

## 인체의 윤상인대의 역학적 특성 모사를 위한 섬유 강화 모델에 관한 연구

임 준 택\* · 최 덕 기\*\*

\* 단국대학교 기계공학과

### A Study of Fiber-Reinforced Material Models for the Mechanical Characteristics of Human Annulus Fibrosus

Juntaek Lim\* and Deokkee Choi\*\*

\* Dept of Mechanical Engineering, Dankook Univ.

(Received October 5, 2010 ; Revised March 17, 2011 ; Accepted March 18, 2011)

**Key Words:** Soft Tissues(연부조직), Annulus Fibrosus(윤상인대), Hyperelasticity(초탄성), Energy Functions(에너지 함수), Biomechanics(생체역학), Large Deformation(대변형), Fiber-Reinforced Materials(섬유강화재료)

**초록:** 인체의 근육, 힘줄, 피부와 혈관 등은 일상생활 속에서 다양한 손상을 입는 경우가 많으므로 관심을 갖고 연구해야 할 주제이다. 인체의 윤상인대의 역학적 특성을 얻기 위해서는 부족한 실험 자료를 감안하고서도 대변형뿐만 아니라 이방성 및 압축성까지 고려해야 하는 어려움이 있다. 본 연구에서는 섬유 강화재료 모델을 사용하여 초탄성 재료 모델을 사용하고, 모재, 섬유 및 모재와 섬유와의 상관관계를 포함하는 에너지 함수를 도입하여 실험값과 비교하여 보았다. 윤상인대의 내부에서 2종류의 섬유는 일정한 각도를 갖고 있다고 가정하였다. 섬유 강화재료 모델을 사용함에 있어서 모재에 대한 두 종류의 다른 에너지 함수를 대입하여 Neo-Hookean 재료를 사용하여 계산한 결과 및 기존에 알려진 실험결과와 비교하였으며 본 연구에서 제시된 모재에 관한 에너지 함수의 타당성을 보였다.

**Abstract:** Human soft tissues, including muscles, ligaments, skin, and blood vessels, are an interesting subject because damage to them can be observed in everyday life. Besides the lack of available experimental data and the large deformation upon loading, the anisotropic and compressible nature of annulus fibrosus makes it more difficult to find a simple material model. A fiber-reinforced hyperelastic material model is used to determine the stress-strain curves upon uniaxial loading. The energy potential function for annulus fibrosus is composed of three different parts: matrix, fibers, and matrix-fiber interaction, which accounts for the angles between two families of fibers. In this paper, two different types of energy potential function for the matrix are considered, and are inserted into the fiber-reinforced model. The calculated results are compared with the Neo-Hookean model and experimental data, and reasonable agreement is observed overall.

### 1. 서론

인간의 신체는 뼈와 연골을 제외한 대부분이 혈관, 피부, 근육, 인대 등의 연부 조직(soft tissue)으로 구성되어 있다. 생체 연부 조직이 가지는 가장 뚜렷한 특징으로서 외력의 작용 시 대변형(large deformation)이 발생되고 비선형(nonlinear) 거동을 하며 이방성(anisotropic)의 성질을 들 수 있다.<sup>(1-4)</sup>

윤상 인대는 인간의 척추의 구성 요소 중 하나로서

수핵(nucleus)과 함께 추골(vertebrae)을 서로 연결시켜 주면서 상호간의 복잡한 운동이 가능하도록 해주는 역할을 한다. 특히 반복적인 움직임이 필요한 산업 현장이나 운동 시에 윤상 인대에 원하지 않는 다양한 종류의 상해가 일어나고 있다고 보고되고 있다.<sup>(5)</sup>

Fig. 1에서 보는 바와 같이 윤상 인대는 얇은 판 형태의 모양을 하고 있으며 젤(gel) 형태의 수핵을 바깥쪽에서 약 15~26도로 둘러싸고 있다. 윤상 인대의 각 판은 섬유를 포함하고 있으며 각 섬유의 방향은 인접한 판과는 다른 방향을 갖는다. 첫 번째 판의 섬유의 각도는 수평축으로부터 평균적으로

\* Corresponding Author, dkchoi@dankook.ac.kr

© 2011 The Korean Society of Mechanical Engineers

약 30° 기울어져 있으며 두 번째 판의 섬유층의 각도는 수평축으로부터 평균적으로 약 150°를 이루고 있으므로 관찰되고 있다.

윤상 인대에 대한 상해의 정도나 파손 현상을 규명하기 위해 역학적인 거동을 아는 것은 매우 중요하며 이에 대하여는 지속적인 관심으로 인해 많은 연구가 이루어지고 있다. 그럼에도 불구하고 인체의 일부분이라는 특성 때문에 역학적 자료를 얻기 위해서는 사체에서 시편을 추출하여 실험해야 한다는 점, 온도 및 습도의 영향이 크다는 점, 나이 및 성별에 따라 다르다는 점, 반복적인 실험이 어려운 점 등등의 많은 제약이 따르고 있다. 이러한 현실적인 제약 때문에 인간 신체의 연부 조직에 대한 역학적인 모델을 찾고 규명하는 것은 중요하다고 사료되며 이를 통하여 인체의 부분에 대한 민감한 실험 조건에 의한 제약과 비용 문제를 다소나마 완화시킬 수 있을 것으로 생각된다.

Holzapfel<sup>(6)</sup>은 윤상 인대의 역학적 특성 규명에 적용할 수 있는 여러 겹으로 겹쳐있는 콜라겐(collagen) 조직에 대한 구성 모델을 제시하였으며, Wu<sup>(7)</sup>는 사체 실험을 수행하여 20~30세의 나이를 가진 15명의 윤상 인대 시편을 사용하여 인장 하중 조건에서 실험을 진행하였다. 이때 윤상 인대에 대한 에너지 함수가 비압축성임을 가정하고, 섬유의 신장에 따른 미끄러짐 현상을 고려하였으며, 두 섬유가 이루는 각도를 60°로 가정하여 적용하였다.

Ebara<sup>(8)</sup>는 사체 실험에서 26~53세의 나이를 가진 시편 15개를 통하여 인장 하중에서의 내부 윤상 인대와 외부 윤상 인대의 두 부분으로 나누어 실험을 수행하였으며 각각의 위치에 따른 역학적인 거동의 특징을 관찰하였다.

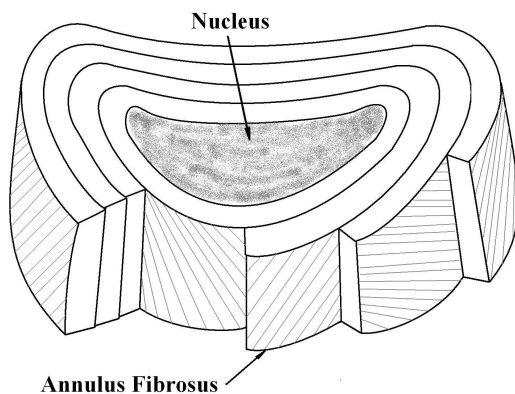


Fig. 1 A schematic of human annulus fibrosus

Elliott<sup>(9)</sup>은 사체 실험을 통하여 27~72세의 나이를 가진 7명으로부터 추출된 윤상 인대 가운데서 원주 방향, 축 방향, 반지름 방향의 각 위치와 형상에 따라 실험을 수행하였다. 이 때 윤상 인대의 각 판과 섬유층은 서로 떨어지지 않고 완벽히 접촉되었다고 가정하였으며 섬유층은 오직 인장에만 영향을 받는다고 가정되었다. Lotz<sup>(10,11)</sup>는 16~38세의 나이를 가진 윤상 인대 시편 6개를 사용하여 인장 및 압축 하중의 조건에서 실험하였으며 윤상 인대의 에너지 함수를 두 가지 형태로 제시하여 원주 방향과 축 방향에 대하여 인장 하중과 압축 하중의 두 가지 조건에서 타당성을 검증하였다.

Guo<sup>(12,13)</sup>는 복합 재료 이론을 기반으로 한 윤상 인대에 대한 에너지 함수를 제시하였으며, 수학적으로 모델링하는 과정에서 모재와 섬유층간의 상호작용이 윤상 인대의 모델링에 중요한 요소임을 밝혔다. 또한 모재 부분을 Neo-Hookean 재료 모델로 가정하여 모재와 섬유 각각의 강성 변화에 따른 재료의 거동을 확인하였으며, 제시된 윤상 인대 모델에 대한 유한 요소 해석을 통하여 그 타당성을 검증하였다.

또한 Guo<sup>(14,15)</sup>는 윤상 인대의 에너지 함수를 모재, 섬유 그리고 모재와 섬유 간의 상호작용 요소의 세 가지 부분으로 나누어 제안하였으며 Elliott<sup>(9)</sup>의 실험 데이터에 의해 윤상 인대가 압축성의 성질을 가진다고 보았다.

본 연구에서는 생체 연부 조직 중에서 척추 추간판(intervertebral disc)의 윤상 인대(annulus fibrosus)에 대한 수학적 모델을 다른 연구자들이 실험에서 얻은 결과와 비교하며 타당성을 검증해 보았다. 윤상 인대에 대한 역학적 거동을 모사하기 위하여 필요한 재료 모델로서 섬유와 모재가 있는 복합체로서의 구성을 고려하고, 모재에 대한 두 가지 종류의 에너지 함수를 사용하여 전체 에너지 함수를 구성한 후 재료에 대한 구성 방정식을 유도하고 그 결과를 공개된 사체 실험 자료와 비교하여 보았다.

## 2. 본론

### 2.1 초탄성 재료 모델

물체에 힘이 가해지면 변형으로 인하여 물체의 내부에 에너지가 저장되는데 이를 변형률 에너지라고 한다. 변형률 에너지를 변형률의 함수로 표현한

것을 에너지 함수라고 하며 초탄성 이론을 사용한 재료의 특성을 표현하는데 필수적인 요소이다. 물체내의 임의의 한 점  $\mathbf{X}$ 를 초기 상태의 질점 위치라 하고,  $\mathbf{x}$ 를 변형 후 위치라 하면 변형 구배는  $\mathbf{F} = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$ 와 같이 정의되며, 우편 Cauchy-Green 변형 텐서(right Cauchy-Green deformation tensor)는  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$  이다. 제2 Piola-Kirchhoff(PK2) 응력  $\mathbf{S}$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (1)$$

명목 응력  $\mathbf{P}$ (nominal stress)는  $\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$ 로 계산할 수 있으며 Cauchy 응력은 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2)$$

여기서  $J = \det(\mathbf{F})$ 이다. 한편, 에너지 함수를 기술하기 위한 인자로서 몇 가지의 불변량(invariants)을 사용하여 복잡성을 줄이는 방법을 사용하게 되는데 이러한 불변량은 그 정의에 따라서 물리적 의미가 있거나, 혹은 실제적으로 물리적 의미는 찾기 어려우나 계산상의 간편함으로 인하여 자주 사용되고 있다. 불변량  $I_1, I_2, I_3$ 는 각각 다음과 같이 정의한다.

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (3)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (4)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (5)$$

여기서 사용된  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 는 해당되는 축 방향의 신장률을 나타낸다. 본 연구에서는 모재에 대한 2가지의 서로 다른 에너지 함수를 2족 섬유 강화 모델(two family fiber-reinforced model)에 적용하여 비교 분석하였으며, 사용된 에너지 함수의 종류로는 다항식 (polynomial) 형태와 지수(exponential) 형태로 각각의 내용은 Table 1<sup>(16)</sup>에서 보는 바와 같으며,  $\alpha, \beta$ 는 물질 인자(material parameter)이다.

## 2.2 윤상 인대의 재료 모델링

### 2.2.1 섬유와 재료 간의 상호 작용

윤상 인대와 같은 이방성 재료의 경우 연부 조직

Table 1 Energy potential function types

Types	Energy Potential Function
Polynomial type	$\psi = \frac{\alpha}{2}(I_1 - 3) + \frac{\beta}{2}(I_1 - 3)^2 + \frac{\alpha}{2}(I_2 - 3)$
Exponential type	$\psi = \alpha e^{\beta(I_1 - 3)}(I_2 - 3)$

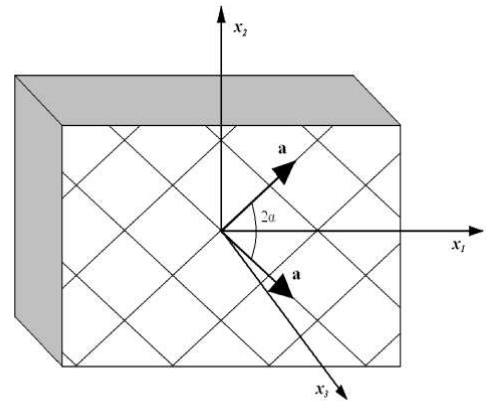


Fig. 2 A schematic of annulus fibrosus with two families of fibers of different directions

의 적절한 거동을 나타내기 위해서 Fig. 2에서 보는 바와 같이 등방성 모재(matrix) 내에 일정한 각도를 가진 2종의 섬유를 포함한 것으로 가정하였다.

또한 섬유들은 모재에 완벽하게 접촉되었으며 섬유와 모재 사이는 분리되지 않는다고 가정하였다. 여기서 모재와 섬유 간의 상호 작용은 반드시 고려해야 할 중요한 요소인데, 이는 하중이 작용될 때 두 섬유의 방향이 변하게 되어 두 섬유가 이루는 각도에 따라 재료의 성질에 미치는 영향이 달라지기 때문이다.

Fig. 3에서 나타낸 것처럼 초기 섬유 방향 벡터는  $\mathbf{a}_0$ 이고 단축 인장 방향에 대하여 대칭을 이루는 것으로 가정하였으며, 윤상 인대의 하중에 대한 응답은 모재, 섬유, 그리고 모재와 섬유 간의 상호 작용으로부터 시작된다고 가정하였다. 이러한 가정하에 윤상 인대의 전체 에너지 함수는 모재, 섬유 그리고 모재와 섬유의 상호작용에 의하여 다음과 같이 세 부분의 에너지 함수로 구성된다고 보았다.

$$\psi = \psi_m + \psi_f + \psi_{fm} \quad (6)$$

여기서  $\psi_m$ 은 모재의 에너지 함수,  $\psi_f$ 는 섬유의

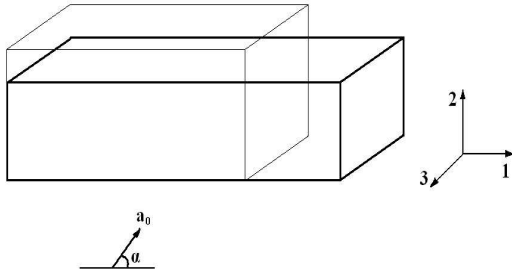


Fig. 3 Uniaxial deformation in one-direction of the two-fiber-reinforced material.

에너지 함수, 그리고  $\psi_{fm}$ 은 모재와 섬유 간의 상호 작용을 나타내는 에너지 함수이다.

본 연구에서는 2종의 섬유가 포함된 모델에서 모재와 섬유 간의 상호 작용을 나타내기 위해서 Guo<sup>(15)</sup>가 제안한 모델을 사용하였으며 모재와 섬유 간의 상호 작용을 고려한 불변량  $\chi$ 은 다음과 같이 정의한다.

$$\chi = \frac{I_4}{I_3}(I_5 - I_1 I_4 + I_2) - 1 \quad (7)$$

여기서  $I_4$ 와  $I_5$ 는 초기 섬유 방향 벡터로 정의 되는 불변량이며 Fig. 3에서 보는 바와 같이 초기 섬유 방향 벡터  $a_0 = [\cos\alpha \sin\alpha \ 0]$ 로 나타낼 수 있으며 이를 사용하여  $I_4$ 와  $I_5$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$I_4 = \lambda_1^2 \cos^2\alpha + \lambda_2^2 \sin^2\alpha \quad (8)$$

$$I_5 = \lambda_1^4 \cos^2\alpha + \lambda_2^4 \sin^2\alpha \quad (9)$$

여기서  $\lambda_1, \lambda_2$ 는 각 방향으로의 신장률이다.

실험 결과를 고찰하면 단축 압축 시험에서 섬유가 하중에 강하게 저항하지 못하게 되어 수축하거나 매우 적은 양만 늘어난다고 추정되며 이로 인하여 섬유는 굽혀지거나 회전하게 되고, 모재에는 미소한 상호 작용만이 있게 된다. 반면에 단축 인장 시험 조건하에서는 섬유는 인장 방향에 대하여 강성이 커지게 되어 하중에 대하여 더 많은 저항을 하게 된다.

Guo<sup>(12-15)</sup>는 이러한 윤상 인대의 역학적 특성을 고려하여 모재와 섬유 간의 상호 작용 요소  $f(I_4)$ 를 다음과 같은 식으로 정의하였다.

$$f(I_4) = \frac{\gamma}{1 + e^{-\beta(\lambda_F - \lambda_F^*)}} \quad (10)$$

여기서  $\gamma$ 는  $f(I_4)$ 의 상한 값에 해당하고,  $\lambda_F^*, \gamma, \beta$ 는 물질 인자이다.

Fig. 3에서와 같은 단축 인장 하에서 모재와 섬유 간의 상호 작용을 알아보기 위해서 식 (3) ~ 식 (5)와 식 (8), 식 (9)를 식 (7)에 대입하고 정리하면 앞서 언급한 모재와 섬유 간의 상호 작용을 고려한 요소  $\chi$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\chi = \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} (I_5 - I_4^2) \quad (11)$$

결과적으로 2종 섬유가 포함된 초탄성 재료 모델의 모재와 섬유간의 상호 작용에 관한 에너지 함수  $\psi_{fm}$ 은 식 (10)과 식 (11)의 곱으로 정의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\psi_{fm} = f(I_4)\chi^2 = f(I_4)\left(\frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} (I_5 - I_4^2)\right)^2 \quad (12)$$

## 2.2.2 2종 섬유 족을 포함한 윤상 인대 모델

윤상 인대에 대한 에너지 함수는 세 부분으로 나눌 수 있는데 모재, 섬유, 그리고 모재와 섬유 간의 상호 작용에 관한 에너지이다. 따라서 식 (6)에서와 같이 2종 섬유를 포함한 이방성 재료 모델 또한 각각의 에너지 함수의 합으로 구성할 수 있다. 본 연구에서는 2종 섬유를 포함한 윤상 인대 재료 모델의 타당성을 검증하기 위하여 모재 부분의 에너지 함수  $\psi_m$ 를 압축성 조건으로 간주하여 하여 Neo-Hookean 재료 모델을 도입하였으며, 수식적인 정의는 다음과 같다.

$$\psi_m = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D_1}(J - 1)^2 \quad (13)$$

여기서  $c_{10}, D_1$ 은 물질 인자이며  $J = I_3^{1/2}$ 이고  $\bar{I}_1$ 은 불변량으로 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{I}_1 = J^{-2/3} I_1 \quad (14)$$

한편, 섬유 부분의 에너지 함수  $\psi_f$ 는 섬유의 신장에 기초해 제안된 Guo<sup>(12-15)</sup>의 모델을 사용하였으

며, 섬유의 압축이 변형에 미치는 영향이 없다고 가정하였다. 섬유 부분의 에너지 함수는 다음과 같이 가정하였다.

$$\psi_f = c_{11}(I_4 - 1)^2 + c_{12}(I_4 - 1)^4 \quad (15)$$

여기서  $c_{11}, c_{12}$ 은 물질 인자이며 실험을 통한 자료에 근사시켜 얻을 수 있다. 식 (12), 식 (13), 식 (15)를 각각 식 (6)에 대입하여 정리하면, 최종적으로 압축성 조건의 2중 섬유가 포함된 이방성 에너지 함수를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi = & c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D_1}(J - 1)^2 + c_{11}(I_4 - 1)^2 \\ & + c_{12}(I_4 - 1)^4 + f(I_4)\chi^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Guo<sup>(12-15)</sup>의 연구에서는 모재 부분의 물질 인자  $c_{10}, D_1$ 을 단축 인장의 실험 데이터에 근사하여 얻고, 섬유 부분의 모델을 더하여 섬유 방향의 단축 인장 실험 데이터에 근사하여  $c_{11}, c_{12}$ 를 얻었다.

그리고 모재 섬유 간의 상호 작용 관계식을 더한 후 얻어진 물질 인자를 모두 적용하여 윤상인대의 실험 데이터에 근사하여 상호 작용에 관한 물질 인자를 모두 구하는 방법을 택하였으며 본 연구에서도 그와 같은 방식으로 진행하였다.

### 2.2.3 윤상 인대에 대한 PK2 응력 유도

윤상 인대에서의 외력에 대한 응력을 정의하기 위해서 식 (16)에서 구해진 에너지 함수를 우편 Cauchy-Green 변형 텐서  $\mathbf{C}$ 로 미분하는 형태의 과정을 통해서 PK2 응력을 구하고, 이를 명목 응력으로 변환하기로 한다. 여기서는 압축성 조건을 적용하고 있기 때문에 인장 하중이 가해지는 방향 외에는 변형 구배  $\mathbf{F}$ 를 결정할 수 없게 된다.

그러므로 주어진 조건은  $\lambda_1$ , 그리고 경계 조건에 의해서 알 수 있는  $S_{22} = S_{33} = 0$ 이다. 따라서 구하고자 하는  $S_{11}, \lambda_2, \lambda_3$ 의 값은 결과적으로 각 변수에 대한 연립방정식을 구성하게 되며 이에 대한 방정식의 해로서 구하여야 한다.

에너지 함수를 응력의 형태로 유도하는 과정에서 계산의 편의를 위한 불변량의 미분을 이용하여 식 (16)의 에너지 함수에서 PK2 응력을 유도하는 과정은 다음과 같다.

먼저 식 (16)의 에너지 함수  $\psi$ 를 모재, 섬유, 모재-섬유 간의 상호 작용의 세 부분으로 나누어 응력을 유도하였다.

첫 번째 과정으로서 모재 부분  $\psi_m$ 의 식 (13)을 식 (1)에서의 정의를 이용하여 PK2 응력의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_m = & 2 \frac{\partial \psi_m}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \psi_m}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \psi_m}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \\ = & 2c_{10}I_3^{-1/3} \mathbf{1} - \frac{2}{3}c_{10}I_1I_3^{-1/3} \mathbf{C}^{-1} \\ & + \frac{2}{D_1}(1 - I_3^{-1/2})I_3 \mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

두 번째로 섬유 부분  $\psi_f$ 의 식 (15)에 대한 PK2 응력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_f = & 2 \frac{\partial \psi_f}{\partial \mathbf{C}} \\ = & 4c_{11}(I_4 - 1)\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + 8c_{12}(I_4 - 1)^3(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \end{aligned} \quad (18)$$

마지막으로 모재와 섬유 간의 상호 작용 부분  $\psi_{fm}$ 의 식 (12)는 불변량  $I_4, I_5$  두 가지가 포함되어 있으므로 연쇄법칙을 이용하여 다음과 같이 미분한다.

$$\mathbf{S}_{fm} = 2 \frac{\partial \psi_{fm}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \psi_{fm}}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \psi_{fm}}{\partial I_5} \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} \quad (19)$$

여기서 식 (19)의 우변의 미분 항들은 계산하면 각 항들은 다음과 같은 식으로 표현 된다.

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \psi_{fm}}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} = & 2 \frac{\partial f(I_4)}{\partial I_4} \chi^2 (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \\ & + 2f(I_4) \frac{\partial \chi^2}{\partial I_4} (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \end{aligned} \quad (20)$$

$$2 \frac{\partial \psi_{fm}}{\partial I_5} \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} = 2f(I_4) \frac{\partial \chi^2}{\partial I_5} (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0) \quad (21)$$

앞에서 계산된 응력인 식 (17) ~ 식 (19)의 결과를 식 (6)에서의 에너지의 합과 같이 해당되는 응력 항으로 간주하여 정리하면 PK2 응력은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} = & 2c_{10}I_3^{-1/3}\mathbf{1} - \frac{2}{3}c_{10}I_1I_3^{-1/3}\mathbf{C}^{-1} \\
& + \frac{2}{D_1}(1 - I_3^{-1/2})I_3\mathbf{C}^{-1} \\
& + 4c_{11}(I_4 - 1)\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + 8c_{12}(I_4 - 1)^3\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \\
& + 2\frac{\partial f(I_4)}{\partial I_4}\chi^2\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + 2f(I_4)\frac{\partial \chi^2}{\partial I_4}\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \\
& + 2f(I_4)\frac{\partial \chi^2}{\partial I_5}(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0) \quad (22)
\end{aligned}$$

#### 2.2.4 윤상 인대에 대한 물질 인자의 결정

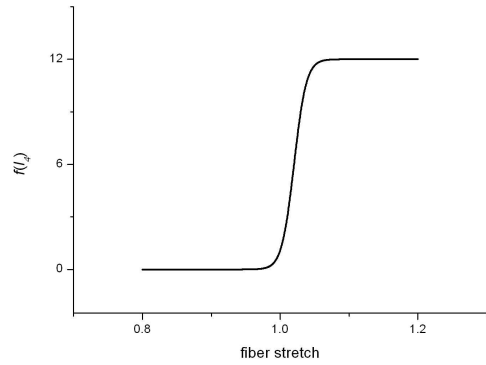
이번 절에서는 실험 데이터에 근거한 압축성 및 이방성의 초탄성 재료 모델에 대한 단축 인장 조건 일 때의 거동을 살펴보기로 한다. 재료 모델에 사용된 물질 인자는 모재와 섬유, 그리고 모재와 섬유 간의 상호 작용의 세 부분을 순차적으로 Ebara<sup>(8)</sup>와 Elliot<sup>(9)</sup>의 데이터를 사용하여 이를 최소 자승법으로 근사하여 구하였으며 그 결과는 Table 2에 나타내었다.

Fig. 4에서는 식 (10)에서 정의한 모재와 섬유 간의 상호 작용 인자  $f(I_4)$ 를 섬유 신장비( $\lambda_f$ )의 변화에 따라 그림으로 나타낸 것이다. Fig. 4에서 알 수 있듯이 압축 하중의 경우 ( $\lambda_f < 1$ )에서는 모재와 섬유의 상호작용은 미미한 수준에 머물다가, 인장 초기 ( $\lambda_f > 1$ )에 급격하게 증가하여 어느 정도의 시점 이후에는 일정하게 유지되는 양상을 보임을 알 수 있다. 이러한 특성은 인장 시에 섬유의 회전에 따른 역학적 거동을 수학적으로 표현 한 것으로 이해될 수 있다. 윤상 인대의 두 섬유는 일정한 각도를 이루고 있다고 보고되고 있는데 Fig. 2에서 보는 바와 같이 두 섬유가 이루는 각도를  $2\alpha = 120^\circ$ ,  $2\alpha = 60^\circ$ 의 두 가지 경우로 적용하였다. 단축 인장에 대한 변형 구배와 우편 Cauchy-Green 변형 텐서를 식 (22)에 대입하면 PK2 응력을 구할 수 있다.

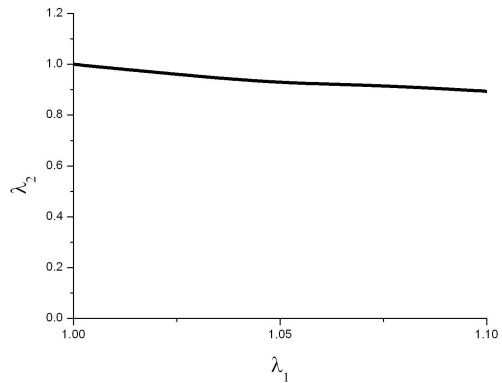
**Table 2** Material parameters for anisotropic hyperelastic model

$c_{10}$	$D_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	$\gamma$	$\beta$	$\lambda_F^*$
0.034	0.197	0.45	82.6	12	125	1.02

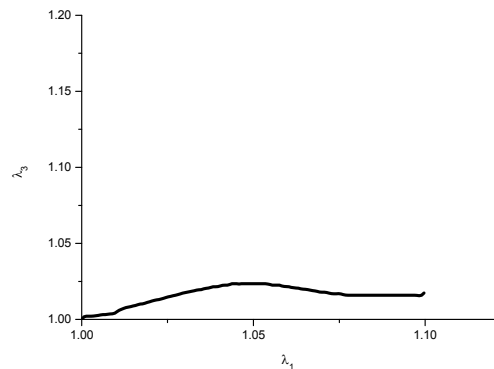
먼저  $2\alpha = 60^\circ$ 의 경우에 대하여 PK2 응력을 구하고, Fig. 3에서의 1 방향으로 단축 인장의 하중을 주었을 때  $S_{22} = S_{33} = 0$ 의 경계 조건을 적용하여 2, 3 방향의 신장률을 각각 구하였다. 여기서 계산된  $\lambda_1$ 에 대한  $\lambda_2$ 와  $\lambda_3$ 의 관계를 Fig. 5와 Fig. 6에 각각 나타내었다. 여기서 계산된 각 방향의 신장률



**Fig. 4** Fiber-matrix interaction factor  $f(I_4)$  versus fiber stretch



**Fig. 5** Stretch in direction 1 versus stretch in direction 2 with  $2\alpha = 60^\circ$



**Fig. 6** Stretch in direction 1 versus stretch in direction 3 with  $2\alpha = 60^\circ$

을 명목 응력에 대입하여 거동을 확인하였으며 그 결과는 Elliott<sup>(9)</sup>의 실험 데이터와 일치하였다.

또한  $2\alpha = 120^\circ$ 의 경우에도 같은 방법을 사용하여 각 방향의 신장률을 구하였고, 신장률의 비교 그래프 선도를 Figs. 7~8에 나타내었다. 모재에 대한 에너지 함수는 유일한 것이 아니기 때문에 다른 형태 즉, 보다 간단한 형태의 에너지 함수에 대한 도입 타당성을 검토해 보는 것이 중요하다고 사료되어 본 연구에서는 모재에 대한 두 가지 종류의 에너지 함수를 도입하여 실험 데이터와 비교 분석하였다.

### 3. 결과 및 고찰

본 연구에서는 2축 섬유를 포함하는 복합 재료의 성질을 갖는 인체의 윤상 인대에 대하여 에너지 모델에 대한 적합성을 보기 위한 과정을 수행하였다. 윤상 인대의 모재 부분에 대한 에너지 함수를 나타낸 식 (6)의  $\psi_m$  항에 Table 1에서 제시한 두 가지 종류의 에너지 함수를 적용하여 응력-변형률의 관계를 알아보았다. 모재 부분의 에너지 식에서 필요한 물질 인자를 얻기 위하여 Table 1에서의 각 에너지 함수를 Elliott<sup>(9)</sup>의 실험 데이터에 최소자승법을 적용하여 물질 인자를 구하였으며 그 결과는 Table 3에서 주어진다. 에너지 함수에서 섬유 부분인  $\psi_f$ 와 모재와 섬유 간의 상호 작용 요소인  $\psi_{fm}$ 은 Guo<sup>(12-15)</sup>가 제안한 식 (15)와 식 (12)를 각각 사용하였으며 각 항의 물질인자는 Table 2와 같이 주어진다.

명목 응력을 구하는 과정은 먼저 에너지 함수를 통해 PK2 응력을 구한 후에 명목 응력으로 변환해 준다. Fig. 9에서  $2\alpha = 60^\circ$  일 때 인장 하중이 1방향으로 주어지는 경우에 두 종류의 에너지 함수에 대한 응력-변형률의 관계를 비교하였다.

Elliott<sup>(9)</sup>의 실험 데이터와 비교해보았을 때 약간의 차이는 있지만 다항식 모델(polynomial type)이 지수 모델(exponential type) 보다 응력-변형률 선도

**Table 3** Material parameters for different energy potential functions

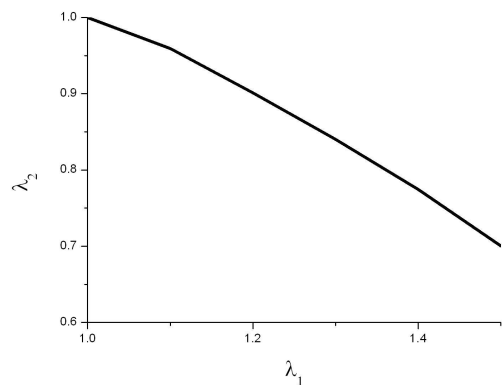
	$\alpha$	$\beta$
Polynomial Type	0.051	0.0008872
Exponential Type	-0.02158	-1.807

의 기울기 면에서 좀 더 유사함을 알 수 있었다.

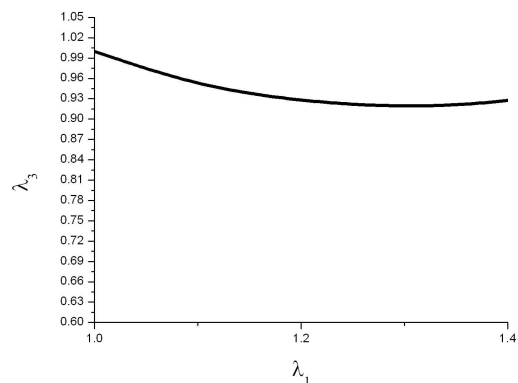
그러나 결과적으로는 각 에너지 함수를 모재 부분에 적용하였을 때 응력-변형률의 관계는 각각의 경향이 거의 비슷함을 알 수 있었다. Fig. 10에서는  $2\alpha = 120^\circ$  일 때 인장 하중이 1방향으로 주어지는 경우에 각각의 에너지 함수에 대한 응력-변형률의 관계를 비교하였다.

$2\alpha = 60^\circ$ 의 경우와 마찬가지로 각 에너지 함수를 모재 부분에 적용하였을 때 응력-변형률의 관계는 각각의 경향이 거의 비슷함을 알 수 있었다. 따라서 모재 부분의 에너지 함수는 본 연구의 2축 섬유가 포함된 재료의 모델링에서 매우 작은 영향만을 미치는 것을 알 수 있었다. 또한 섬유의 항과 모재와 섬유간의 상호 작용 요소의 항이 포함된 에너지 함수의 형태가 2축 섬유가 포함된 재료의 거동을 잘 나타냄을 알 수 있었다.

윤상 인대에 대한 초탄성 재료 모델을 사용하기 위하여 다양한 에너지 함수가 제안되었으며 이를 검증하기 위하여서는 내부 구조에 대한 구체적인 자료가 있어야 하나, 아직도 여러 가지 제약조건으



**Fig. 7** Stretch in direction 1 versus stretch in direction 2 with  $2\alpha = 120^\circ$



**Fig. 8** Stretch in 1 direction versus stretch in 3 direction with  $2\alpha = 120^\circ$

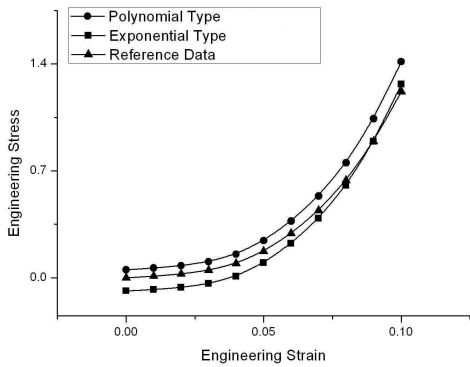


Fig. 9 Comparison of the stress-strain curves of two different energy potential functions at  $2\alpha = 60^\circ$  with the experiment data<sup>(9)</sup>

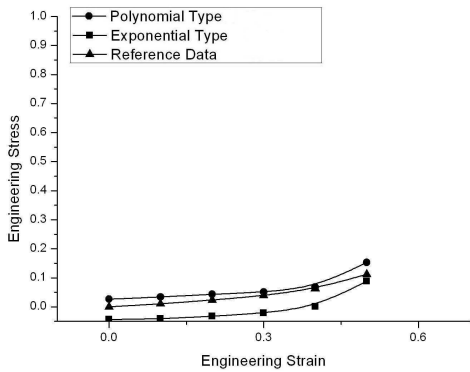


Fig. 10 Comparison of the stress-strain curves of two different energy potential functions at  $2\alpha = 120^\circ$  with the experiment data<sup>(9)</sup>

로 인하여 인체 부위에 대한 역학적인 모델을 얻어 내는 것은 어려운 부분이 많다. 그러므로 실험 데이터에 근거한 모델을 만들기 위해서는 먼저 윤상 인대에 대한 역학적인 거동이 파악된 후 상세한 모델링에 들어가야 한다. 본 연구에서는 최근 제안된 2종 섬유 모델을 사용하여 타당성을 검증하고 그 대안으로 2가지 종류의 다른 에너지 함수를 사용하여 재료 모델에 대한 적합성을 비교 검토하였으며 실험에서 얻어진 자료와 비교하였을 때 변형률에 대한 응력의 크기로 볼 때 3~5% 내외의 오차를 얻었다.

Fig. 9와 10에서 Exponential Type의 에너지 함수의 경우 작은 변형률 부분에 대하여 응력이 음의 값을 가지게 되는데 이는 지수 형태의 재료 모델에서 주어진 에너지 함수를 실험 자료에 곡선 적합 과정을 수행하는 과정에서 수치적인 오차가 난 것

으로 사료된다. 이는 실제로 응력-변형률 곡선에 대한 자료를 도시할 때 초탄성 재료 모델 기법의 과정상 직접적으로 응력-변형률 관계를 실험 자료와 비교하여 적합한 인자를 규정하는 것이 아니라 에너지 함수를 사용하여 필요한 물질 인자들을 찾아낸 후 미분하는 과정에서 생겨난 오차라고 사료된다. 따라서 이러한 현상은 에너지 함수를 미분하여 응력-변형률 관계를 도출하는 초탄성 재료 모델에서는 어느 정도 예측될 수 있는 오차라고 사료되며 실제와는 맞지 않는 경우이므로 실제 연부 조직에 대한 모사에 사용 시에는 배제 시켜야 할 모델로 사료된다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 인체의 윤상 인대에 대한 재료 모델을 사용하여 실제 실험 데이터와 비교하여 그 타당성을 검토해 보았다. 인체의 윤상 인대에 대한 재료 모델에 대하여는 여러 연구자들에 의해서 다양한 모델이 제시되고 있다. 이는 인체 부분의 특성상 제한된 양의 실험으로 인한 데이터의 부족에서도 기인한다.

초탄성 재료 모델에서는 에너지 함수가 주어져야 하는데 이는 재료의 구성과 내부 구조와 직접적인 연관이 있다. 모델에 대한 최근의 연구에서는 윤상 인대를 일종의 복합 재료로 간주하여 모재(matrix)와 섬유(fiber)가 결합되어있는 것으로 보고 있다. 모재와 섬유는 각각 독립적인 거동을 보이지만 내부에서의 상호 작용을 간과할 수는 없으므로 모재와 섬유간의 상호 작용에 대한 효과를 모델에 첨가해야 하는 어려움이 있다. 이를 위해서 에너지 함수를 모재, 섬유 및 모재와 섬유의 상호작용을 고려한 세 부분으로 나누어 정의하여 사용하는 것이 편리하다.

본 연구에서는 먼저 복합 재료 개념을 사용한 모델에 대한 타당성을 검토하기 위하여 모재를 Neo-Hookean 재료로 가정하고 계산을 수행하여 실험 자료와 비교하여 보았으며 비교적 잘 일치함을 알 수 있었다. 이는 윤상 인대가 섬유강화 복합재료의 거동과 유사하게 작동하고 있음을 암시하고 있다. 두 가지의 섬유를 사용한 모델에서 섬유의 방향은 하중방향의 축을 중심으로 일정한 각도를 유지하고 있다고 보았으며 내부에서 이루는 각도를  $60^\circ$  와  $120^\circ$  의 두 가지로하여 각각의 경우에 대한 역학적



거동을 분석하였다.

한편, 모재에 대한 에너지 함수의 적합성을 검증하기 위해서 본 연구에서는 다항식 형태와 지수 형태의 두 가지 다른 에너지 함수를 사용하여 윤상인대에 대한 모사를 시도하였다. 모재에 대한 두 가지의 에너지 함수를 실험 데이터와 비교하였을 때 근사하게 모사가 이루어짐을 알 수 있었다. 두 가지의 다른 에너지 함수를 사용하였음에도 실험 데이터와 유사한 결과를 얻는 것으로 볼 때, 2종의 다른 섬유가 존재하는 재료 모델에서는 모재와 섬유 간의 상호 작용에 관한 요소가 모재 자체에 대한 에너지 함수의 차이보다 더 많은 영향을 미치는 것을 알 수 있었다. 보다 사실적인 윤상 인대의 재료 모델링을 위해서는 모재와 섬유간의 다양한 영향을 살펴보아야 할 것으로 본다.

앞으로의 연구 주제로서는 수핵의 압축 및 인장에 대한 정확한 변형 형태와 내부 액체의 압력과 유동을 고려한 재료 모델에 대한 필요성이 대두되고 있으며, 추간관의 위치에 따른 하중의 영향 및 2축 방향 인장이나 압축, 또는 반복적인 하중의 영향, 전단 하중의 영향 등을 고려한 재료 모델에 대한 다각적인 연구가 필요하다고 사료된다.

## 후 기

이 연구는 2009년도 단국대학교 대학원 연구 보조장학금의 지원으로 이루어진 것임.

## 참고문헌

- (1) Fung, Y. C., 1993, *Biomechanics-Mechanical Properties of Living Tissues* 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, NY, USA.
- (2) Almeida, E. S. and Spilker, R. L., 1998, "Finite Element Formulation for Hyperelastic Transversely Isotropic Biphasic Soft Tissues," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 151, pp. 513~538.
- (3) Limbert, G. and Middleton, J., 2004, "A Transversely Isotropic Viscohyperelastic Material Application to The Modeling of Biological Soft Connective Tissues," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 4237~4260.
- (4) Limbert, G. and Middleton, J., 2006, "A Constitutive Model of The Posterior Cruciate Ligament," *Medical Engineering & Physics*, Vol. 28, pp. 99~113.
- (5) Hall, S. J., 2003, *Basic Biomechanics* 3rd Edition, McGraw-Hill, USA.
- (6) Holzapfel, G. A. and Kroon, M., 2008, "A New Constitutive Model for Multi-layered Collagenous Tissues," *Journal of Biomechanics*.
- (7) Han-Chin, W. and Ren-Feng, Y., 1976, "Mechanical Behavior of the Human Annulus Fibrosus," *Journal of Biomechanics*, Vol. 9, pp. 1~7.
- (8) Ebara S, Iatridis J. C., Setton L. A., Foster R. J., Mow V. C. and Weidenbaum M., 1996, "Tensile Properties of Nondegenerate Human Lumbar Anulus Fibrosus," *An International Journal for the Study of the Spine*, Vol. 21, pp. 452~461.
- (9) Elliott, D. M. and Setton, L. A., 2001, "Anisotropic and Inhomogeneous Tensile Behavior of the Human Anulus Fibrosus : Experimental Measurement and Material Model Predictions," *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 123, pp. 256~263.
- (10) Lotz, J. C. and Wagner, D. R., 2004, "Theoretical Model and Experimental Results for the Nonlinear Elastic Behavior of Human Annulus Fibrosus," *Journal of Orthopedic Research*, Vol. 22, pp. 901-909.
- (11) Lotz, J. C. and Klisch, S. M., 1999, "Application of a Fiber-reinforced Continuum Theory to Multiple Deformation of the Annulus Fibrosus," *Journal of Biomechanics*, Vol. 32, pp. 1027~1036.
- (12) Guo, Z. Y., Peng, X. Q. and Moran, B., 2007, "Mechanical Response of Neo-Hookean Fiber-reinforced Incompressible Nonlinearly Elastic Solids," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 1949~1969.
- (13) Guo, Z. Y., Peng, X. Q. and Moran, B., 2007, "Large Deformation Response of a Hyperelastic Fibre-reinforced Composite : Theoretical Model and Numerical Validation," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 38, pp. 1842~1851.
- (14) Guo, Z. Y., Peng, X. Q. and Moran, B., 2006, "An Anisotropic Hyperelastic Constitutive Model with Fiber-matrix Shear Interaction for the Human Annulus Fibrosus," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 73, pp. 815~824.

- (15) Guo, Z. Y., Peng, X. Q. and Moran, B., 2006, "A Composites-based Hyperelastic Constitutive Model for Soft Tissue with Application to the Human Annulus Fibrosus," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 54, pp. 1952~1971.
- (16) Pioletti, D. P. and Rakotomanana, L. R., 2000, "Non-linear Viscoelastic Laws for Soft Biological Tissues," *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 19, pp. 749~759.