



천해역에 수표면 및 수중방류된 사각형제트의 흐름 거동

Flow behaviors of square jets surface discharged and submerged discharged into shallow water

김대근* · 김동옥

Kim, Dae Geun* · Kim, Dong Ok

목포대학교 공과대학 토목공학과

(2010년 8월 11일 접수 ; 2010년 10월 14일 수정 ; 2011년 9월 20일 채택)

Abstract

In the present study, the flow behaviors of square jets surface discharged and submerged discharged into shallow water were each simulated using computational fluid dynamics, and the results were compared. As for the verification of the models, the results of the hydraulic experiment conducted by Sankar, et al. (2009) were used. According to the results of the verification, the present application of computational fluid dynamics to the flow analysis of square jets discharged into shallow water was valid. As for the wall jet, which is one form of submerged discharges, at the bottom wall boundary, the peak velocity of the jet rapidly moved from the center of the jet to the bottom wall boundary due to the restriction of jet entrainment and the no-slip condition of the bottom wall boundary, and, as for the surface discharge, because jet entrainment is limited on the free water surface, the peak velocity of the jet moved from the center of the jet to the free water surface. This is because jet entrainment is restricted at the bottom wall boundary and the surface so that the momentum of the central core of the jet is preserved for considerable time at the bottom wall boundary and the surface. In addition, due to the effect of the bottom wall boundary and the free water surface, the jet discharged into shallow water had a smaller velocity diminution rate near the discharge outlet than did the free jet; at a location where it was so distant from the discharge outlet that the vertical profile of the velocity was nearly equal ($b/x = 20 \sim 30$), moreover, it had a far smaller velocity diminution rate than did the free jet due to the effect of the finite depth.

Key words : shallow water, square jet, jet entrainment, surface discharge, submerged discharge, wall jet, bottom wall boundary, free water surface

주제어 : 천해역, 사각형제트, 제트포획연행, 수표면방류, 수중방류, 바닥제트, 바닥면, 자유수면.

1. 서론

하수, 오염수 또는 온배수의 방류방식은 그 배출구조에

따라 수표면방류 방식(surface discharge type)과 수중방류 방식(submerged discharge type)으로 구분된다. 국내, 외의 연구결과 수중방류 방식이 희석효과가 좋아 환경

* Corresponding author Tel:+82-61-450-2476, Fax:+82-61-450-2476, E-mail: kdg05@mokpo.ac.kr(Kim, D.G.)

에 미치는 영향이 작은 것으로 평가되고 있다. 국내의 경우 월성원자력발전소 3, 4호기의 온배수를 수중방류하기 위하여 방과제의 저면에 방류구를 설치한 사례가 있으며(서일원, 1995), 그 이후 계획된 원자력발전소의 온배수는 수중방류를 기본적으로 검토 및 채택하고 있다. 또한 연안에 설치되는 하수처리장의 경우 처리수를 수중방류 방식을 통해 외해에 방류하고 있는 사례가 있으며(속초시, 1996), 영산강 하구, 금강하구, 새만금지구와 같이 방조제를 설치하여 담수호를 조성하는 경우에 담수호의 제염 및 저층 오염수 배제를 위하여 수중방류 방식을 활용하는 사례가 있다.

하수, 오염수 또는 온배수를 방류하는 수공구조물은 대부분 수심 10~20m 내, 외로 수심이 상대적으로 얇은 천해역(shallow water)에 위치하는 경우가 대부분이다. 천해역의 수공구조물에서 방류되는 제트는 방류깊이에 따라 바닥면과 자유수면의 영향을 받게 된다. 방류된 제트의 흐름이 바닥면 등 주변지형이나 자유수면의 영향을 받지 않는 경우를 자유제트(free jet) 흐름이라 한다. 기존의 연구는 원형의 방류구 형태를 가지는 자유제트 흐름에 대한 연구가 대부분을 차지하고 있으며, 이에 관한 연구결과는 Fischer 등(1979)을 참조할 수 있다. 자유제트의 경우 방류구 주변의 발달과정흐름영역(zone of flow establishment, ZFE)과 그 이후의 발달된흐름영역(zone of establishment flow, ZEF)으로 구분할 수 있으며, ZFE에서는 초기방류유속과 동일한 크기의 유속을 가지는 중심코어부가 존재하며 ZFE에서는 자기상사성(self similarity)을 가지는 유속분포를 가지는 것으로 특징지어진다(Fischer 등, 1979). 방류구 주변에서 원형제트(round jet)는 제트포획연행(jet entrainment)이 발생하는 와류경계(vortex ring)가 축대칭을 이루는 반면에 사각형제트는(square jet)는 사각형 모서리 부분에서 와류경계의 곡률과 평균유속이 상대적으로 큰 특징을 보인다(Sankar 등 2009). 방류된 제트는 방류구 근처에서 고속의 제트와 정체된 주변수간의 유속 차로 인해 전단응력이 발생하고, 이로 인해 난류가 형성되어 운동량의 교환이 빠르게 일어나면서 주변수와 제트가 혼합되는데 이를 제트포획연행이라 한다. 방류된 제트는 방류구 근처에서 제트포획연행과정이 운동량이나 물질의 혼합과정을 지배하고 방류구에서 멀어질수록 점차 난류확산과 주변수흐름이 운동량이나 물질의 혼합과정을 지배하게 된다. 본 연구에서는 방류구 근처 즉, 제트포획연행이 제트의 거동을 지배하는 근역(near field)에서의 사각형제트의 흐름 거동을 해석하고자 한다.

천해역에 방류된 제트에 관한 연구 특히 근역에서의 흐름에 관한 연구는 바닥제트(wall jet)에 관한 수리실험 연구(Rajaratnam, 1965; Wu and Rajaratnam, 1983;

Rajaratnam and Humphries, 1983)가 일부 있으며, 이러한 바닥제트에 관한 연구동향은 Kim and Seo(2002)가 정리한 바 있다. 이상의 연구는 대부분 수리실험을 이용하여 이루어졌으며, 수치해석적인 방법을 이용한 연구는 미미한 실정이다. McGuirk and Rodi(1978, 1979)는 수표면방류된 제트의 2, 3차원 수치해석을 통하여 만족할 만한 결과를 얻은 바 있으며, 국내에서도 이남주 등(1994, 1995)이 수표면방류된 제트의 수치해석을 수행한 바 있다. 수중방류된 제트에 관한 연구는 Kim and Cho(2006)의 연구가 있는데 여기에서는 수표면방류와 수중방류된 온배수의 혼합 거동 차이에 대한 해석에 주안점을 두고 있다. 김대근과 서일원(1997), Kima and Seo(2002)는 CFD 해석을 통해 원형바닥제트의 유속구조를 해석한 바 있으며, 바닥제트의 경우 바닥면과 자유수면의 영향으로 자유제트에 비해 ZFE의 길이가 짧아지고 제트 중앙유속의 감쇠율이 자유제트에 비해 크게 나타나고 있음을 보인바 있다.

본 연구에서는 바닥면과 자유수면의 영향을 동시에 받는 천해역에 위치하는 사각형제트의 흐름거동을 전산유체역학(CFD) 해석을 통하여 분석하였다. 해석결과는 Sankar 등(2009)의 LDA(Laser doppler anemometer) system을 이용한 수리실험 결과와 비교분석을 통해 검증하였다. 그리고 사각형제트의 연직 방류위치에 따른 흐름거동을 분석하였다.

2. 연구방법

2.1 수학적모형

비압축성 유체의 흐름을 해석하기 위하여 본 연구에서 사용한 상용 CFD 코드인 FLOW-3D에서 사용하는 지배방정식은 직교좌표계(x, y, z)에서의 다음과 같은 RANS(Reynold-Averaged Navier-Stokes Equation)이다(Flow Science, 2007).

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + F_i \quad (2)$$

여기서 t 는 시간, U_i 는 x_i 방향의 속도, ρ 는 물의 밀도, P 는 압력, F_i 는 중력, 점성력 등과 같은 외력이다. 물과 공기의 경계인 자유수면을 모델링하기 위하여 VOF(volume of fluid) 함수를 정의하는 데, 함수의 값이 1인 경우는 검사체에 물이 가득한 상태를 의미하고 자유수면에서는 함수의 값이 0과 1사이의 값을 가진다. 난류 모형은 RNG $k-\epsilon$

모델을 사용하였다. RNG $k-\epsilon$ 모델은 기존 $k-\epsilon$ 모델에 비해 그 적용성이 넓고 특히, 저강도의 난류흐름과 강한 전단흐름 영역의 정확한 해석에 장점이 있는 것으로 알려져 있다(Yakhot 등, 1992).

지배방정식은 유한차분법을 이용하여 이산화되며, 격자계의 구성시 격자망과 지형은 독립적으로 입력되며 특히, FAVOR(fractional area and volume obstacle representation) 기법을 사용함으로써 유한체적법의 접근 방법으로 해석된다. 지배방정식의 차분식은 운동방정식의 압력항과 연속방정식의 유속항을 제외하면 모두 양해법으로 차분된다. 연속방정식을 만족하도록 압력항을 계산하기 위해서는 SOR(successive over relaxation) 법과 SADI(special -alternating line implicit) 법을 사용할 수 있다. 계산절차는 (1) 운동방정식을 양해법으로 풀어서 각방향의 유속을 계산 (2) 연속방정식을 만족하도록 운동방정식의 압력과 유속을 반복 계산 (3) 자유수면, 난류특성을 계산하는 순서로 이루어진다. 계산시간 간격은 수치모형의 안정조건을 만족하도록 자동으로 조정된다.

2.2 모의조건

Fig. 1은 천해역에 위치하는 수중사각형제트에서 방류된 흐름의 개념도이다. Sankar 등(2009)의 수리실험에서 사용한 실험수로의 체원은 길이(L)가 9.5m, 폭(B)이 1.2m, 높이(H)가 0.6m이며, 실험을 위한 수심(H_o)이 0.38m이며, 노즐이 위치하는 곳의 수심(h_o)은 0.30m이다. 정사각형노즐의 한변의 길이(b)가 0.04m이며, 방류유속(U_o)은 1m/sec이며, 정사각형의 한변의 길이를 특성 길이로 했을 때 레이놀즈수(Re)는 약 40,000이다. Sankar 등(2009)은 LDA System을 이용하여 사각형제트로부터 x/b 가 0.5~27범위에서 주흐름방향유속을 측정하여 원형자유제트의 거동과 비교하였는데, 본 연구에서도 모의결과를 상기 수리실험결과와 비교, 검토하였다. 계산격자는 노즐 부근의 흐름이 급변하는 곳은 격자를 촘촘하게, 흐름의 변화가 완만

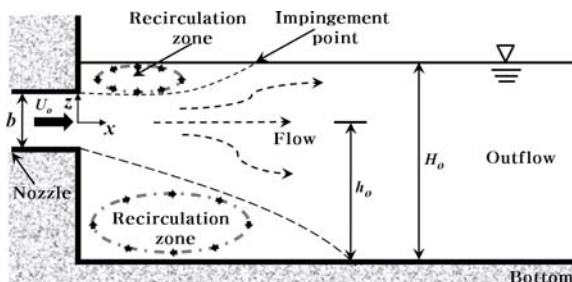


Fig. 1. 수중사각형제트에서 방류된 흐름의 개념도

한 곳은 격자를 느슨하게 배치하여 107,352개의 요소(element)로 구성하였다. 제트의 유입부는 일정한 유속조건을 부여하였으며 우측면의 유출부는 일정한 수위조건을 부여하였다. 그 외 수로의 바닥면과 측면은 수리학적으로 매끄러운 벽면경계로 무활(no-slip) 경계조건을 부여하였다. 모의구간의 상부면은 대기압의 공기층이 존재하고 있어, 물의 흐름은 경계조건 영향을 받지 않는다. 계산결과와 수렴여부는 흐름의 운동에너지, 난류에너지, 유입 및 유출량의 수렴여부를 이용하여 판단하였다. 본 연구에서는 이상의 수렴조건을 만족할 수 있도록 200초 동안 계산한 결과를 이용하여 분석하였다.

3. 모형의 검증

모형의 검증을 위하여 Sankar 등(2009)의 수리실험과 동일한 조건으로 수치모의를 하였다. Fig. 2는 제트의 중심축을 따르는 주흐름방향유속(U_1)의 분포를 도시한 것으로 종방향 위치는 방류구의 길이(b), 주흐름방향유속은 초기방류유속(U_o)으로 무차원화하여 도시하였다. 원형부호는 Sankar 등(2009)의 수리실험결과이며 실선은 본 연구의 수치모의 결과로 수리실험결과와 대체로 잘 일치하고 있다. 유속의 감쇠는 무차원거리가 약 2.7에서부터 발생하고 있다.

Fig. 3은 주흐름방향유속의 연직분포를 도시한 것이다. 원형부호는 Sankar 등(2009)의 사각형제트의 수리실험결과, 실선은 본 연구의 수치모의 결과이다. (a)는 방류구에서 멀리 떨어지지 않은 지점($x/b=1.0$)으로써 Sankar 등(2009)의 결과와 대체로 잘 일치하고 있으며, 유속의 감쇠가 발생하지 않고 있다. (b)는 $x/b=5.0$ 의 지점으로

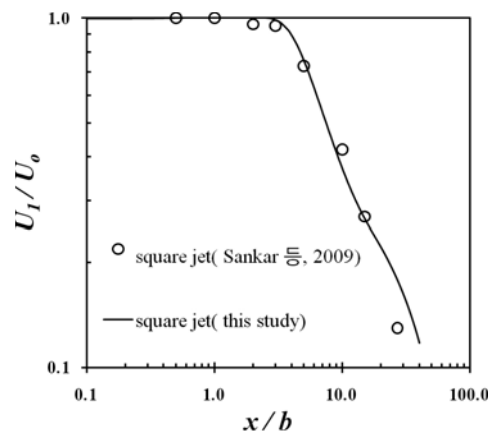


Fig. 2. 제트의 중심축을 따르는 주흐름방향유속의 분포

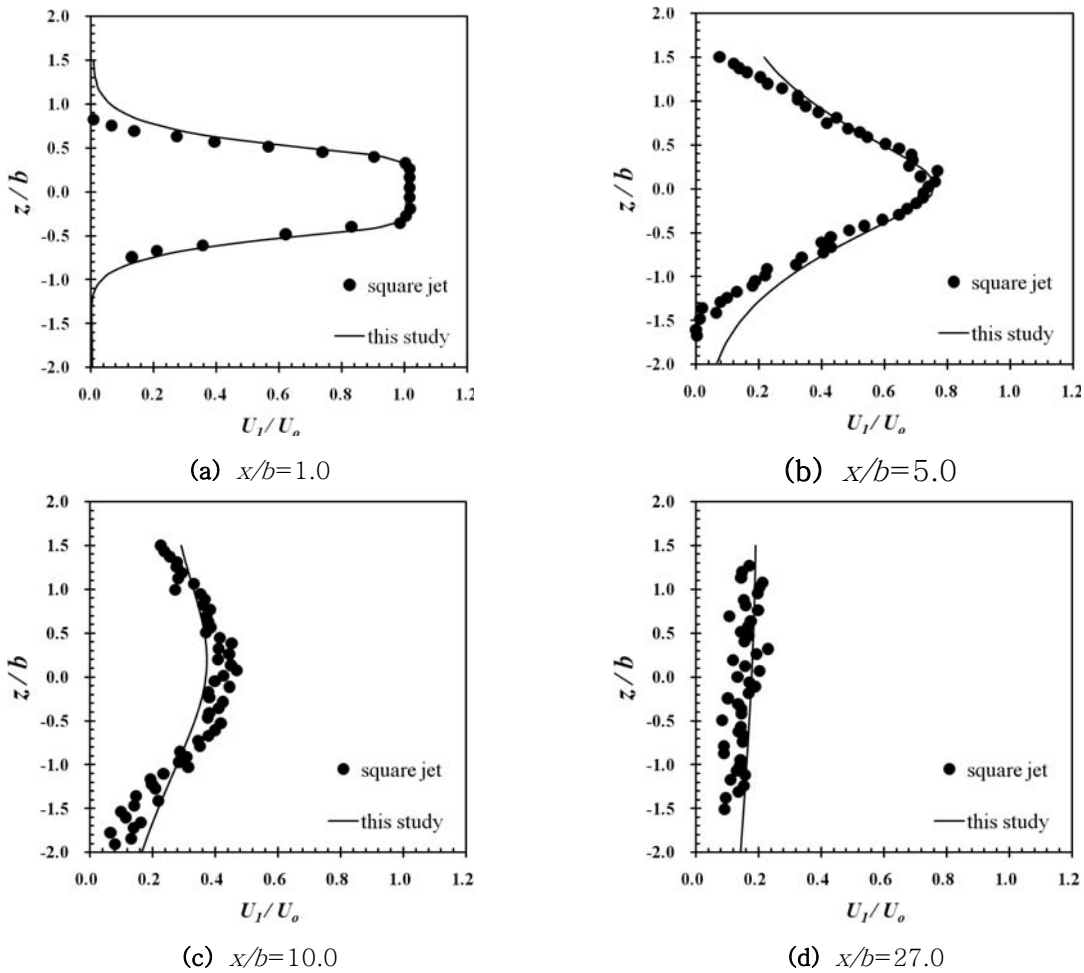


Fig. 3. 주흐름방향유속의 연직분포

Sankar 등(2009)의 결과와 본 연구의 수치모의 결과의 제트중심축에서의 첨두유속이 감소된 것을 볼 수 있다. (c)와 (d)는 $x/b=10.0$ 그리고 $x/b=27.0$ 일 때의 유속분포로써 종방향의 거리가 증가함에 따라 유속이 급격하게 감소된 것을 볼 수 있으며, 대체적으로 실험결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 4는 횡방향으로 y/b 가 0.00, 0.25, 0.50인 곳에서 주흐름방향유속의 연직분포를 도시한 것이다. 부호는 Sankar 등(2009)의 사각형제트의 수리실험결과이며, 실선은 본 연구의 모의결과이다. (a)는 $x/b=1.0$ 일 때 즉, ZFE에 속하는 구간으로 y/b 가 0.00과 0.25에서는 제트의 중심코어에 위치하므로 유속분포가 비슷하지만 y/b 가 0.50일 때 즉, 사각형제트의 모서리 부분에서는 유속이 급격하게 감소함을 볼 수 있다. (b)는 $x/b=5.0$ 일 때 즉, ZEF에 속하는 구간으로 유속분포는 Gauss 함수의 형태와 비슷

한 분포를 보인다. 하지만 자유수면의 영향으로 중심축 상단의 유속이 하단의 유속보다 큰 분포를 보이고 있다.

4. 모형의 적용

3장 모형의 검증과 동일한 실험수로에서, 주변수체의 수심(H_o)과 사각형제트의 연직방류위치를 변화시키며 수표면방류와 수중방류된 사각형제트의 흐름 거동을 분석하였다. 실험을 위한 수심(H_o)이 0.16m이며, 제트의 연직위치가 흐름거동에 미치는 영향을 분석하기 위하여 z/b 가 0.5, 1.5, 2.5, 3.5인 경우에 대하여 각기 모의하였다. 단, 여기서 z 는 수로바닥이 원점이 되는 연직좌표이다. z/b 가 0.5인 경우는 바닥제트로 방류구의 바닥이 주변수체의 바닥면과 일치하는 경우이고, 3.5인 경우는 수표면방류로 방류구의 천장이 자유수면과 일치하는 경우이다. 그리고 비교

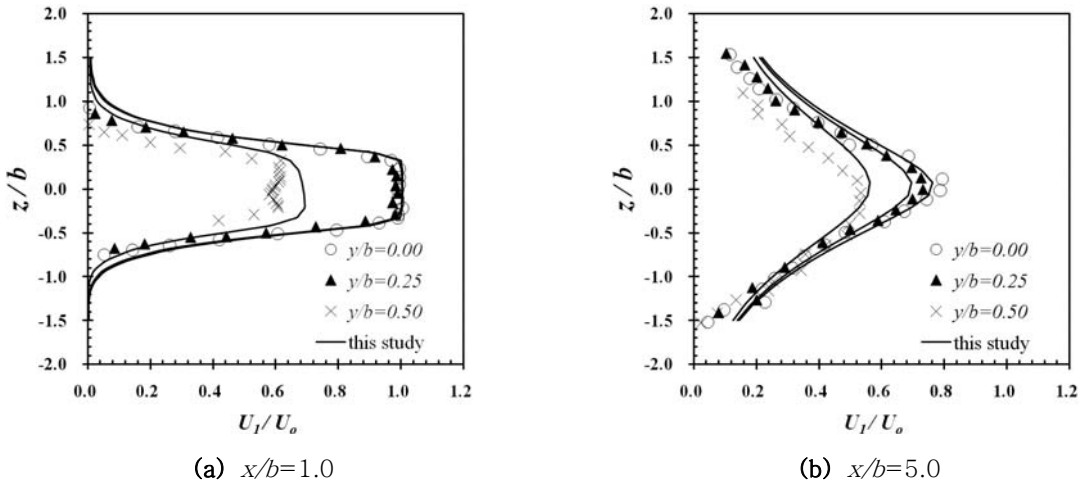


Fig. 4. 횡방향 위치에 따른 주흐름방향유속의 연직분포

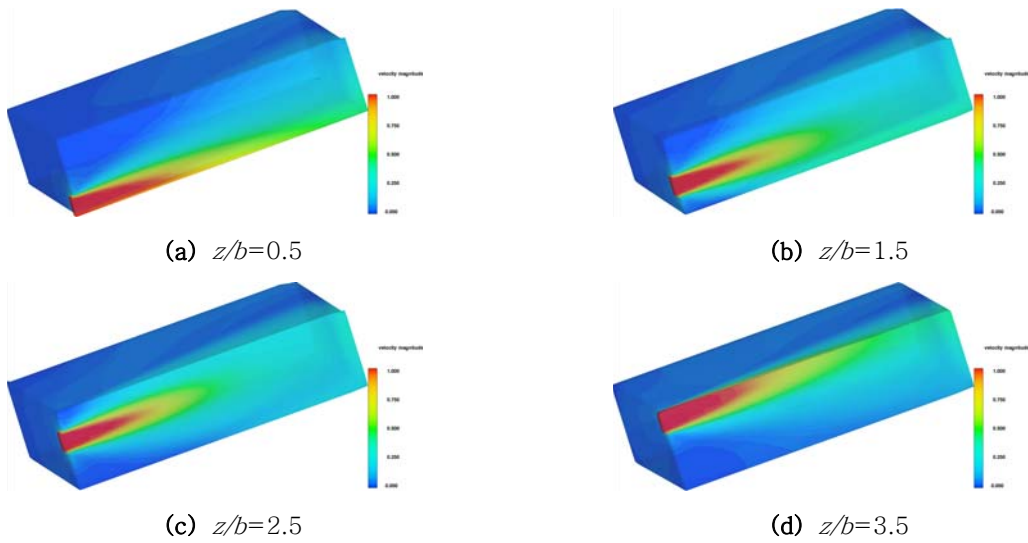


Fig. 5. 방류구 위치에 따른 유속분포 (단위: m/sec)

를 위하여 자유수면과 바닥면의 영향을 받지 않은 사각형자유제트(free square jet)에 대한 흐름 거동을 모의하였다. 사각형자유제트의 모의를 위해서, 수심 2.0m, 수로폭 2.0m의 무한수체에 앞의 조건과 동일한 사각형 제트가 수심의 중앙부에서 수평 방류되는 조건으로 모의하였다.

Fig. 5는 방류구 위치에 따른 방류구 주변에서의 3차원 유속분포를 도시한 것이다. (a)는 z/b가 0.50인 위치에 방류구의 중심이 위치하는 경우에 바닥제트이다. 이 경우 제트의 침두유속이 방류 후 급격히 제트의 중심에서 바닥면쪽으로 이동하는 것을 확인할 수 있다. 이러한 현상은 수표면 방류인 (d)에서도 확인할 수 있다. 이는 (a)의 경우 바닥면에서, (d)의 경우 수표면에서 제트포획연행이 제한되므로

제트가 가지는 운동량이 바닥면 근처와 수표면에서 상대적으로 늦게까지 보존되기 때문이다. (b)와 (c)는 제트의 중심코어가 위치하는 ZFE와 중심코어가 소멸된 ZEF로 구분되는 근역에서의 제트의 형태를 잘 보여주고 있다.

Fig. 6은 사각형제트의 방류위치, z/b가 0.5, 1.5, 2.5, 3.5인 경우에 대하여 주흐름방향유속의 연직분포를 도시한 것이다. 연직위치는 방류구의 길이(b), 주흐름방향유속은 초기방류유속(Uo)으로 무차원화하여 도시하였다. (a)는 바닥제트, (d)는 수표면방류, (b)와 (c)는 수중방류의 형태로 Fig. 5에서 설명한 현상을 보다 구체적으로 확인할 수 있다. (a)는 바닥제트의 연직유속분포의 전형적인 형태를 보이는데, 방류 직후(x/b=0.5)에 확인할 수 있는 제트의

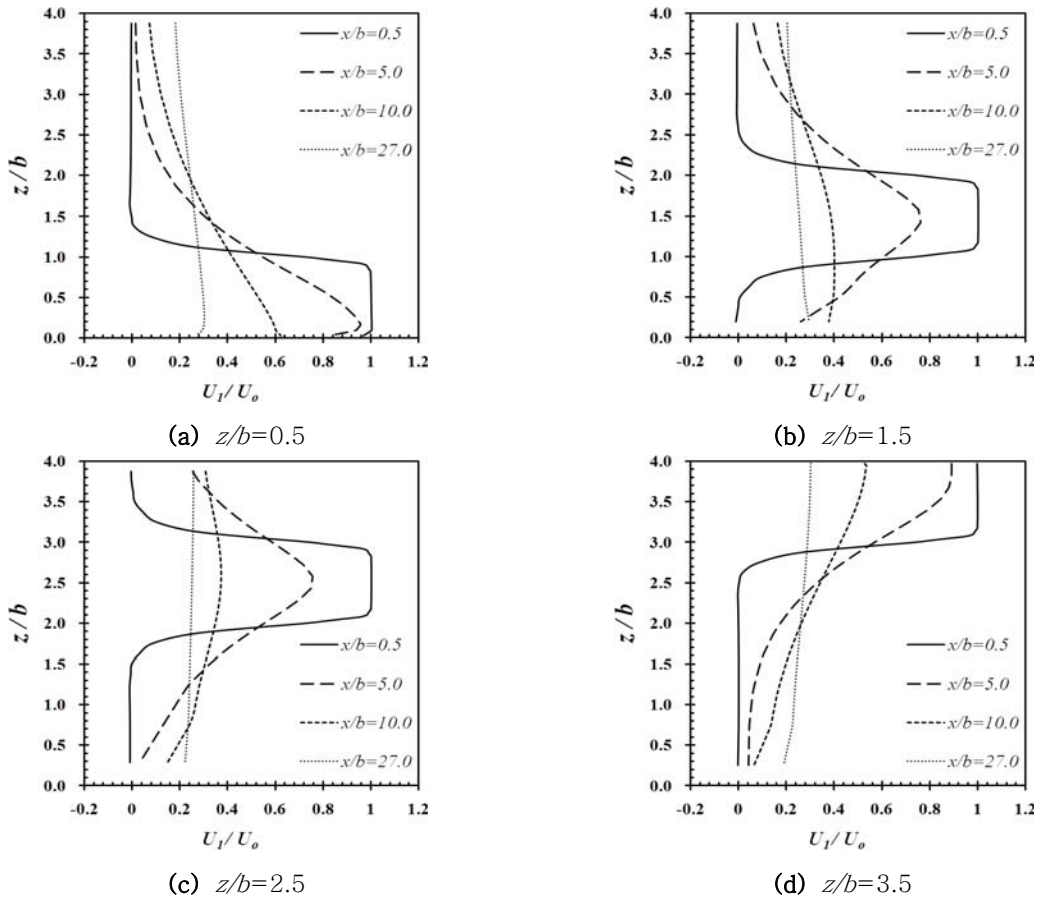


Fig. 6. 방류구 위치에 따른 주흐름방향유속의 연직분포

중심코어는 제트가 진행하면서 사라지고 바닥면에서의 제트포화연행의 제한과 바닥면의 무활경계로 인해 제트의 침두유속이 제트의 중심부에서 바닥면으로 급격히 이동하는 양상을 보인다. 즉 바닥면에서 침두유속이 발생하는 연직위치까지는 난류경계층(turbulent boundary layer)을 형성하고 그 외측에서는 자유전단흐름(free shear flow)의 양상을 보인다. 특히, 난류경계층에서는 유속분포의 급경사로 인해 바닥마찰이 증가하므로 바닥제트의 형태로 방류하는 경우에는 특히, 방류구 근처에서는 바닥면의 세굴문제에 관심을 가져야 할 것으로 판단된다. (d)는 자유수면에서의 제트포화연행이 제한되므로 침두유속이 제트의 중앙에서 자유수면으로 이동하는 형태를 보이고 있다. 단 (a)와는 달리 자유수면은 무활경계가 아니므로 자유수면에서 지속적으로 침두유속이 발생하고 있다. (b)와 (c)는 천해역에서의 수중 방류 형태로 (b)의 경우 제트의 중심위치가 바닥면에 가깝기 때문에 제트가 진행하면서 침두유속의 위치가 점차 바닥면으로 이동하는 형태를 보이며, (c)의 경우 제트가 진행하면서 침두유속의 위치는 점차 자유수면쪽으로 이동하는 경

향을 보이나, 그 정도는 (b)에 비해 작은 것으로 분석되었다.

Fig. 7은 사각형제트의 방류위치에 따른 주흐름방향유속의 횡분포이다. 횡방향 위치는 방류구의 길이(b), 주흐름방향유속은 초기방류유속(U_0)으로 무차원화하여 도시하였다. x/b 가 0.5인 경우 모든 경우에서 제트의 중심코어가 중심축에 위치하나, x/b 가 5.0이상인 경우에는 중심코어는 사라지고 전체적으로 Gauss 함수의 형태를 가진 유속분포를 잘 재현하고 있다. 그리고 제트에 포화연행된 유량으로 인해 주변수체에 재순환영역이 형성되고 있음을 확인할 수 있다.

Fig. 8은 사각형제트의 중심축을 따라 주흐름방향유속의 종분포를 도시한 것이다. 유속감쇠율을 비교하기 위하여 사각형자유제트의 유속감쇠율을 함께 도시하였다. 종방향 위치는 방류구의 길이(b), 주흐름방향유속은 초기방류유속(U_0)으로 무차원화하여 도시하였다. z/b 가 0.5와 3.5인 경우, 그리고 z/b 가 1.5와 2.5인 경우 각각은 유속감쇠가 비슷한 거동을 보이고 있다. 사각형자유제트는 제트의 중심코어가 소멸된 이후에는 제트의 침두유속이 선형으로 감쇠하

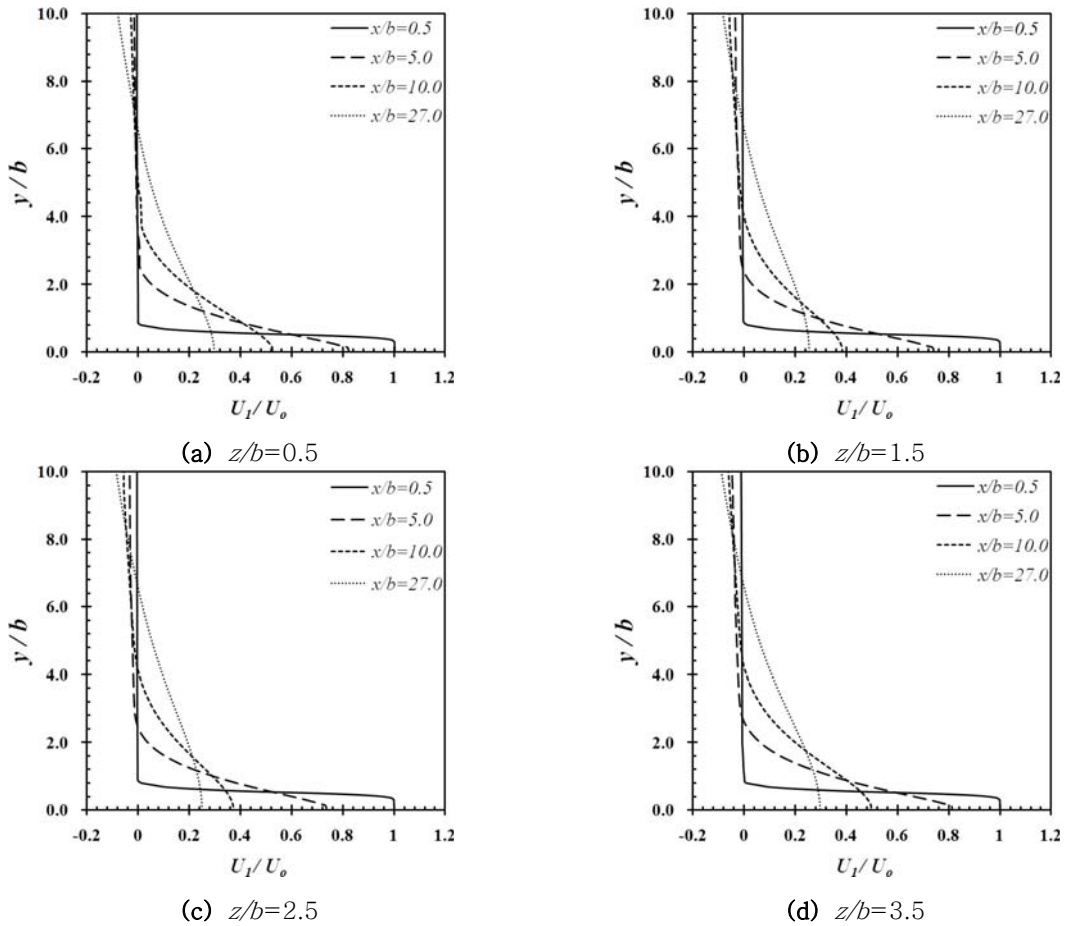


Fig. 7. 방류구 위치에 따른 주흐름방향유속의 횡분포

는 양상을 보이고 있다. 방류구 근처에서는 바닥면과 유한 수심으로 인한 자유수면의 영향으로 제트의 포확연행이 제한되므로 천해역에 방류된 제트는 자유제트에 비해 유속감쇠율이 작게 나타나며, 유속의 연직분포가 거의 균일할 정도로 방류구에서 떨어진 위치(본 연구에서는 b/x 가 20~30내외)에서는 여기에 유한수심의 영향으로 제트의 포확연행이 더욱 제한되므로 유속의 감쇠가 자유제트에 비해 더욱 작게 발생하게 된다. 특히 바닥제트와 수표면방류시에 유속감쇠율이 작게 나타나는 이유는 Fig. 5와 Fig. 6에서 언급했듯이 바닥면과 자유수면이 제트포확연행을 제한하면서 제트의 중심코어가 가지는 운동량이 늦게까지 보존되는 것으로 설명할 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 천해역에 수표면 및 수중방류된 사각형제트의 흐름 거동을 전산유체역학을 이용하여 각기 모의하고

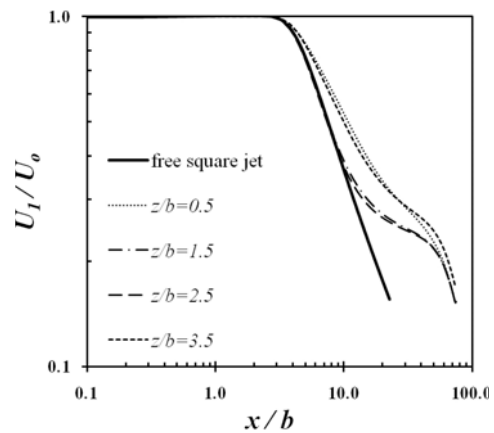
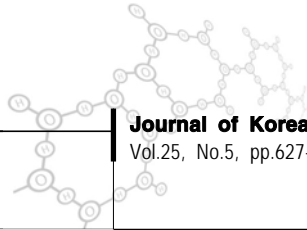


Fig. 8. 제트의 중심축을 따르는 주흐름방향유속의 종분포

그 결과를 비교하였다. 모형의 검증은 Sankar 등(2009)의 사각형제트의 수리실험결과를 이용하였으며 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.



- 1) 사각형제트의 침두유속의 감쇠는 무차원거리가 약 2.7에서부터 발생하였다.
- 2) 사각형제트의 연직위치를 변화시키며 흐름 거동을 분석한 결과 침두유속이 바닥제트의 경우 바닥면쪽으로, 수표면 방류의 경우 수표면쪽으로 이동하였다. 이러한 현상은 제트포획연행이 바닥면과 수표면에서 제한되므로 제트의 중심코어가 가지는 운동량이 상대적으로 늦게까지 보존되기 때문이다. 바닥제트의 경우, 바닥면에서 제트포획연행의 제한과 바닥면의 무활경계로 인해 침두유속이 제트의 중앙에서 바닥면으로 급격히 이동하며, 수표면방류의 경우 자유수면에서 제트포획연행이 제한되므로 침두유속이 제트의 중앙에서 자유수면으로 이동하였다. 그리고 자유수면의 경우 바닥면과 달리 무활경계가 아니므로 지속적으로 자유수면에서 침두유속이 발생하였다.
- 3) 방류구 근처에서는 바닥면과 유한수심으로 인한 자유수면의 영향으로 천해역에 방류된 제트는 자유제트에 비해 유속감쇠율이 작게 나타나며, 유속의 연직분포가 거의 균일할 정도로 방류구에서 떨어진 위치($b/x = 20 \sim 30$)에서는 여기에 유한수심의 영향으로 제트의 포획연행이 제한되어 유속의 감쇠가 자유제트에 비해 더욱 작게 발생하였다.

본 연구결과는 천해역에 방류된 사각형제트의 유속구조 파악 뿐 아니라, 제트가 수체의 자유수면과 바닥면에 미치는 영향을 평가하는데 활용할 수 있을 것이다. 특히 바닥제트의 경우는 방류구 근처의 세굴과 관련된 문제에 본 연구의 결과를 활용할 수 있을 것으로 사료된다.

감사의 글

본 연구는 2009년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2009-0077855).

참고문헌

- 김대근, 서일원 (1997) 원형바닥젤의 유속구조 해석, *한국수자원학회학술논문집*, 30(5), pp. 467-475.
- 서일원 (1995) *월성원자력 3, 4호기 배수방파제에 대한 수리모형 실험보고서*, 연구보고서, 한국전력공사 원자력건설처, 서울대학교 공학연구소.
- 속초시 (1996) *속초시 하수종말처리장 추가공사 기본 및 실시계획 보고서*.
- 이남주, 이길성, 최홍식 (1994) 가로흐름 수역으로 방출되는 2차원 표면온배수 수치모형 비교연구, *한국해양해양공학회지*, 6(1), pp. 40-50.
- 이남주, 최홍식, 허재영 (1995) 가로흐름 수역으로 방출되는 3차원 온배수 난류모형, *한국해양해양공학회지*, 7(2), pp. 148-155.
- Fischer H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J., and Brooks, N.H. (1979) *Mixing in inland and coastal waters*, Academic Press, Inc., NY.
- Flow Science (2007) *Flow-3D (Theory Manual)*, Los Alamos, NM.
- Kim, D.G., and Cho, H.Y. (2006) Modeling the buoyant flow of heated water discharged from surface and submerged side outfalls in shallow and deep water with a cross flow, *Environmental Fluid Mechanics*, 6, pp. 501-518.
- Kim, D.G., and Seo, I.W. (2002) Analysis of velocity structure of wall jet originating from circular orifices in shallow water, *Water Engineering, Research*, 3(4), pp. 234-245.
- McGuirk, J.J. and Rodi, W. (1978) A depth-averaged mathematical model for the near field of the side discharge into open-channel flow, *J. of Fluid Mechanics*, 86(4), pp. 761-781.
- McGuirk, J.J. and Rodi, W. (1979) Mathematical modeling of three-dimensional heated surface jets, *J. of Fluid Mechanics*, 95(4), pp. 609-633.
- Rajaratnam, N. (1965) Submerged hydraulic jump, *J. of Hydraulics Div.*, 91(4), pp. 71-96.
- Rajaratnam, N., and Humphries, J.A. (1983) Diffusion of bluff wall jets in finite depth tailwater, *J. of Hydraulic Eng.*, 109(11), pp. 71-96.
- Sankar, G., Balachandar, R., Carriveau, R. (2009) Characteristics Of a Three-Dimensional Square Jet in the Vicinity of a Free Surface, *J. of Hydraulic Eng.*, 135(11), pp. 989-994.
- Wu, S. and Rajaratnam, N. (1995) Free jumps, submerged jumps and wall jets, *J. of Hydraulic Research*, 33(2), pp. 197-212.
- Yakhot, V., Orszag, S.A., Thangam, S., Gatski, T.B., and Speziale, C.G. (1992) Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, *Physics of Fluids*, 4(7), pp. 1510-1520.