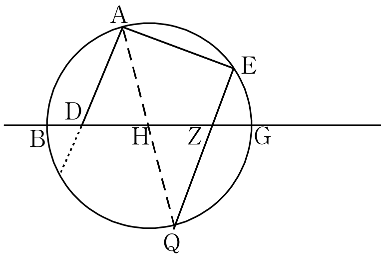


<그림 5>

분할론 명제 14에서 ‘주어진 것 분석’에서 사각형, 사각형의 이등분, 한 꼭짓점, 꼭짓점을 지나는 직선 등을 분석의 결과로 추출하고, ‘구할 것 분석’에서 꼭짓점을 지나 넓이를 이등분하는 직선의 작도를 추출하고 있다. 이러한 외재적 분석의 결과들을 통해 첫째, 명제에 제시된 내용 및 외재적 분석 결과로부터 얻은 사실에 근거하여 기하학적 도형을 직관적으로 구성하고 있었다(그림 5). 둘째, 사각형의 넓이를 이등분하는 가장 이상적인 것이 사각형의 대각선임을 제시하고 있다. 이는 고대이집트인들이 사각형의 네 변의 길이를 a,b,c,d라 할 때, 잘못된 넓이 공식 $\frac{(a+c)}{2}\times\frac{(b+d)}{2}$

을 만들어 낸 것과 같은 매우 자연스러운 분석의 결과이다. 셋째, <그림 5>에서 점 E가 선분 BD의 중점인 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어짐을 구분하였다. 중점인 경우는 직선 AC가 우리가 구할 직선임이 명확하므로 그렇지 않은 경우에 대해 논의하여야 함을 추출하고 있다. 외재적 분석의 결과로 얻은 이들 모두는 외재적 분석에서 추출된 수학적 대상이나 요소 등의 본질적 의미에 대한 탐색 및 이와 관련된 수학적 대상의 탐색에 대한 것임을 확인할 수 있다.

Dtt 94. 지름 BG 위의 한 점 D가 있고, 점 D를 지나는 임의의 직선이 원과 만나는 점을 A, 점 A를 지나고 직선 DA에 수직인 직선이 원과 만나는 점을 E, 점 E를 지나 직선 DA에 평행한 직선이 지름 BG와 만나는 점을 Z라고 하면, 점 Z는 주어진(고정된) 것이고, AD×EZ도 주어진(값을 구할 수 있는) 것이다.



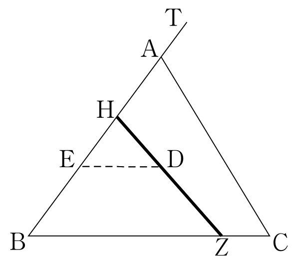
<그림 6>

자료론 명제 94에 대한 ‘주어진 것 분석’에서 지름이 주어진 원, 주어진 지름 위의 한 점, 지름 위의 한 점을 지나는 직선, 이 직선에 수직인 직선, 처음 직선에 평행인 직선, 평행선과 처음 지름과의 교점 등을 분석의 결과로 추출하고 있다. 또한 ‘구할 것 분석’에서는 <그림 6>의 점 Z가 ‘고정된 점인가’와 ‘두 선분의 곱 $AD \times EZ$ 가 일정한가’에 대한 물음을 추출하고 있다. 이러한 외재적 분석의 결과를 통해 첫째, 외재적 분석 결과와 부합된 기하학적 도형을 직관적으로 구성하고 있었다(그림 6). 둘째, 평행선의 성질에 의해서 각 A뿐만 아니라 각 E가 직각임을 얻는다. 셋째, 평행선과 관련된 엇각, 동위각에 대한 개념을 추출하고 있다. 넷째, 주어진 것에 대한 도형에서 도형 DAEQ는 원에 내접하는 직사각형의 일부임을 얻고 있는데, 이들 모두는 외재적 분석에서 추출된 수학적 대상이나 요소 등의 본질적 의미에 대한 탐색 및 이와 관련된 수학적 대상의 탐색에 대한 것임을 확인할 수 있다.

(4) ‘결합적 분석’에 대한 이해

주어짐을 활용한 증명과정, 작도 방법 제시, 작도의 타당성 확보를 위한 증명 과정 등에서 처음 추출된 수학적 대상, 요소뿐만 아니라 새롭게 추출된 수학적 대상, 요소들 사이의 결합, 관련성을 통한 수학적 본질적 의미를 탐색하거나 새로운 수학적 대상이나 요소의 추출을 위해 분석의 주된 관심을 기울이는 것으로 구체적 사례는 다음과 같다.

Dvt 19. 삼각형 내부의 주어진 임의의 한 점을 지나, 이 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선을 작도할 수 있다.



<그림 7>

분할론 명제 19에서 ‘주어진 것 분석’에서 삼각형, 이등분, 내부의 임의의 한 점, 내부의 한 점을 지나는 직선 등을 분석의 결과로 추출하고, ‘구할 것 분석’에서 내부의 한 점을 지난 넓이를 이등분하는 직선을 추출하며, ‘의미적 분석’에서 <그림 7>과 같은 기하학적 도형의 구현, $\triangle HBZ = \frac{1}{2}\triangle ABC$, 직선 HZ를 긋기 위해서는 점 H 혹은 점 Z만 결정하면 된다는 사실을 추출하고 있다. 이러한 외재적 분석 및 의미적 분석 결과들의 유의미한 결합을 통해, 첫째, $\triangle HBZ = \frac{1}{2}\triangle ABC$ 로부터 $BH \times BZ = \frac{1}{2} AB \times BC$ 를 추출하였고, 둘째, 삼각형 HBZ와 선분 BH, BZ로부터 삼각형 HBZ와 닮음인 삼각형을 얻기 위해 점 D를 지나 밑변에 평행인 선분을 보조선으로 추출하였고, 셋째, $\triangle HED$ 과 $\triangle HBZ$은 닮음이고, 닮음비

$\mathrm{BH}:\mathrm{EH}=\mathrm{BZ}:\mathrm{DE}$를 얻는다. 넷째, $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이의 $\frac{1}{2}$인 $\triangle\mathrm{HBZ}$를 직접 비교할 수 없기 때문에, $\triangle\mathrm{ABC}$와 동일한 넓이의 값을 가지는 점 T, 즉 $\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}=\mathrm{BT}\times\mathrm{DE}$를 만족하는 점 T를 추출하였다. 다섯째, 2번째와 4번째 결합적 분석에 대한 재결합을 통해 $\mathrm{BH}\times\mathrm{BZ}=\mathrm{BT}\times\mathrm{DE}$을 추출하였는데, 이는 곧 $\mathrm{BT}:\mathrm{BH}=\mathrm{BZ}:\mathrm{DE}$를 얻은 것이다. 여섯째, 3번째와 5번째 결합적 분석에 대한 재결합을 통해 $\mathrm{BT}\times\mathrm{BE}=\mathrm{BH}\times\mathrm{HT}$을 추출하였다.

이처럼 결합적 분석은 문제의 풀이과정이 복잡할수록 문제해결에 결정적인 역할을 미치는 다양한 분석결과를 얻고 있었다. 결합적 분석을 통해 추출된 결과들은 처음 추출된 수학적 대상, 요소뿐만 아니라 새롭게 추출된 수학적 대상, 요소들 사이의 결합, 관련성을 통한 수학적 본질적 의미의 탐색, 새로운 수학적 대상이나 요소의 추출과 관련이 있는 것들이다.

실제로 결합적 분석은 종합과 완전히 무관하지는 않다. 분석과 종합이 순차적으로 일어난다고 볼 때, 분석과 종합의 경계선 상에 있는 것이 결합적 분석으로 볼 수 있다. 이제 종합에 대해 살펴보자.

(5) '이론적 종합'에 대한 이해

외재적 분석, 내재적 분석의 결과들은 종합과 깊은 관련이 있다. Krutetskii(1976)와 서보억(2008)은 종합은 문제의 본질적 구조 및 문제해결을 위한 방향설정에 결정적인 역할을 수행한다고 언급하였다.

두 저작에서 서술되어져 있는 명제의 증명과정, 작도 방법 제시, 작도의 타당성 확보를 위한 증명 과정 등에서 경험보다는 논리적, 이성적 과정을 통해 분석의 결과로 추출한 대상들 사이의 상호 관련된 재개념화에 종합의 주된 관심을 기울이는 '이론적 종합'에 대해 구체적 사례를 통해 살펴보자.

Dvt 19.

분할론 명제 19에서는 분석의 결과로 추출한 것들로부터 $\mathrm{BH}\times\mathrm{BZ}=\mathrm{BT}\times\mathrm{DE}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}$를 만족하는 점 T를 잡고, $\mathrm{BT}\times\mathrm{BE}=\mathrm{BH}\times\mathrm{HT}$를 만족하는 점 H를 찾으면 $\mathrm{BH}\times\mathrm{BZ}=\mathrm{BT}\times\mathrm{DE}$가 되므로, 이를 통해 삼각형의 내부의 한 점을 지난 주어진 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선을 작도할 수 있게 된다는 사실을 추출하고 있다.

Dtt 94.

자료론 명제 94에서는 분석의 결과로 추출한 것들로부터 $\triangle\mathrm{ADH}$와 $\triangle\mathrm{QZH}$가 닮음이고 직선 AQ와 직선 BG의 교점 H로부터, 항상 $\mathrm{DH}=\mathrm{HZ}$라는 사실을 찾으면 점 Z는 고정점임을 명확하게 알 수 있다는 사실을 추출할 수 있다. 또한, 선분 AD의 길이와 선분 QZ의 길이가 같고, 또한 $\mathrm{EZ}\times\mathrm{ZQ}=\mathrm{BZ}\times\mathrm{ZG}$로부터 $\mathrm{AD}\times\mathrm{EZ}=\mathrm{QZ}\times\mathrm{EZ}$를 얻을 수 있을 수 있으며, 점 Z가 고정점이라는 사실로부터 문제에서 요구하는 직사각형과 같은 넓이를 가지는 항상 일정한 두 선분의 곱을 추출할 수 있다.

분할론 명제 19와 자료론 명제 94에 제시되어 있는 종합에 의한 수학적 재개념화는 이미 알고 있던 수학적 공식, 절차, 정리에 기반을 둔 경험적인 결과로 얻었다기보다는 논리적, 이성적 과정을 통한 재결합을 통해 얻은 것으로 보여 진다. 또한 증명과정의 구체적인 서술과정이 이성에 의한 논리적 재결합과 더 밀접하게 관련된 것으로 보인다. 분할론과 자료론에 나타난 문제의 구조 파악과 문제해결의 방향설정을 위한 이러한 수학적 재개념화를 '이론적 종합'으로 명명하였다.

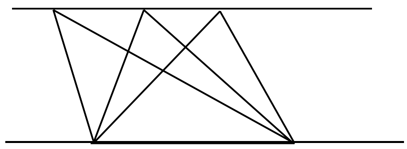
(6) '경험적 종합'에 대한 이해

두 저작에서 나타난 명제의 증명과정, 작도 방법 제시, 작도의 타당성 확보를 위한 증명 과정 등에서 기호에 의한 연역적이고 논리적인 과정보다는 학습으로 획득한 과거의 경험적 지식의 적용을 통해 분석의 결과로 얻은 대상들 사이의 상호 관련된 재개념화에 종합의 주된 관심을 기울이는 '경험적 종합'에 대해 구체적 사례를 통해 살펴보자.

Dvt 14.

분할론 명제 14에서는 꺾인 선 AZC가 주어진 사각형을 이등분한다는 사실로부터 점 A를 지나는 직선 중 이와 동일한 넓이를 가지는 직선을 작도하면 문제

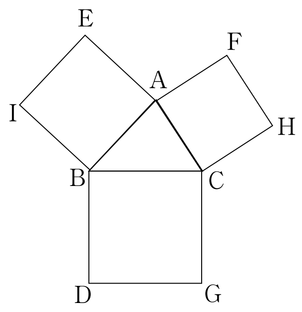
가 해결된다는 사실을 추출하게 된다. 이때 사용되는 수학적 사실은 평행선 사이에 놓인 밑변을 공유하는 임의의 삼각형의 넓이가 같다는 사실이다(그림 8). 이러한 과거의 수학적 경험을 주어진 명제 14의 상황과 결합하여 재개념화하여 문제를 해결하고 있다.



<그림 8>

Dtt 63.

자료론 명제 63에서는 한 변을 공유하고 있는 두 다각형의 넓이의 비는 바로 그 다각형의 높이의 비와 동일하다는 사실을 추출하게 된다. 즉, 삼각형 ABC와 정사각형 BDGC의 넓이의 비는 곧, A에서 BC에 내린 수선의 길이와 선분 BD의 길이의 비와 같다는 사실을 경험적 사실로부터 추출하게 된다(그림 9).

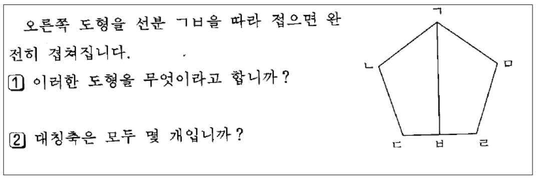


<그림 9>

Ⅳ. 초등학교 도형문제 해결에 적용

초등학교 5학년 도형 영역에 제시된 문제를 통해 분석과 종합을 어떻게 활용될 수 있는지 살펴보자.

[예시1] 초등학교 5학년 도형의 대칭 단원 문제



(분석)

첫째, '외재적 분석'은 다음과 같다. 주어져 있는 것으로 '도형, 다섯 개의 꼭짓점, 다섯 개의 변, 선분 ㄱㅂ, 접기, 겹쳐짐' 등을 얻게 된다. 또한 구할 것으로는 이러한 선분에 의해 겹쳐짐의 성질이 있는 도형의 명칭, 겹쳐짐이 있는 선분의 개수를 분석하여 얻게 된다.

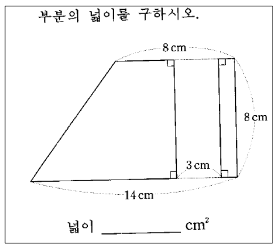
둘째, '내재적 분석'의 결과로 위와 같은 성질을 가지는 도형은 바로 정오각형이라는 결론에 도달한다. 또한 꼭짓점의 개수가 5개, 변의 개수가 5개임을 분석할 수 있고, 제시된 대칭축이 한 꼭짓점과 마주보는 변의 중점을 연결하였다는 사실을 얻게 된다.

(종합)

첫째, '경험적 종합'은 주어진 도형이 특정 선분에 의해 접어서 겹쳐지면, 이전에 학습하였던 선대칭도형을 떠올리게 된다. 또한 정오각형 종이를 이용하여 접는 활동을 직접 시행하거나, 간접적 시행으로 자를 이용하여 선분을 긋는 활동을 시행해야 한다는 사실을 추출하게 된다.

둘째, 제시된 문제는 '경험적 종합'만으로 해결이 가능하지만, 학생들의 지적능력의 차이에 의해 '이론적 종합'이 가능하기도 할 것이다. 즉, 오각형이 꼭짓점의 개수와 그 대변에 대응하는 변의 개수가 곧 대칭축의 개수라는 사실을 추출하게 된다.

[예시2] 초등학교 5학년 넓이와 무게 단원 문제



(분석)

첫째, '외재적 분석'의 결과로 주어져 있는 '사다리꼴, 직사각형, 빈 공간, 여러 가지 주어진 길이, 직각' 등을 얻게 된다. 또한 구할 것으로는 주어진 두 도형의 넓이의 합을 추출한다.

둘째, '내재적 분석'의 결과는 다음과 같다. 왼쪽에 있는 도형은 사다리꼴이고, 오른쪽 도형은 직사각형이다. 이 두 도형 사이의 빈 공간도 직사각형이다. 외재적 분석의 결과로는 사다리꼴에서는 윗변과 밑변의 길이는 구할 수 없고, 직사각형에서는 가로의 길이를 구할 수 없다는 사실을 추출한다. 또한 사다리꼴, 직사각형, 빈 공간의 직사각형 모두 동일한 높이를 가지고 있다. 마지막으로 빈 공간의 직사각형의 높이는 8cm이다.

(종합)

첫째, '경험적 종합'의 결과로 주어진 세 도형 즉, 사다리꼴, 직사각형, 빈 공간의 직사각형의 전체 넓이는 구할 수 있음을 추출한다. 실제로, 기존에 학습한 사다리꼴의 넓이 공식을 추출하여 주어진 수치를 대입하여 값을 구할 수 있다. 또한 빈 공간의 직사각형의 넓이를 구할 수 있다.

둘째, '이론적 종합'의 결과로 빈 공간이 있는 분리된 두 도형의 넓이는 빈 공간을 포함한 전체 도형의 넓이에서 빈 공간의 넓이를 빼 줌으로서 구할 수 있음을 추출한다.

Ⅳ. 결론 및 기대되는 효과

1. 요약 및 결론

수학교육에서 분석과 종합과 관련된 용어에 대한 개념을 체계화하였다. 첫째, 분석과 종합은 문제해결을 위한 사고 과정에서 나타난 사고활동의 유형에 따라 결과물 차이에 따른 분류이다. 둘째, 분석법과 종합법은 발견술의 한 방법으로서 문제해결 및 증명의 풀이방법에 따른 분류이다. 따라서 풀이방법 분류에 따라 분석적 방법, 종합적 방법, 증명방법 분류에 따라 분석적 증명, 종합적 증명이 있다. 셋째, 분석적 사고, 종합적 사고는 풀이방법을 찾아 사고의 전개 방법에 따른 분류이고, 분석적 전개와 종합적 전개는 풀이방법을 구체적으로 서술하거나 기술하는 방법에 따른 분류이다.

본 연구의 수행에 기본이 되는 분석과 종합에 대한 의미를 보다 구체화하기 위해 다양한 문헌을 분석을 실시하였다. 첫째, Rubinstain은 분석과 종합은 사고활동을 구성하는 가장 기본적이고 주요한 사고 조작으로 보았다. 둘째, Dreyfus에 의하면 종합은 부분들을 결합하고 구성하여 전체적 실체를 형성하는 것이다. 셋째, Erdniev에 의하면, 종합은 분석에 의해 분리된 요소들을 새로운 방식으로 연결시키는 것이다. 따라서 분석과 종합은 매우 밀접한 관련성을 지니고 있다고 보았다. 넷째, 한인기는 분석에서 연결성 및 관련성들도 추출되므로 분석이 사고 대상의 분열, 붕괴로 귀착되는 것은 아니며 분석은 사고 대상인 전체의 변환으로 귀착된다고 보았다. 다섯째, Pavlov는 분석이란 '복합적인 세계'를 '분리된 부분'으로 분해하는 사고과정, 요소들을 개별화시키는 측면이라고 설명하였고, 종합은 분리된 부분 혹은 분석에 의해 개별화된 것들을 '함께 결합된' 것으로 유기적 조직체로 만드는 활동이라고 설명하였다. 여섯째, Kalmykova는 분석은 '분리된 부분'으로 쪼개는 활동으로부터 시작을 하고, 종합은 분석을 통해 얻어진 낱낱의 대상들 사이의 관련성을 찾는 것이라고 하였다.

이상의 결과로부터 분석과 종합은 언제나 상호의존적이지만, 이들 사이의 차이가 명확하게 존재함을 확인할 수 있었고, 이러한 차이를 분석과 종합 활동의 초기 발생 문헌인 자료론과 분할론을 기반으로 체계화하였다.

첫째, 분석의 유형에 대한 탐색결과로 외재적 분석과 내재적 분석으로 크게 구분하였다. 그리고 외재적 분석은 명제의 구성 요소 중, 가정이나 전제, 주어져 있는 것에 관심을 가지느냐, 아니면 명제의 구성 요소 중, 결론이나 결과, 주어진 것으로 볼 수 있는 것에 관심을 가지느냐에 따라 '주어진 것 분석'과 '구할 것 분석'으로 세분화하였다. 내재적 분석은 추출된 수학적 대상, 요소 등의 본질적 의미에 대한 탐색이나 이와 관련된 새로운 수학적 대상, 요소의 추출에 관심을 가지느냐, 아니면 처음 추출된 수학적 대상, 요소뿐만 아니라 새롭게 추출된 수학적 대상, 요소들 사이의 결합, 관련성을 통한 수학적 본질적 의미를 탐색하거나 새로

운 수학적 대상이나 요소의 추출에 관심을 가지느냐에 따라 '의미적 분석과 '결합적 분석'으로 세분화하였다.

둘째, 종합의 유형에 대한 탐색결과로 논리적, 이성적 과정을 통한 재결합을 통해 얻은 결과이냐, 아니면 과거에 학습으로 획득한 경험적 지식의 적용을 통한 재결합을 통해 얻은 결과냐에 따라 '이론적 종합'과 '경험적 종합'으로 세분화하였다.

이러한 분석과 종합에 대한 유형의 분류를 통해 분석은 수학적 대상이나 요소들의 자율성과 개별성, 개념의 본질지향성과 독립성, 수학적 대상이나 요소들의 범주화의 성격을 강하게 지니고 있는 것으로 나타났다. 반면, 종합은 수학적 대상이나 요소들의 관계성과 타협성, 개념의 상호의존 지향성과 관련성, 수학적 대상이나 요소들의 통합화의 성격을 강하게 지니고 있는 것으로 나타났다. 또한 분석은 논리적인 측면이 강하다면 상대적으로 종합은 경험적인 측면이 강한 것으로 드러났다. 마지막으로 분석은 범주화를 통한 귀납적인 추론의 결과로 얻어진 것으로 보여지며, 종합은 수학적 대상이나 요소들간의 유사성에 대한 탐구로 얻어진 것으로 보여진다.

2. 기대되는 효과

본 연구의 연구결과는 다음과 같은 효과와 활용이 기대된다.

첫째, 고대의 중요한 문헌으로부터 확립된 분석과 종합에 대한 이해는 수학교육학의 다른 분야에 폭넓게 활용되어질 것이다.

둘째, 수학적 활동에서 드러나는 두 가지 사고 유형인 분석과 종합에 대한 이해를 바탕으로 학생들의 종합적인 사고능력과 분석적인 사고능력을 성숙시킬 수 있는 교육적인 방법에 대한 연구가 폭넓게 진행될 것으로 기대된다.

셋째, 분석과 종합에 대한 유형의 분류 및 이에 대한 구체적인 사례의 제시는 기하교육에서 발견적 수업을 강조하는 교실 수업 개선에 의미 있는 시사점을 제공할 것으로 기대된다.

넷째, 연구에서 분석된 자료론과 분할론의 130개 명제는 초, 중학교 기하 교수 학습 자료를 더 풍부하게 할 것으로 기대된다.

다섯째, Krutetskii는 개인차를 유발하는 가장 기본적인 차이로 분석과 종합의 차이를 언급하였다. 본 연구에서 얻은 결과는 분석과 종합에 대한 이해를 바탕으로 학생의 개인차를 이해하는 의미있는 자료로 사용될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). 수학과교육과정. 서울: 대한교과서주식회사.

서보억 (2006). 분석과 종합문제의 분류기준에 대한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 20(1), 231-248.

서보억 (2008). 중학교 기하학습에서 개인차에 기반한 교수-학습에 대한 연구. 경상대학교 박사학위논문.

우정호 (2006). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교출판부.

윤대원・서보억・김동근 (2007). 자료론에 대하여. 한국수학사학회지, 21(2), 55-70.

이강율・성현경・정동권・박영배 역(1993). 수학적인 생각의 구체화. 서울: 경문사.

한인기 (2001). 수학교육에서 종합-분석적 활동의 본질 및 체계화에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 11(2), 235-250.

한인기 (2003). 교사를 위한 수학사. 서울: 교우사.

한인기 (2006). 수학교육학의 기초와 실제. 경남: 경상대학교출판부.

Archibald. R. C. (1915). *Euclid's book on divisions of figures*. London : Cambridge University Press.

Boyer, C. B (1991). *A history of mathematics*. New York : John & Wiley Inc.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinkin (pp.25-41)*, Dordrecht: Kluwer.

Erdniev, P. M., 한인기 (2005). 유추를 통한 수학탐구. 서울: 승산.

Eves, H. (1990). *An introduction to the history of mathematics*, New York: Saunders College Publications.

Heath, T. (1981). *A history of greek mathematics*. New York: Dover Publications Inc.

Herz-Fischler, R. (1984). "What are propositions 84 and 85 of Data all about?". *Historia Math*, 11(1), 86-91.

Kalmykova (1975). Processes of analysis and synthesis in the solution of arithmetic problems. In M. G. Kantowski (Ed.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics : Volume XI* (pp. 1-38). Chicago: University of Chicago Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Mayer, R. E. and Hegarty, M. (1996). The Process of Understanding Mathematical Problems. In *The Nature of Mathematical Thinking* (Sternberg, R. J. and Ben-Zeev, T., editors). Lawrence Erlbaum Associates.

Mcdowell, G. L., Sokolik, M. A. (1993). *The data of Euclid : Translated from the text of Menge*, Baltimore: Union Square Press.

Petrovskii, A. V. (1993). *인간행동의 심리학*, 서울: 사상사.(김정택 역. 원본은 1973년에 출판됨).

Reuben, R. (1997). *What is mathematics, really?*, New York: Oxford University Press.

Taisbak, C. M. (1996). Zeuthen and Euclid's 'Data' 86 algebra - or A lemma about intersecting hyperbolas?. *Centaurus*, 38. 122-139.

Taisbak, C. M. (2003). *Euclid's Data(ΔΕΔΟΜΕΝΑ) or The importance of being given*. Denmark: Museum Tusculanum Press.

A Study on the Analysis and Synthesis in Mathematics Education Based on Euclid's 'The Data' and 'On Divisions'

Suh, Bo Euk
Mathematics Education, Catholic University of Daegu
Ha-yang, Kyung-san, Kyung-buk, Korea
E-mail : eukeuk@cu.ac.kr

This study is the consideration to 'The Data' and 'On Divisions' of Euclid which is the historical start of analysis and synthesis. 'The Data' and 'On Divisions' compared to Euclid's Elements is not interested. In this study, analysis and synthesis were examined for significance. In this study, means for 'analysis' and 'synthesis' were examined through an analysis of 'The Data' and 'On Divisions'.

First, the various terms including analysis and synthesis were examined and the concepts of the terms were analyzed.

Then, analysis was divided into 'external analysis' and 'internal analysis'. And synthesis was divided into 'theoretical synthesis' and 'empirical synthesis'. On the basis of this classification problem presented in elementary textbooks and the practical applications were explored.

* ZDM Classification : C33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : Analysis, Synthesis, The Data, On divisions, Geometry in School
* This work was supported by the National Research Foundation of Korea Grant funded by the Korean Government (NRF-2010-332-B00419).