

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-B.2011.35.6.609

ISSN 1226-4881

2차원 채널 내의 수직 평판을 지나는 스톡스 유동에 대한 연구

윤석현* · 정재택**

* 전남대학교 기계공학과

Study of Stokes Flow Past a Vertical Plate in a Two-Dimensional Channel

Seok-Hyun Yoon* and Jae-Tack Jeong**

* Dept. of Mechanical Engineering, Chonnam Nat'l Univ.

(Received December 16, 2010 ; Revised March 7, 2011 ; Accepted March 8, 2011)

Key Words: Two Dimensional Channel Flow(2차원 채널 유동), Stokes Flow(스톡스 유동), Plane Poiseuille Flow(포아제 유동), Pressure Drop(압력 강하), Eigenfunction Expansion(고유함수 전개)

초록: 2차원 채널 내의 수직 평판을 지나는 유동에 대한 이론적 연구를 수행하였다. 수직 평판은 채널의 상하 중앙부에 위치하며, 수직 평판에서 멀리 떨어진 채널 내에는 포아제 유동이 존재한다. 스톡스 근사를 적용하고 고유함수 전개와 점 배열 방법을 사용하여 유동장을 해석하였다. 해석의 결과로 유동함수와 압력분포식을 구하였으며, 채널의 벽면과 수직 평판에 작용하는 압력 및 전단응력 분포를 계산하였다. 또한, 수직 평판으로 인해 부가적으로 발생하는 압력 강하와 수직 평판이 받는 힘을 수직 평판 길이의 함수로 계산하였으며, 대표적인 수직 평판의 길이에 대하여 유선과 압력분포도를 도시하였다. 또한, 작은 레이놀즈 수가 유동에 미치는 영향을 알아보기 위하여 레이놀즈 수가 작은 층류유동의 경우에 대하여 수치해석을 수행하였다.

Abstract: A two-dimensional Stokes flow past a vertical plate in a channel is analyzed. The vertical plate is located at the center of the channel, and plane Poiseuille flow exists far upstream and downstream of the vertical plate. The Stokes approximation is used, and the flow is investigated analytically using the method of eigenfunction expansion and the point collocation method. From the analysis, the stream function and pressure distribution are obtained, and the pressure and shear stress distributions on the plate and channel wall are calculated. The additional pressure drop induced by the vertical plate and the force exerted on it are calculated as functions of the length of the vertical plate. For a typical length of the vertical plate, the streamline pattern and pressure distribution are shown. In addition, numerical analysis of laminar flow with a small Reynolds number is carried out to analyze the effect of a small Reynolds number on the flow pattern.

- 기호설명 -

a : 수직 평판의 길이
 F : 수직 평판이 받는 단위 폭 당의 힘
 H : 채널의 반폭
 Im : 복소수의 허수부분
 p : 유동장 내의 압력
 Re : 복소수의 실수 부분

Re_H : 레이놀즈 수($Re_H = \frac{U_m H}{\nu}$)

U_m : 채널 내의 평균 유속
 u : x 방향의 속도
 v : y 방향의 속도
 x, y : 2차원 직교 좌표계
 μ : 점성계수(coefficient of viscosity)
 ν : 동점성계수(coefficient of kinematic viscosity)
 τ : 전단응력(shear stress)
 Ψ : 유동함수(streamfunction)

1. 서론

레이놀즈 수가 매우 작은 Stokes 유동은 MEMS (Micro Electro Mechanical System) 관련 기술이 적

† Corresponding Author, jtjeong@chonnam.ac.kr
 © 2011 The Korean Society of Mechanical Engineers

용되는 전자, 반도체, 마이크로 로봇, 의학 분야 및 마이크로 채널^(1,2) 등의 설계에 있어서 매우 중요하게 다루어진다. 특히 바이오 시스템에서의 미소 유량을 조절하기 위한 마이크로 밸브, 마이크로 펌프 등의 마이크로 유체 소자나 소형화된 정밀 기계를 제어하는 유압 시스템 등에서 장애물의 존재에 의한 유동특성은 미리 예측되어야 할 것이다. 따라서 장애물을 지나는 유동특성은 장애물의 형상이나 크기 및 레이놀즈 수의 변화에 따라 연구되고 있다.⁽³⁻⁵⁾

채널 내에 장애물이 놓여있는 경우에 대해서 Wang⁽⁶⁾은 채널 벽면에 상하 대칭인 핀과 엇갈린 핀이 주기적으로 부착되어 있는 경우의 Stokes 유동장을 고유함수 전개 (eigenfunction expansion)와 점 배열(point collocation) 방법으로 유선과 압력 등을 해석하였다. Yoon & Jeong⁽⁷⁾은 채널 벽면에 상하 박막이 부착된 Stokes 유동장에 대하여 해석하고, 레이놀즈 수를 점차 증가시키면서 수치해석을 수행하여 유동이 비대칭으로 바뀌는 코안다 효과에 대하여 논의하였다. Kim⁽⁸⁾은 두 평행 평판 사이의 수직평판이 운동할 때 수직평판이 받는 힘에 대한 해석적 연구를 수행하였고, Kalita & Gupta⁽⁹⁾는 채널 내의 사각 장애물에 대해서 수치해석 결과를 제시하였다.

본 연구에서는, 채널 내 포아제(Poiseuille) 유동의 중심부에 놓인 장애물을 Fig. 1과 같이 채널 내의 중심부에 놓인 수직 평판의 형상으로 모델링하고, 수직 평판의 길이 변화에 따른 유동 특성을 Stokes의 근사를 사용하여 수학적으로 해석하였다.

또한 레이놀즈 수가 유동에 미치는 효과를 알아보기 위하여 레이놀즈 수가 작은 층류유동의 경우에 대한 수치해석을 추가적으로 수행하였다.

2. 연구모델

본 연구에서는, Fig. 1과 같이, 높이 $2H$ 인 채널 내에 길이 $2a$ 인 평판이 채널 중앙에 수직으로 놓여있고 평판으로부터 멀리 떨어진 곳에서는 평균 속도 U_m 인 포아제(Poiseuille) 유동이 존재하는 경우의 유동에 대하여 고찰한다.

여기서 채널 내의 수직 평판은 두께가 매우 얇으며 유체의 물성치는 일정하다고 가정한다.

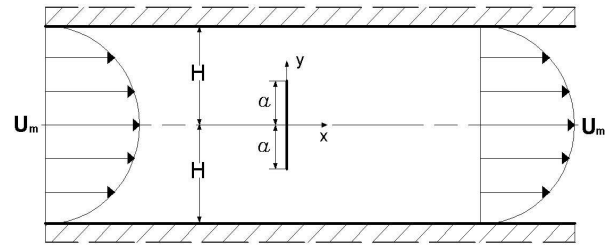


Fig. 1 Geometry of the two-dimensional channel

해석의 일반성을 부여하고, 시스템을 지배하는 변수의 영향을 정량적으로 고찰하기 위하여 특성길이 H , 특성속도 U_m 으로 무차원화하였으며, 레이놀즈 수는 $Re_H \equiv (U_m H)/\nu$ 로 정의하였다. 이후의 모든 과정에서 변수들은 무차원화된 변수들을 의미한다.

3. 유동에 대한 수학적 해석

3.1 지배방정식 및 경계조건

관성의 효과가 점성의 효과에 비해 충분히 작은 경우 ($Re_H \ll 1$)에 관성 효과를 무시하면 유동의 지배 방정식은 다음과 같은 Stokes 방정식이 된다.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (2)$$

2차원 비압축성 유동에 대한 유동함수 $\Psi(x, y)$ 를 정의하면 속도는 다음과 같이 표현된다.

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3)$$

식 (3)에 의해 연속방정식 (1)은 자동적으로 만족되며 식 (2)에서 압력 p 를 소거하면 유동함수 Ψ 는 다음의 2차원 biharmonic equation을 만족한다.⁽¹⁰⁾

$$\nabla^4 \Psi = \nabla^2 \nabla^2 \Psi = \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = 0. \quad (4)$$

유동의 상·하 및 좌·우 대칭성을 고려하면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\Psi(x, y) = \Psi(-x, y) = -\Psi(x, -y), \quad (5)$$

$$p(x, y) = -p(-x, y) = p(x, -y). \quad (6)$$

따라서 Fig. 1에서 $x \geq 0, 0 \leq y \leq 1$ 의 영역만을 고려하면 충분하다. 식 (4)을 만족하는 유동함수 Ψ 에 대한 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi(x, 1) = 1, \quad -\infty < x < \infty \quad (7a)$$

$$\Psi_y(x, 1) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (7b)$$

$$\Psi_x(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (7c)$$

$$\Psi(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq a \quad (7d)$$

$$p(0, y) = 0, \quad a < y \leq 1 \quad (7e)$$

$$\Psi(x, y) \rightarrow (3y - y^3)/2, \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (7f)$$

3.2 유동함수 및 압력분포 계산

Fig. 1과 같은 형상의 유동장에서 유동의 대칭성을 고려하면 유동함수 $\Psi(x, y)$ 를 $0 \leq x < \infty$ 인 영역에서 다음과 같은 식 (8)의 형태로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = & \frac{3y - y^3}{2} + \int_0^\infty A(\xi) \cos \xi x S(\xi, y) d\xi \\ & + \sum_{n=1}^\infty B_n \sin n\pi y T_n(x). \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 우변의 첫째 항 $(3y - y^3)/2$ 은 채널 내의 2차원 포아제(Poiseuille) 유동을 의미한다.

식 (8)에 포함되어 있는 미지함수 $A(\xi), S(\xi, y), T_n(x), B_n$ 는 경계조건 식 (7)을 이용하여 모두 결정해야 한다.

먼저, 위 식 (8)의 유동함수를 식 (4)에 대입하면 $S(\xi, y)$ 와 $T_n(x)$ 는 다음의 미분 방정식을 각각 만족해야 한다.

$$\frac{d^4 S}{dy^4} - 2\xi^2 \frac{d^2 S}{dy^2} + \xi^4 S = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d^4 T}{dx^4} - 2n^2 \pi^2 \frac{d^2 T}{dx^2} + n^4 \pi^4 T = 0. \quad (10)$$

대칭조건식 (5)와 경계조건식 (7a)와 (7c)를 적용하여 $S(\xi, y)$ 와 $T_n(x)$ 에 관하여 풀면 다음과 같다.

$$S(\xi, y) = \cosh \xi \sinh \xi y - y \sinh \xi \cosh \xi y, \quad (11)$$

$$T_n(x) = e^{-n\pi x} (n\pi x + 1). \quad (12)$$

이 때 식 (12)에는 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $T_n(x)$ 이 발산하지 않는 조건이 사용되었다.

식(8)에 식 (11)과 (12)를 대입하고 경계조건식 (7b)를 적용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty A(\xi) (\xi - \sinh \xi \cosh \xi) \cos \xi x d\xi \\ & + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n B_n n \pi e^{-n\pi x} (n\pi x + 1) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

위 식 (13)에 Fourier cosine 적분공식을 사용하면 $A(\xi)$ 를 B_n 으로 나타낼 수 있다. 이 $A(\xi)$ 를 식 (8)에 대입하고 유수정리(Residue theorem)⁽¹¹⁾를 사용하여 적분하면 유동함수 $\Psi(x, y)$ 가 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = & \frac{3y - y^3}{2} - \sum_{n=1}^\infty (-1)^n 4n^4 \pi^4 B_n \times \\ & \text{Im} \sum_{m=1}^\infty \frac{J_m(y)}{(\xi_m^2 + n^2 \pi^2)^2 \sinh^2 \xi_m} e^{i\xi_m x}. \end{aligned} \quad (14)$$

여기에서 $J_m(y)$ 은

$$J_m(y) \equiv \cosh \xi_m \sinh \xi_m y - y \sinh \xi_m \cosh \xi_m y.$$

이고, $\xi_m (m = 1, 2, 3 \dots)$ 은 $\xi - \sinh \xi \cosh \xi = 0$ 의 1상한 내의 복소수 근 중 m 번째 근으로서 $m \gg 1$ 일 때 ξ_m 의 점근거동은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi_m \rightarrow & (m + \frac{1}{4}) \pi i \\ & + \frac{1}{2} \ln \left[(2m + \frac{1}{2}) \pi + \left\{ (2m + \frac{1}{2})^2 \pi^2 - 1 \right\}^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

유동함수 $\Psi(x, y)$ 에 관한 표현식 (14)로부터 유

동의 속도 u, v 를 구할 수 있으며, 이를 식 (2)에 대입하면 $\mu U_m/H$ 에 의해 무차원화된 압력분포 $p(x, y)$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$p(x, y) = -3x - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 8n^4 \pi^4 B_n \times \\ Re \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi_m \cosh \xi_m y}{(\xi_m^2 + n^2 \pi^2)^2 \sinh \xi_m} e^{i \xi_m x} + K. \quad (16)$$

위 식 (16)의 우변 첫 번째 항은 2차원 채널에서 포아제 유동에서의 선형적인 압력 강하를 나타낸다.

식 (14)와 (16)내의 미지수 B_n 과 상수 K 를 구하기 위하여 식 (7d)와 (7e)의 경계조건을 적용해야 한다. 수치계산을 위해 B_n 을 N 항까지 절단(truncation)하고 $x=0, 0 < y < 1$ 에서 $(N+1)$ 개의 점에 대한 경계조건 식 (7d), (7e)을 적용하면, $(N+1)$ 개의 미지수 [$B_n (n=1, 2, \dots, N)$ 과 상수 K]에 대한 $(N+1)$ 개의 선형 연립방정식이 얻어진다. 이 연립방정식으로부터 $B_n (n=1, 2, \dots, N)$ 과 K 를 모두 구할 수 있는데, 실제 계산에서는 $N \cong 100$ 이면 충분하였다.

이와 같이 구한 $B_n (n=1, 2, 3, \dots, N)$ 과 상수 K 값을 식 (14)와 (16)에 각각 대입하면 유동함수 $\Psi(x, y)$ 와 압력 분포 $p(x, y)$ 를 구할 수 있으며 따라서 유동의 특성을 모두 해석할 수 있다.

3.3 평판이 받는 힘

채널 내에서 수직 평판이 받는 단위 폭 당 힘 F 는 압력분포 식 (16)를 이용하면 다음과 같은 계산식이 된다.

$$F = \int_{-a}^a \{p(0^-, y) - p(0^+, y)\} dy \\ = -4 \int_0^a p(0^+, y) dy. \quad (17)$$

여기서, F 는 μU_m 으로 무차원화된 힘이며, $-a < y < a$ 일 때 $p(0^-, y) = -p(0^+, y)$ 임을 이용하였다.

3.4 전단응력 분포

채널 벽면($y=1$)에서의 전단 응력 τ_w 와 수직

평판에서의 전단 응력 τ_p 를 $\mu U_m/H$ 으로 무차원화한 표현식은 다음과 같다.

$$\tau_w = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=1} = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 y} \right)_{y=1} \quad (18)$$

$$\tau_p = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0} = - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x} \right)_{x=0} \quad (19)$$

따라서, 유동함수 식 (14)를 이용하여 채널의 벽면과 수직 평판에서의 전단응력 분포를 각각 계산할 수 있다.

4. 계산결과 및 고찰

Fig. 2에 수직 평판의 길이 $a=0.5$ 인 경우에 대해 식 (14)로부터 유동함수를 계산하여 유선을 도시하였다. 채널 벽면과 수직 평판을 포함한 전 유동장에서 점성 에디(viscous eddy)는 나타나지 않았는데, 이는 평판이 채널 벽면에 부착된 경우⁽⁷⁾ 코너에 점성 에디가 나타나는 것과 대조를 이룬다. 수직 평판 길이 a 를 변화시켜도 점성 에디는 나타나지 않고 유선의 패턴도 유사하였다.

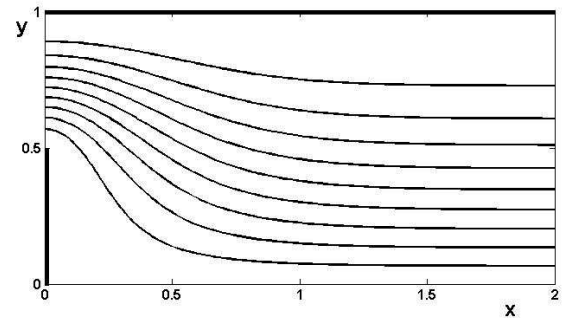


Fig. 2 Streamlines for Stokes flow ($a=0.5$)

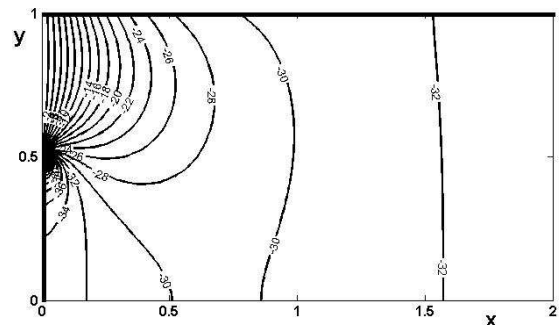


Fig. 3 Pressure contour lines for Stokes flow ($a=0.5$)

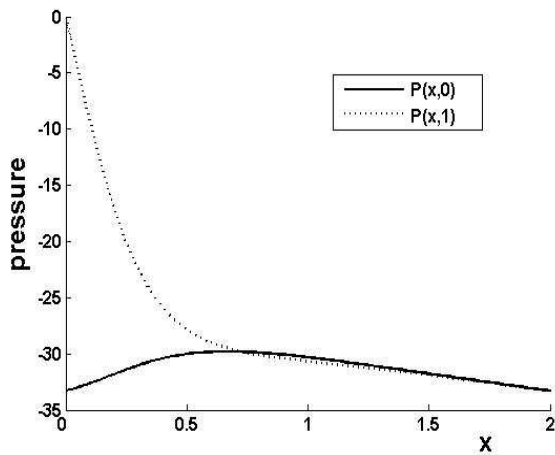


Fig. 4 Pressure distributions on the center line $P(x,0)$ and on the wall $P(x,1)$ ($a=0.5$)

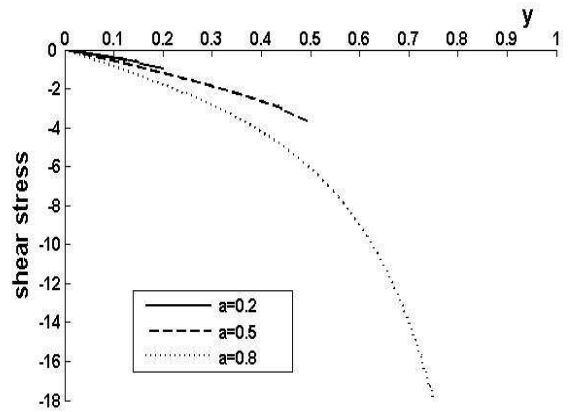


Fig. 6 Shear stress $\tau(0, y)$ on the vertical plate ($a=0.2, 0.5, 0.8$)

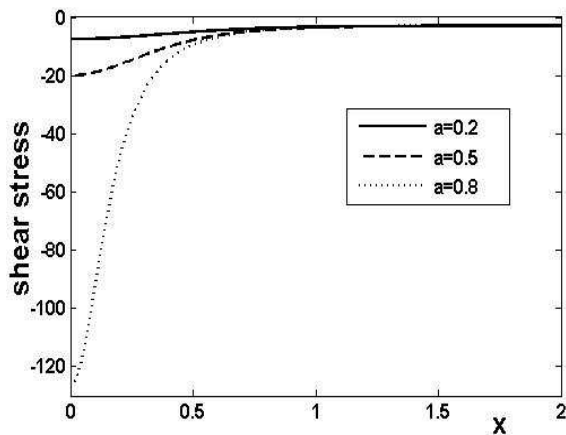


Fig. 5 Shear stress $\tau(x, 1)$ on the wall ($a=0.2, 0.5, 0.8$)

Fig. 3에 식 (16)으로부터 계산된 압력 contour를 나타내었다. 수직 평판의 끝부분에서 속도 방향의 급변에 따른 압력변화가 크게 나타남을 알 수 있다.

Fig. 4에 채널 벽면($y=1$)과 채널 중앙선($y=0$)을 따라 압력분포의 변화를 나타내었다. 채널의 벽면에서의 압력이 $x=0$ 부근에서 크게 변화함을 알 수 있다. 두 경우 모두 $x \geq 0.7$ 에서 포아제 유동에 의한 압력 구배로 복원됨을 볼 수 있다.

Fig. 5에 식(18)을 이용하여 채널의 벽면($x \geq 0, y=1$)에서 무차원 전단응력 분포를 나타내었다. $x=0$ 근처에서는 수직 평판의 길이(a)에 따라 전단응력 값이 많이 차이가 있으나, $x \geq 1$ 에서는 수직 평판의 길이(a)에 무관하게 전단응력 값

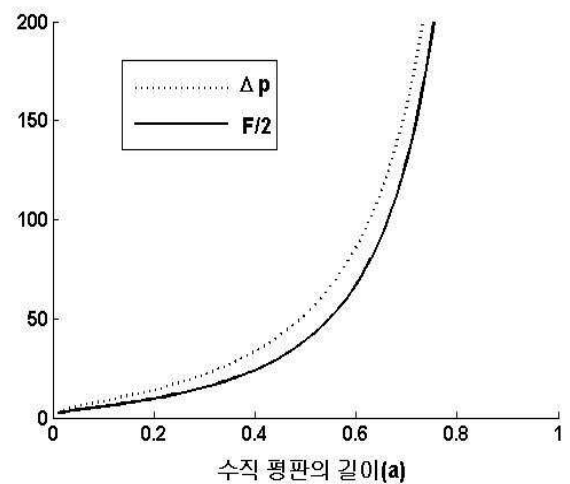


Fig. 7 Force exerted on the vertical plate and pressure drop due to the vertical plate for Stokes flow

이 포아제 유동에 의한 전단응력 값 -3 으로 접근함을 알 수 있다.

Fig. 6은 식 (19)을 이용하여 수직 평판에서의 전단응력 분포 $\tau(0, y)$, ($0 \leq y \leq a$)를 나타내었다. 수직 평판 중앙에서의 전단응력은 영(zero)이며, 속도 변화가 심한 수직 평판 끝단 부위에서 전단 응력은 크게 나타났다. 또한 수직 평판의 길이의 증가에 따라 전단응력이 커짐을 알 수 있다.

Fig. 7에 수직 평판에 의해 생기는 상·하류 사이의 부가적 압력 강하 Δp 와 채널 내의 수직 평판이 받는 힘 F 를 수직평판의 길이 a 의 함수로 나타내었다. Δp 는 식(16)으로부터 $-2K$ 이고

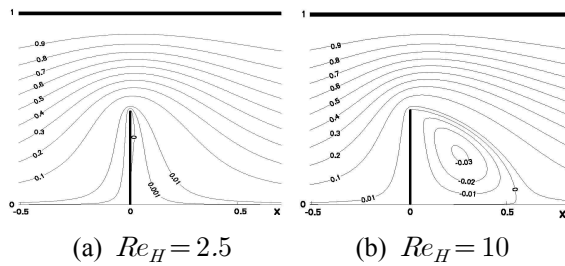


Fig. 8 Streamlines pattern for some small Reynolds numbers ($a=0.5$)

수직 평판이 받는 힘 F 는 식(17)로부터 구해진다. Fig. 7에서 수직 평판의 길이(a)의 증가에 따라 Δp 와 F 는 급격히 증가함을 알 수 있는데, 특히 Kim⁽⁸⁾은 $a \rightarrow 1$ 일 때 Δp 와 F 가 $(1-a)^{-2}$ 의 정도로 증가함을 밝혀낸 바 있다. 힘의 평형을 고려하면, Fig. 7의 Δp 와 $F/2$ 의 차이만큼 채널 벽면에 유동 방향의 전단력이 더 작용함을 알 수 있다.

Fig. 8에는 $Re_H \approx 0$ 인 Stokes 유동에서 Re_H 의 효과를 알아보기 위하여 Re_H 를 약간 증가시킨 경우에 대해 유동함수-와도법(stream function-vorticity method)⁽¹²⁾을 적용하여 수치 해석을 한 결과의 유선을 도시하였다. $Re_H \approx 0$ 인 Stokes 유동에서는 점성 에디가 전혀 나타나지 않지만 Re_H 를 점차적으로 증가함에 따라 수직 평판의 후방에 점성 에디(viscous eddy)가 형성됨을 보여 주고 있다. 즉, 레이놀즈 수가 $Re_H \approx 2.5$ 에서 수직 평판 후방의 양 끝단에서 점성 에디가 나타나기 시작하여 레이놀즈 수가 $Re_H = 10$ 인 경우에는 수직 평판에 큰 에디가 형성됨을 볼 수 있다. Re_H 가 증가함에 따라 그 점성 에디는 크기가 증가하며, 상하 비대칭으로 바뀌게 될 것으로 예상된다. 이 결과는 채널의 상하 벽면에 장애물이 있는 경우에 Re_H 증가에 따라 유동이 상하 비대칭으로 바뀌는 것과 유사함을 알 수 있다.^(7,13)

4. 결론

채널 내의 수직 평판을 지나는 Stokes 유동에 대하여 수학적 해석 방법으로 유동 특성을 고찰하고, 레이놀즈 수의 영향을 고려한 경우의 수치 해석 결과와 비교하였다.

Stokes 유동의 해석결과로부터 유동함수와 압력 분포식을 구하여 채널 내의 수직 평판의 길이에

따른 유선, 압력분포, 전단응력 분포 등을 구하여 도시화하였으며, 수직 평판의 길이의 함수로 수직 평판에 의한 추가적인 압력 강하와 수직 평판이 받는 힘을 계산하였다. 유선의 도시결과, 유동장 내에서 수직 평판의 길이를 변화하여도 점성 에디(viscous eddy)가 나타나지 않음을 알 수 있었다. 또한, 수직 평판의 길이 변화에 따라 수직 평판에 의한 추가적인 압력 강하와 수직 평판이 받는 힘의 변화를 도시하였다.

레이놀즈 수가 유동에 미치는 효과를 알기 위하여 비교적 작은 Re_H 값에 대하여 유동함수-와도법을 적용하여 유한차분법으로 수치해석을 수행하였다. 그 결과 $a=0.5$ 일 때 $Re_H \approx 2.5$ 에서 수직 평판 양 끝단의 후방에 부착된 점성 에디가 출현하여 Re_H 가 증가함에 따라 점성 에디가 수직 평판 중심 후방으로 확장되면서 커짐을 알 수 있다. 또한, Re_H 가 계속 증가하면 상하 비대칭인 점성 에디가 나타날 것으로 예상된다.^(14,15)

본 논문에서는 2차원 채널 내의 중심부에 놓여 있는 장애물 형상을 하나의 수직 평판으로 모델링하여 해석하였으며, 그 결과는 마이크로채널 내에 장애물이 있는 경우의 유동 특성을 파악하는데 참고 자료가 될 수 있을 것이다.

참고문헌

- (1) Bahramia, M., Yovanovich, M. M. and Culham, J. R., 2006, "Pressure Drop of Fully Developed, Laminar Flow in Microchannels of Arbitrary Cross-section," *Transaction of the ASME*, Vol. 128, pp. 1036~1044.
- (2) Petropoulos, A., Kaltsas, G., Randjelovic, D. and Gogolides, E., 2010, "Study of Flow and Pressure Field in Micro-channels with Various Cross-section Areas," *Microelectronic Engineering* 87, pp. 827~829.
- (3) Buyruk, E., Johnson, M. W. and Owen, I., 1998, "Numerical and Experimental Study of Flow and Heat Transfer around a Tube in Cross Flow at Low Reynolds Number," *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 19, pp. 223~232.
- (4) Wang, C. Y., 2002, "Stokes Flow through a Channel Obstructed by Horizontal Cylinders,"

- Acta Mechanica*, Vol. 157, pp. 213~221.
- (5) Golpaygan, A. and Ashgriz, N., 2008, "Multiphase Flow Model to Study Channel Flow Dynamics of PEM Fuel Cells: Deformation and Detachment of Water Droplets," *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 22, pp. 85~95.
- (6) Wang, C. Y., 1997, "Stokes Flow through a Transversely Finned Channel," *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 119, pp. 110~114.
- (7) Yoon, S. H. and Jeong, J. T., 2002, "Study on Two-Dimensional Laminar Flow through a Finned Channel," *Korean Society of Computational Fluids Engineering*, Vol. 7, pp. 53~59.
- (8) Kim, M.-U., 1984, "On the Slow Broadside Motion of a Flat Plate along the Center-Line of a Fluid-Filled Two-Dimensional Channel," *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 53, pp. 139~147.
- (9) Kalita, J. C. and Gupta, M. M., 2010, "A Stream function-Velocity Approach for 2D Transient Incompressible Viscous Flows," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 62, pp. 237~266.
- (10) White, F. M., 1991, *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, pp. 91-95.
- (11) Brown, J. W. and Churchill, R. V., 1996, *Complex Variable and Applications*, McGraw-Hill, New York, pp. 181~186.
- (12) Tannehill, J. C., Anderson, D. A. and Pletcher, R. H., 1997, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2Ed., pp. 650~676.
- (13) White, F. M., 1991, *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, pp. 207~208.
- (14) Chiang, T. P., Sheu, Tony W. H. and Wang, S. K., 2000, "Side Wall Effects on the Structure of Laminar Flow over a Plane-Symmetric Sudden Expansion," *Computers & Fluids*, Vol. 29, pp. 467~492.
- (15) Tsui, Y. Y. and Wang, H. W., 2008, "Side Wall Effects on the Bifurcation of the Flow Through a Sudden Expansion," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 56, pp. 167~184.