

# 축하중이 티모센코 보의 고유진동수에 미치는 영향

## Effect of Axial Loads on Natural Frequencies of Timoshenko Beam

구 교 남\*

Kyo-Nam Koo

(2011년 4월 11일 접수 ; 2011년 5월 16일 심사완료)

**Key Words** : Timoshenko Beam(티모센코 보), Transverse Shear Deformation(횡전단변형), Rotary Inertia(회전관성), Axial Load(축하중), Natural Frequency(고유진동수)

### ABSTRACT

This paper addresses the effect of transverse shear deformation and rotary inertia on the natural frequency of beams under axial loads. It has been reported in the author's paper using a finite element analysis that the Timoshenko effect in a rotating disk decreases and then increases again with increasing rotation speed. To validate the phenomenon, the simply-supported beams under uniform tension are selected in this study since they have exact solutions in vibration problem. The results show that the axial tension in beams would not make the Timoshenko effect decrease monotonically but could make the effect increase again unlike the results reported in the other studies for beams.

### 1. 서 론

횡전단변형(transverse shear deformation)과 회전관성(rotary inertia) 효과를 고려한 보의 진동해석은 일정한 축하중을 받는 보보다는 주로 회전하는 보에 집중되어 왔다.

Yokoyama<sup>(1)</sup>는 유한요소법을 이용하여 회전하는 보의 진동해석을 수행하였다. 그는 비회전 시에는 회전관성보다는 횡전단변형의 영향이 크지만, 회전 시에는 원심력에 의한 강성증가 효과로 반대의 경향이 나타난다고 보고하였다. 그의 연구에서는 이 논문의 식 (3b)에 제시된 마지막 항인  $J\Omega^2\psi$ 가 고려되지 않았으며, 이 항은 보의 휨에 의해 중립면 위아래 점들의 회전반경이 달라지는 것을 고려하는 것이다. Du 등<sup>(2)</sup>은 급수해법을 이용하여 회전 보의 진동해석을 수행하였으나, 이들 역시 지배방정식에

$J\Omega^2\psi$ 항을 고려하지 않았으며, 회전 속도가 증가함에 따라 티모센코 효과(횡전단변형과 회전관성의 효과)가 작게 나타난다는 결론을 내렸다. Banerjee<sup>(3)</sup>는 동적강성법을 이용한 급수해법을 적용하여 회전하는 보의 고유진동수를 구하였다. 그는 이전 논문들<sup>(2,4)</sup>에서  $J\Omega^2\psi$ 항을 고려하지 않았음을 언급하고, 회전수가 증가할수록 이 영향을 무시할 수 없음을 제시하였다. 회전 시 오일러 보이론과 티모센코 보 이론의 오차를 조사하기 위해 3차 고유진동수를 비교하였으며 회전수가 증가함에 따라 오차가 단순하게 감소한다고 설명하였다. Kaya<sup>(5)</sup>는 Banerjee<sup>(3)</sup>와 같은 지배방정식을 유도하고 미분변환법을 사용하여 회전보의 진동해석을 수행하였다.

이상에서의 문헌조사에서 살펴본 바와 같이 회전하는 티모센코 보에 대한 연구들은 해의 정확도를 높이는데 초점을 맞추어 왔으나 회전수가 증가함에 따라 횡전단변형과 회전관성의 효과를 정량적으로 분석하지는 않았다. Kim 등<sup>(6)</sup>은 극직교 이방성 민들린(Mindlin) 원판과 고전원판(Kirchhoff)의 고유진동수 오차가 회전수에 따라 변화하는 양

\* 교신저자; 정희원, 울산대학교 기계공학부 항공우주전공  
E-mail : knkoo@mail.ulsan.ac.kr  
Tel : (052)259-1261, Fax : (052)259-1682

상을 살펴보았다. 앞서 설명한 바와 같이 회전이 보의 휨 강성을 증가시켜 티모셴코 보와 오일러 보의 오차가 감소시키는 것으로 알려져 있었으나, 원판의 경우에는 회전수가 증가함에 따라 그 오차가 감소하다 다시 증가하는 특이한 현상이 나타난다고 보고하였다.

이 연구의 목적은 참고문헌<sup>(6)</sup>에 보고된 현상이 회전원판의 복잡한 응력상태에 의한 것인지, 아니면 이보다 단순한 구조물인 회전보에도 나타나는지를 조사하는 것이다. 정확한 현상규명을 위해 해석적인 해가 존재하는 양단 단순지지보에 일정한 축하중이 작용하는 경우의 고유진동수를 구하였다. 이 연구에서는 오일러 보, 회전관성만 고려한 보, 횡전단변형만 고려한 보, 그리고 두 영향을 모두를 고려한 보(티모셴코 보)의 고유진동수를 비교하고 축하중의 크기에 따른 두 효과의 변화를 고찰하였다.

## 2. 지배방정식 및 해

### 2.1 축하중을 받는 보의 운동 방정식

인장 축하중  $N$ 을 받는 길이  $l$ 인 보의 휨변형 에너지  $U_b$ 와 횡전단변형 에너지  $U_s$ 는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l N \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1a)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^l \kappa GA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right)^2 dx \quad (1b)$$

여기서  $\psi$ 는 보 단면의 휨 회전각,  $w$ 는 중립면의 처짐이고;  $E$ 는 탄성계수,  $G$ 는 전단탄성계수이며;  $A$ 는 보의 단면적,  $I$ 는 면적 관성모멘트,  $\kappa$ 는 전단 보정계수(shear correction factor)이다.

회전수  $\Omega$ 로 회전하는 보의 운동에너지  $T$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \Omega^2 J \psi^2 + J \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (2)$$

여기서  $\rho$ 는 보의 질량밀도이며,  $J$ 는 회전관성모멘트  $J = \rho I$ 이다.

식(1)의 변형에너지 식과 식(2)의 운동에너지 식을 해밀턴(Hamilton)의 원리에 적용하면 다음과 같

이 보의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\kappa GA} \frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3a)$$

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \kappa GA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) - J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + J \Omega^2 \psi = 0 \quad (3b)$$

해석적인 해를 구하기 위해 보가 회전하지 않고 축하중이 일정하다고 가정하면 식(3b)의 마지막 항  $J \Omega^2 \psi$ 가 무시되므로 식(3a)와 식(3b)는 다음과 같은 단일식으로 표현된다.

$$EI \left( 1 + \frac{N}{\kappa GA} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[ J \left( 1 + \frac{N}{\kappa GA} \right) + \frac{EI \rho}{\kappa G} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{J \rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (4)$$

### 2.2 무차원 고유진동수

식(4)로 주어진 티모셴코 보의 해석적인 해는 양단이 단순지지된 경우에만 구할 수 있으며 이 경우에 해는 다음과 같이 가정될 수 있다.

$$w(x,t) = \bar{w}_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \omega_n t \quad (5)$$

여기서  $l$ 은 보의 길이이며,  $n$ 은 진동 모드의 차수이다. 식(5)를 식(4)에 대입하면 고유진동수  $\omega_n$ 을 구할 수 있으며, 결과 분석을 위해 다음과 같이 무차원 변수들을 도입한다.

$$\eta^2 = \frac{N l^2}{EI}, \quad r^2 = \frac{I}{A l^2}, \quad s^2 = \frac{EI}{\kappa G A l^2}, \quad \mu^2 = \frac{\rho A l^4 \omega^2}{EI} \quad (6)$$

식(6)에서  $\eta^2$ 은 무차원 축하중이며, 회전하는 경우에는 무차원 회전수에 해당하는  $\eta$ 를 변수로 사용할 수 있다.  $1/r$ 은 보의 무차원 세장비(slenderness ratio)로서 작아질수록 짧은 보를 나타낸다.  $s^2$ 은 휨 강성 대 횡전단강성의 비를 나타낸다.  $\mu$ 는 무차원 고유진동수를 뜻한다.

무차원 고유진동수  $\mu$ 는 횡전단변형(transverse shear deformation: SD)과 회전관성(rotary inertia: RI) 및 이들의 연성효과(coupling) 고려 여부에 따라 다음과

같이 5가지로 구분된다.

i)  $1/G=0, J=0$ : Euler beam

$$\mu_E^2 = (n\pi)^2[(n\pi)^2 + \eta^2] \quad (7)$$

ii)  $1/G=0, J \neq 0$ : Euler beam + RI

$$\mu_I^2 = \frac{(n\pi)^2[(n\pi)^2 + \eta^2]}{1 + r^2(n\pi)^2} \quad (8)$$

iii)  $1/G \neq 0, J=0$ : Euler beam + SD

$$\mu_S^2 = \frac{(n\pi)^2[(n\pi)^2 + \eta^2 s^2(n\pi)^2 + \eta^2]}{1 + s^2(n\pi)^2} \quad (9)$$

iv)  $1/G \neq 0, J \neq 0$ : Euler beam + SD + RI(no coupling between SD and RI)

$$\mu_{SI}^2 = \frac{(n\pi)^2[(n\pi)^2 + \eta^2 s^2(n\pi)^2 + \eta^2]}{1 + (r^2 + \eta^2 s^2 r^2 + s^2)(n\pi)^2} \quad (10)$$

v)  $1/G \neq 0, J \neq 0$ : Euler beam + SD + RI(full Timoshenko)

$$\begin{aligned} \mu_T^2 = & \frac{1}{2} \left[ \frac{(n\pi)^2}{s^2} + \eta^2(n\pi)^2 + \frac{(n\pi)^2}{r^2} + \frac{1}{s^2 r^2} \right] \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{(n\pi)^2}{s^2} + \eta^2(n\pi)^2 + \frac{(n\pi)^2}{r^2} + \frac{1}{s^2 r^2} \right]^2 \right. \\ & \left. - 4 \left[ \frac{(n\pi)^4}{s^2 r^2} + \frac{\eta^2(n\pi)^4}{r^2} + \frac{\eta^2(n\pi)^2}{s^2 r^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (11) \end{aligned}$$

식 (10)의  $\mu_{SI}^2$ 과 식 (11)의  $\mu_T^2$ 의 차이는 식 (4)의 마지막 항  $\frac{J\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4}$ 의 고려 여부이며, 이 항은 횡전단변형과 회전관성의 연성효과를 나타낸다.

### 3. 계산결과 및 검토

횡전단변형과 회전관성 효과는 다음과 같이 고유진동수 오차를 기준으로 평가되었다.

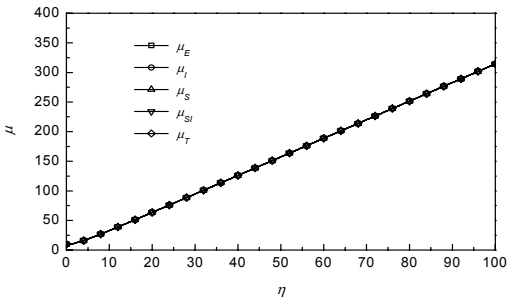
$$E = \frac{\mu_E - \mu}{\mu_E} \times 100(\%) \quad (12)$$

여기서  $\mu$ 값으로  $\mu_E, \mu_S, \mu_{SI}, \mu_T$ 를 사용함에 따라  $E$ 는 각각  $E_E, E_S, E_{SI}, E_T$ 로 표현된다.

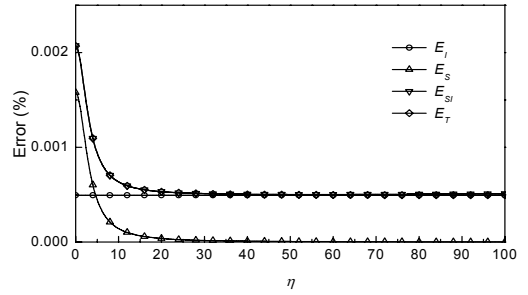
이 논문의 계산에는 금속 재료로 이루어진 직사각형 단면에 해당하는  $E/\kappa G = 3.2$ 를 사용하였다. 일반적으로 티모센코 효과에 대한 연구들은 대부분 회전하는 보를 다루므로, 무차원 축하중  $\eta^2$  대신 무차원 회전수에 해당하는  $\eta$ 를 변화시켜가며 그 효과를 살펴보았다. 그리고 세장비에 따라 축하중이 티모센코 효과에 미치는 영향을 살펴보기 위해  $r = 0.001, 0.01, 0.05$ 로 변화시켜가며 해석을 수행하였다.

Fig. 1 ~ Fig. 4에는 회전수  $\eta$ 의 변화에 따라  $r = 0.001$ 인 보의 고유진동수가 그림 (a)에, 횡전단변형 및 회전관성 효과가 그림 (b)에 각 모드별로 도시되어 있다.  $\eta$ 가 증가함에 따라 고유진동수는 증가하고 있으며 티모센코 효과를 나타내는 오차  $E$ 는 모든 모드에 대해 매우 작은 값이다. 회전관성 효과  $E_I$ 는  $\eta$ 에 무관하게 일정하게 나타나고 있음을 알 수 있는데 이는 식 (12)의  $E_I$ 가  $\eta$ 의 함수가 아니기 때문이다. 횡전단변형 효과  $E_S$ 는 이전의 연구자들의 연구결과와 마찬가지로  $\eta$ 가 증가함에 따라 감소하여 충분히 큰  $\eta$ 에서는 영에 접근하고 있다. 연성 효과를 무시한 티모센코 효과  $E_{SI}$ 는  $\eta$ 가 증가함에 따라 감소하다가 미미하게 증가하고 있다. 이 현상은 제시된 영역에서 첫 번째 모드와 두 번째 모드에서만 확인되지만,  $\eta$ 를 증가시켜 보면 고차 모드에서도 나타난다. 연성효과를 고려한 티모센코 효과  $E_T$ 는 제시된 영역 내에서  $\eta$ 가 증가함에 따라 단조감소하는 현상을 보여주고 있다. 그러나  $r$ 이 작을지라도  $n$ 값이 커서 횡전단변형을 무시할 수 없다면, 충분히 큰  $\eta$ 값에서  $E_T$ 가 다시 증가할 수 있다.  $\eta$ 가 증가함에 따라 횡전단변형 효과가 더욱더 작아지는데 이는 인장하중에 의한 휨강성 증가(stiffening)로 인해 횡전단변형이 상대적으로 작아지기 때문이다.

$r = 0.01$ 인 보의 고유진동수 및 티모센코 효과를 Fig. 5 ~ Fig. 8에 모드별로 제시하였다. 고유진동수는  $r = 0.001$ 인 경우와 큰 차이 없이  $\eta$ 가 증가함에 따라 비슷한 양상으로 증가하고 있으나  $\eta = 100$  부근에서 세번째 모드와 네번째 모드의  $\mu$ 가 약간 낮게 평가되고 있다. 각 모드별로 횡전단변형과 회전관성 효과는  $r = 0.001$ 인 경우보다 증가하였다. 특히 연성효과를 무시한 티모센코 효과  $E_{SI}$ 는  $\eta$ 가 증가함에 따라 감소하다 증가하지만 연성효과를 고려한 티모센코 효과  $E_T$ 는 구간 내에서 감소하고 있어

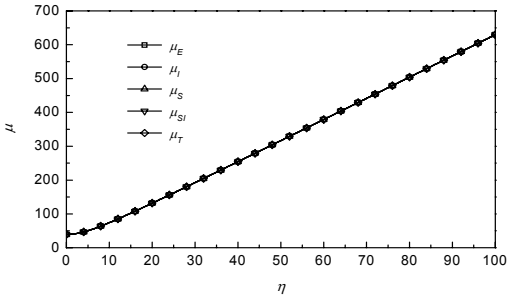


(a) Natural frequency

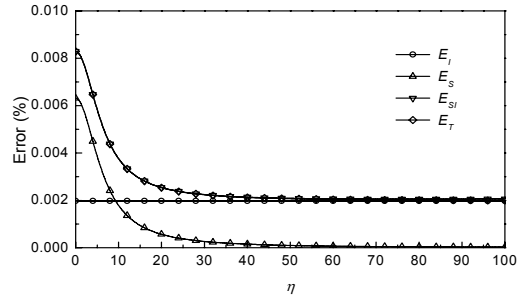


(b) Error in natural frequency

**Fig. 1** Natural frequency and its error of rotating beam with  $r = 0.001$ :  $n = 1$

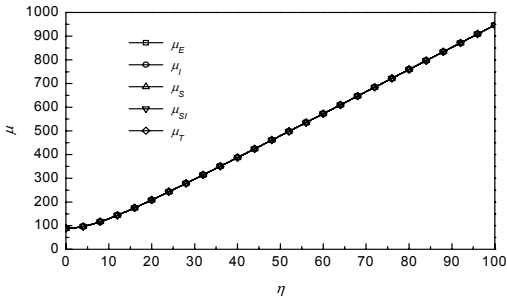


(a) Natural frequency

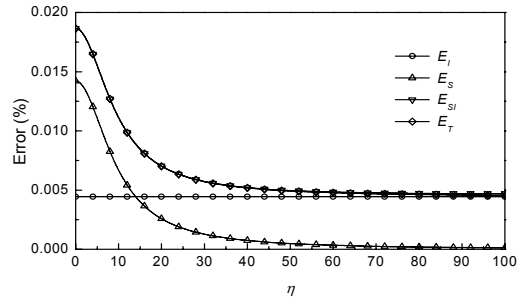


(b) Error in natural frequency

**Fig. 2** Natural frequency and its error of rotating beam with  $r = 0.001$ :  $n = 2$

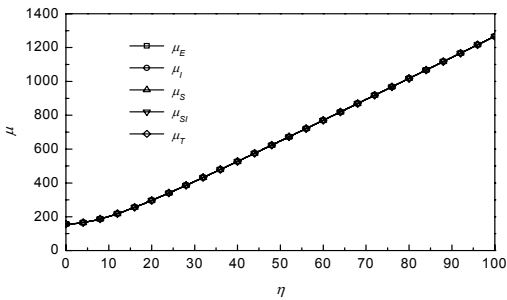


(a) Natural frequency

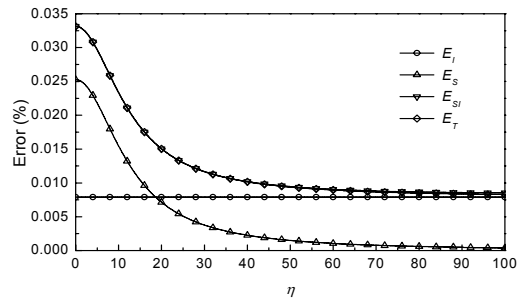


(b) Error in natural frequency

**Fig. 3** Natural frequency and its error of rotating beam with  $r = 0.001$ :  $n = 3$

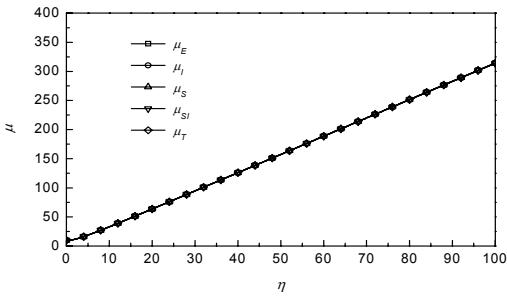


(a) Natural frequency

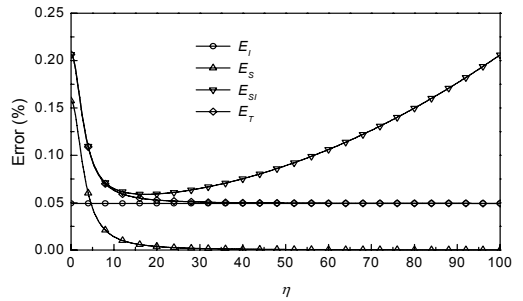


(b) Error in natural frequency

**Fig. 4** Natural frequency and its error of rotating beam with  $r = 0.001$ :  $n = 4$

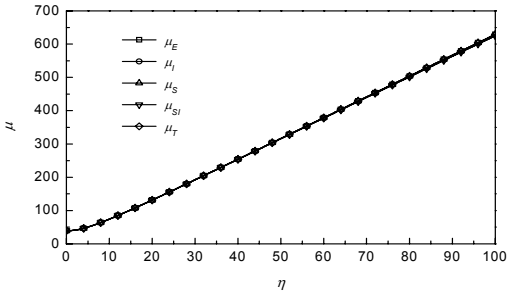


(a) Natural frequency

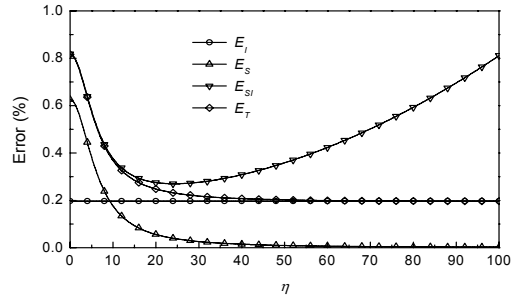


(b) Error in natural frequency

**Fig. 5** Natural frequency and its error of rotating beam with  $r=0.01$ :  $n = 1$

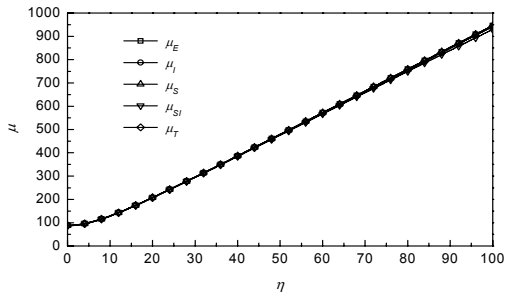


(a) Natural frequency

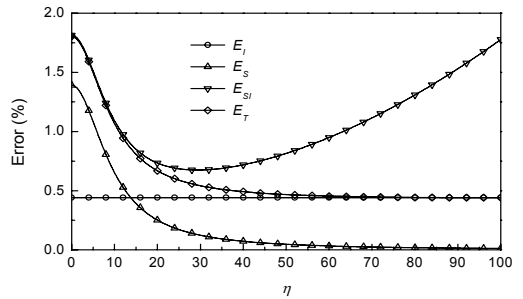


(b) Error in natural frequency

**Fig. 6** Natural frequency and its error of rotating beam with  $r=0.01$ :  $n = 2$

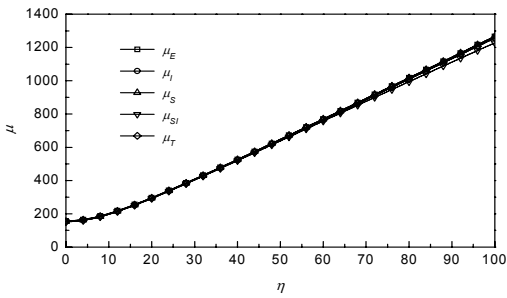


(a) Natural frequency

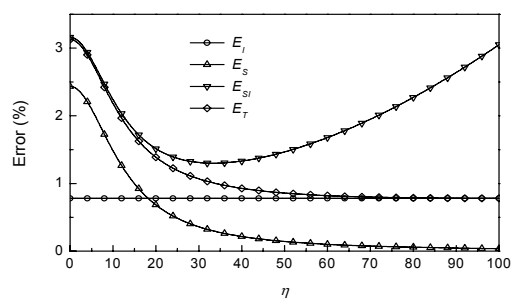


(b) Error in natural frequency

**Fig. 7** Natural frequency and its error of rotating beam with  $r=0.01$ :  $n = 3$

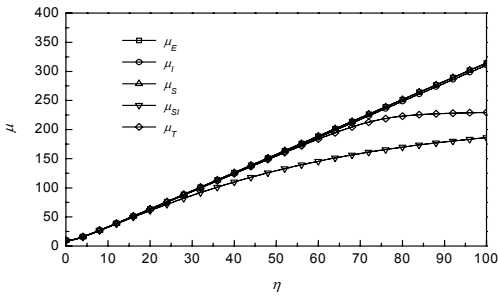


(a) Natural frequency

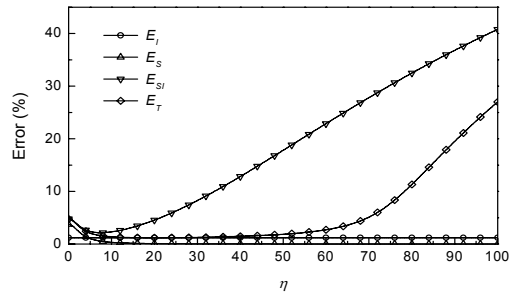


(b) Error in natural frequency

**Fig. 8** Natural frequency and its error of rotating beam with  $r=0.01$ :  $n = 4$

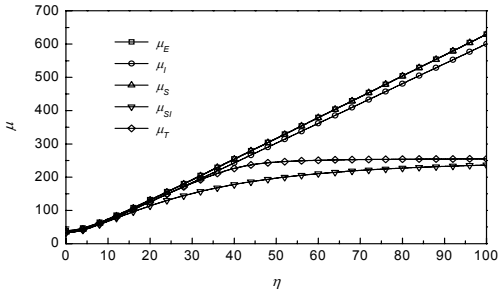


(a) Natural frequency

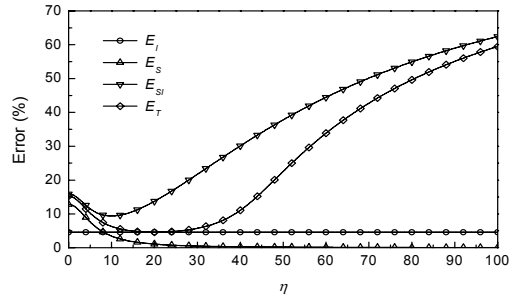


(b) Error in natural frequency

**Fig. 9** Natural frequency and its error of rotating beam with  $r=0.05$ :  $n = 1$

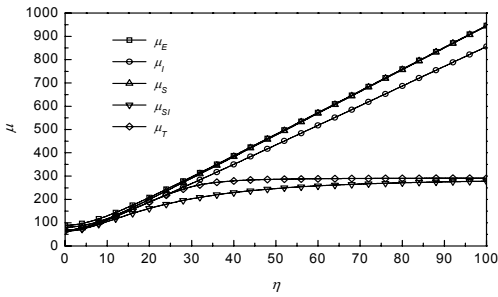


(a) Natural frequency

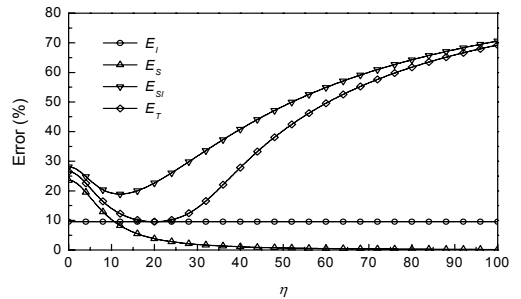


(b) Error in natural frequency

**Fig. 10** Natural frequency and its error of rotating beam with  $r=0.05$ :  $n = 2$

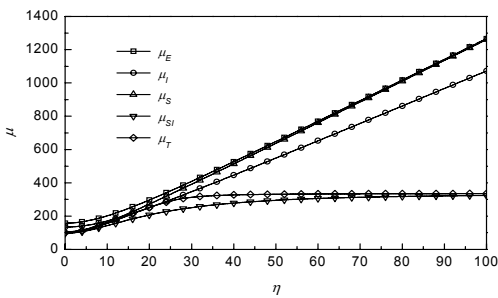


(a) Natural frequency

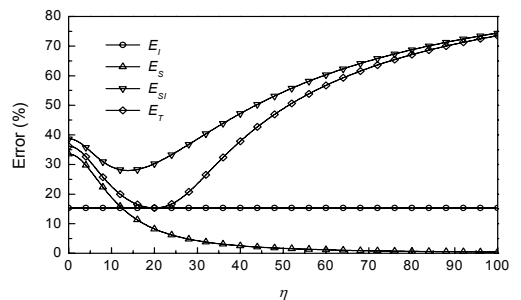


(b) Error in natural frequency

**Fig. 11** Natural frequency and its error of rotating beam with  $r=0.05$ :  $n = 3$



(a) Natural frequency



(b) Error in natural frequency

**Fig. 12** Natural frequency and its error of rotating beam with  $r=0.05$ :  $n = 4$

연성효과를 고려해야 함을 알 수 있다.

마지막으로  $r=0.05$ 인 보의 고유진동수 및 티모센코 효과를 Fig. 9 ~ Fig. 12에 나타내었다. 앞서의 경우와 달리 세장비가 상대적으로 작은 경우이므로 횡전단변형과 회전관성 효과가 크게 나타나고 있다. 이 효과들로 인해  $\mu_{sr}$ 와  $\mu_T$ 는  $\eta$ 값이 증가함에 따라 증가하지 않고 일정한 값으로 수렴함을 보여주고 있다. 고유진동수 오차를 살펴보면  $E_T$ 의 변화에 앞의 경우와 다른 경향이 나타나고 있다. 즉  $\eta$ 값이 증가함에 따라  $E_T$ 가 감소하다 증가하고 있다. 고차모드로 갈수록 작은  $\eta$ 에서 증가하기 시작한다. 이는 앞서 언급한 참고문헌<sup>(6)</sup>에 보고된 회전 원판에서 나타나는 현상과 같은 결과이다. 이 연구에서는 일정한 축하중을 받는 보의 해석적인 해를 구하여 축하중의 존재가 티모센코 효과를 단순하게 감소시키지 않음을 입증하였다.

### 3. 결 론

이 연구에서는 회전 원판에서 회전수가 증가함에 따라 티모센코 효과가 감소하다 증가하는 현상을 규명하기 위해 정해가 존재하는 축하중이 단순지지보의 고유진동수에 미치는 영향을 조사하였다.

축하중이 증가함에 따라 세장비가 큰 보는 티모센코 효과가 감소하는 경향을 보이나 세장비가 작은 보는 상대적으로 작은 축하중에서 티모센코 효과가 다시 증가하는 현상을 보임을 확인할 수 있었다. 이는 회전수의 증가에 따라 티모센코 효과가 감소한다는 이전의 연구들이 제시한 결과와는 다른 결과이며 이 연구에서 처음으로 제시하였다.

이 연구는 일정한 축하중을 받는 단순지지보에 국한되었으나, 차후에 외팔보에 대해서 회전이 티모센코 효과에 미치는 영향을 유한요소 해석을 통해 연구를 진행할 예정이다.

### 후 기

이 논문은 2011년 울산대학교의 연구비에 의하여 연구되었음.

### 참 고 문 헌

- (1) Yokoyama, T., 1988, Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 30, No. 10, pp. 743~755.
- (2) Du, H., Lim, M. K. and Liew, K. M., 1994, A Power Series Solution for Vibration of a Rotating Timoshenko Beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 175, No. 4, pp. 505~523.
- (3) Banerjee, J. R., 2001, Dynamic Stiffness Formulation and Free Vibration Analysis of Centrifugally Stiffened Timoshenko Beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 247, No. 1, pp. 97~115.
- (4) Lee, S. Y. and Kuo, Y. H., 1993, Bending Frequency of a Rotating Timoshenko Beam with General Elastically Restrained Root, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 162, No. 2, pp. 243~250.
- (5) Kaya, M. O., 2006, Free Vibration Analysis of a Rotating Timoshenko Beam by Differential Transform Method, *International Journal of Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, Vol. 78, No. 3, pp. 194~203.
- (6) Kim, D. H. and Koo, K. N., 2007, Effects of Transverse Shear Deformation and Rotary Inertia on Vibration of Rotating Polar Orthotropic Disks, *Journal of the Korean Society for Composite Materials*, Vol. 20, No. 3, pp. 43~49.