

일정체적 원호형 곡선보의 자유진동

Free Vibrations of Circular Curved Beams with Constant Volume

이 병 구† · 이 태 은* · 최 종 민** · 박 창 은**

Byoung Koo Lee, Tae Eun Lee, Jong Min Choi and Chang Eun Park

(2011년 4월 5일 접수 ; 2011년 4월 25일 심사완료)

Key Words : Free Vibration(자유진동), Circular Curved Beam(원호형 곡선보), Constant Volume(일정체적), Circular Cross-section(원형단면), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

This paper deals with free vibrations of the circular curved beams with constant volume, whose cross sectional shapes are the circular solid cross-sections. Volumes of the objective beam are always held in constant regardless shape functions of the cross-sectional radius. The shape functions are chosen as the linear, parabolic and sinusoidal ones. Ordinary differential equations governing free vibrations of such beam are derived and solved numerically for determining the natural frequencies. In numerical examples, the hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped end constraints are considered. As the numerical results, relationships between frequency parameters and various beam parameters such as rise ratio, section ratio, elasticity ratio, volume ratio, slenderness ratio and taper type are reported in tables and figures.

1. 서 론

곡선보는 보, 기둥, 아치, 평면판/곡면판 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중의 하나이며 다양한 구조물의 뼈대구조로 널리 이용되고 있다. 대부분의 복잡한 구조물도 이러한 단위구조들의 결합체이므로 곡선보 등과 같은 단위구조의 정·동적 거동에 관한 연구는 구조공학분야에서 전통적으로 중요한 연구과제 중에 하나이다.

이 연구에서 곡선보는 일정체적을 갖는 부재이다. 일정체적 부재는 변단면의 종류에 따라 구조물의 거동특성이 달라지기 때문에 일정체적으로부터 구조물의 최대 안정성을 확보할 수 있는 최적형상을

찾는 것이 중요하다. 또한 일정체적 부재로부터 최대강성을 찾는 최적형상을 찾는 문제는 최적설계의 개념에서도 중요한 연구과제이다⁽¹⁾. 이러한 관점에서 최대의 동적 안정성을 확보할 수 있는 곡선보를 결정하기 위해서 일정체적 곡선보의 기하적 조건에 따른 동적 특성을 고찰하여야 한다. 따라서 이 연구는 동적 최강 곡선보를 결정하기 위하여 이루어져야 하는 선행연구이다.

이 연구와 직접 관련이 있는 일정체적을 갖는 구조물과 곡선보의 거동해석에 관한 연구동향을 고찰하면 다음과 같다. 일정체적 구조물에 관한 연구는 비선형 거동⁽²⁾, 좌굴하중⁽³⁾, 최강 구조⁽⁴⁾, 최소중량 구조⁽⁵⁾, 자유진동⁽⁶⁾ 등의 구조공학 분야에서 보⁽⁴⁾, 기둥^(2,3), 아치^(5,6) 등의 구조단위를 대상으로 많은 연구들이 이루어지고 있다. 곡선보의 자유진동에 관한 연구는 1) 해석방법⁽⁷⁻⁹⁾, 2) 관성력의 영향⁽⁹⁻¹¹⁾, 3) 변단면의 영향⁽¹²⁻¹⁴⁾, 4) 변화곡률의 영향⁽¹⁵⁻¹⁸⁾, 5) 탄성지반의 영향⁽¹⁹⁻²¹⁾의 5개 분야의 범위로 나누어 연구가

† 교신저자; 정희원, 원광대학교 토목환경공학과
E-mail : bkleest@wku.ac.kr
Tel : (063)850-6718, Fax : (063)857-7204

* 정희원, 원광대학교 토목환경공학과
** 원광대학교 대학원 토목환경공학과

진행되고 있다. 이 연구는 위의 5개 분야 중에서 해석방법, 관성력, 변단면의 영향 등 3개 분야와 일치한다. 수치해석방법과 관련하여 Gupta and Howson⁽⁷⁾과 Howson et al.⁽⁸⁾은 고유진동수의 정확해를 산정하였으며, Kang et al.⁽⁹⁾은 미분구적법을 이용하여 수치해석법으로 고유진동수를 산정하였다. 관성력의 영향에 대해서는 Kang et al.⁽⁹⁾은 warping을 고려한 비틀림 관성력이 자유진동에 미치는 영향을 연구하였고, Wang and Guilbert⁽¹⁰⁾와 Issa et al.⁽¹¹⁾은 회전관성력의 영향을 연구하였다. 변단면의 영향에 대해서는 Gendy and Saleeb⁽¹²⁾가 임의 단면형상을 갖는 곡선보의 자유진동을 연구하였다. Kawakami et al.⁽¹³⁾과 Lee et al.⁽¹⁴⁾은 단면강성이 함수적으로 변화하는 변단면 곡선보의 자유진동을 연구하였다. 변화곡률의 영향에 대해서는 Wang⁽¹⁵⁾과 Takahashi and Suzuki⁽¹⁶⁾가 타원형 곡선보의 자유진동을 연구하였고, Scott and Woodhouse⁽¹⁷⁾와 Lee et al.⁽¹⁸⁾은 변화곡률 곡선보의 자유진동을 연구하였다. 탄성지반의 영향에 대해서는 Wang and Brannen⁽¹⁹⁾, Lee et al.⁽²⁰⁾, Issa and Nasr⁽²¹⁾ 등이 Winkler 지반과 Pasternak 지반으로 지지된 곡선보의 자유진동을 연구하였다. 이상의 고찰에서와 같이 곡선보의 자유진동에 관한 연구는 매우 중요한 연구과제로 다양한 분야에서 연구가 진행되고 있다.

이 연구는 곡선보 재료의 체적이 일정한 중실 원형단면 곡선보의 자유진동에 관한 연구이며, 동적최강곡선보의 단면형상을 해석하기 위한 사전연구(pilot study)이다. 이와 같이 체적이 일정한 제약조건을 갖는 원호형 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수를 산출하였다. 수치해석의 결과로 곡선보의 고유진동수와 보의 변수들인 높이비, 단면비, 탄성계수 비, 체적비, 세장비 및 변단면 종류 사이의 관계를 표 및 그림에 나타내었다.

2. 일정체적 곡선부재

2.1 부재의 정의

Fig. 1(a)는 지간길이 l , 높이 h , 곡률반경 ρ , 중심각 α , 원주길이 L , 체적 V 인 원호형 부재를 나타낸다. 부재체적 V 는 항상 일정하다. 원호형 선형은 직교좌표계 (x, y) 에서 정의되며, 좌단($x=0$)에서 임의점 (x, y) 까지 원주길이는 s 이다. 원호형 부재는

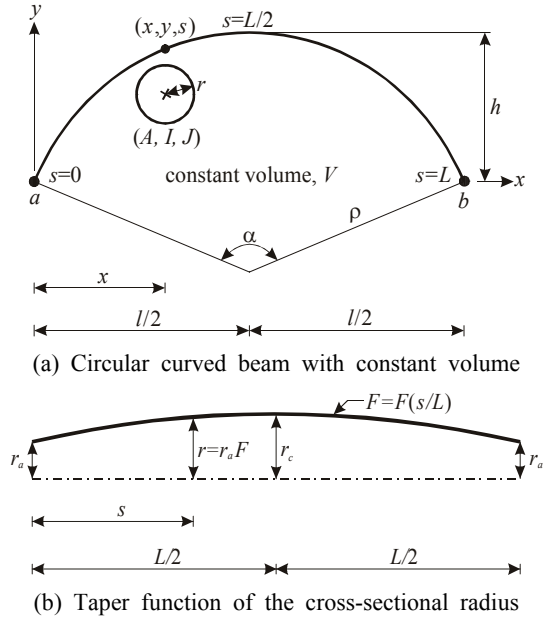


Fig. 1 Curved beam geometry

정점($x=l/2$)에 대하여 대칭이므로 정점에서 $s=L/2$ 이고, 우단 $b(x=l)$ 에서 $s=L$ 이다. 보의 단면은 중실 원형단면이고, (x, y) 에서 단면반경, 단면적, 단면2차모멘트, 비틀림 상수는 각각 r, A, I, J 이다. Fig. 1(b)는 (x, y) 에서 r 의 변화를 나타낸다. 양단 a, b 에서 $r=r_a$ 이고, 정점에서 $r=r_c$ 이다. (x, y) 에서 r 은 s/L 의 대수적 함수인 $r=r_a F(s/L)$ 로 표현된다. 여기서, $F(s/L)$ 은 단면반경 r 의 변화를 설명해주는 변단면 함수이다.

2.2 단면의 성질

단면반경 r 의 변단면 함수 F 를 결정하기 위하여 좌단의 단면반경 r_a 에 대한 정점의 단면반경 r_c 의 비로 정의되는 단면비 d 를 다음과 같이 도입한다.

$$d = r_c / r_a \tag{1}$$

단면반경이 r 인 원형단면의 단면성질 A, I, J 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A = \pi r^2 \tag{2}$$

$$I = (\pi/4) r^4 \tag{3}$$

$$J = 2I = (\pi/2) r^4 \tag{4}$$

단면반경 r 은 변화반경이므로 r 을 원주길이 s 에 관한 변단면 함수 F 로 나타내면 다음과 같다.

$$r = r_a F \tag{5}$$

여기서 $F = F(s/L)$ 의 변단면 함수이다.

식 (2)를 이용하여 부재의 체적 V 를 구하면 다음과 같다.

$$V = \int_0^L A ds = \pi c_1 r_a^2 L \tag{6}$$

식 (6)에서 c_1 은 변단면 함수 F 에 따라서 결정되는 계수이며, 다음 절 2.3에서 결정한다.

2.3 변단면 함수

단면반경 r 의 변화를 설명해주는 변단면 종류를 직선, 포물선, 정현의 3가지 함수로 채택하면, 식 (5)의 변단면 함수 F 및 식 (6)의 계수 c_1 을 다음과 같이 결정할 수 있다.

(1) 직선 변단면(linear taper)

$$F = 2(d-1)s/L + 1, 0 \leq s/L \leq 0.5 \tag{7a}$$

$$F = 2(d-1)(1-s/L) + 1, 0.5 \leq s/L \leq 1 \tag{7b}$$

$$c_1 = (d^2 + d + 1)/3 \tag{8}$$

(2) 포물선 변단면(parabolic taper)

$$F = -4(d-1)(s/L-1)s/L + 1, 0 \leq s/L \leq 1 \tag{9}$$

$$c_1 = (8d^2 + 4d + 3)/15 \tag{10}$$

(3) 정현 변단면(sinusoidal taper)

$$F = (d-1)\sin(\pi s/L) + 1, 0 \leq s/L \leq 1 \tag{11}$$

$$c_1 = (d-1)^2/2 + 4(d-1)/\pi + 1 \tag{12}$$

식 (6)을 이용하여 좌단의 단면반경 r_a 를 일정체적 V 로 나타내면 다음과 같다.

$$r_a = [V/(\pi c_1 L)]^{1/2} = \beta l / (\pi e c_1)^{1/2} \tag{13}$$

위 식에서 β, e 는 체적비 및 원주길이 비이며 다음과 같이 정의된다.

$$\beta = \sqrt{V/l^3} \tag{14}$$

$$e = L/l \tag{15}$$

식 (5), (13)을 이용하여 식 (2), (3), (4)의 A, I, J 를 F 로 나타내면 다음과 같다.

$$A = (\beta l)^2 / (e c_1) F^2 \tag{16}$$

$$I = (\beta l)^4 / [4\pi (e c_1)^2] F^4 \tag{17}$$

$$J = (\beta l)^4 / [2\pi (e c_1)^2] F^4 \tag{18}$$

3. 수학적 모형

3.1 동적 평형방정식

Fig. 2는 제 2장에서 제원과 단면성질 r, A, I, J 가 정의된 수평 곡선보의 기하적 형상을 나타낸다. 양쪽 지점은 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있다. 부재축의 임의점 (x, y) 는 극좌표계 (ρ, θ) 로 정의된다.

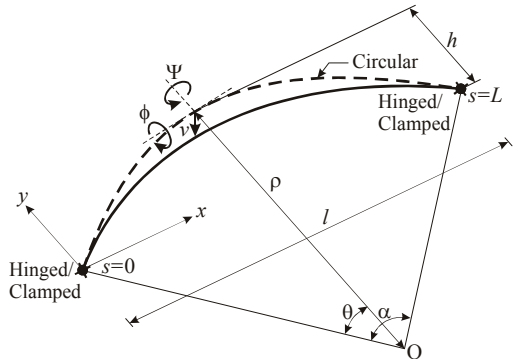


Fig. 2 Geometry of circular curved beam

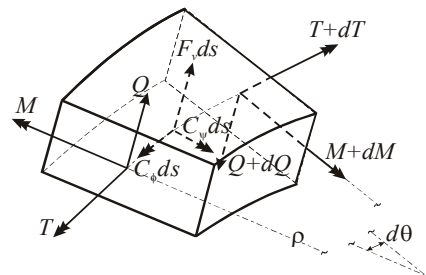


Fig. 3 Loads on curved beam element

곡선보가 자유진동하게 되면 부재축에는 이 그림에 보인 바와 같이 수직 변위 v , 휨에 의한 단면 회전각 ψ 및 비틀림 모멘트에 의한 비틀림각 ϕ 가 발생한다.

자유진동 상태에서 동적 변위 v , ψ 및 ϕ 에 의하여 동적 전단력 Q , 동적 휨 모멘트 M , 동적 비틀림 모멘트 T 의 합응력이 발생한다. 질량을 갖고 있는 부재의 미소요소에는 수직 관성력 F_v , 회전 관성우력 C_ψ , 비틀림 관성우력 C_ϕ 가 발생한다.

Fig. 3은 부재의 미소요소에 작용하는 합응력 Q , M , T 와 관성력 F_v , C_ψ , C_ϕ 사이의 동적 평형상태를 나타낸다. 이 그림에서 미소요소에 작용하는 힘들의 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다⁽¹⁴⁾.

$$Q' - \rho F_v = 0 \tag{19}$$

$$M' - \rho Q + T + \rho C_\psi = 0 \tag{20}$$

$$M - T' + \rho C_\phi = 0 \tag{21}$$

여기서 ($'$) = $d/d\theta$ 이다.

3.2 합응력 및 관성력

응력-변위 관계식으로부터 단면에 발생하는 동적 합응력 Q , M , T 를 나타내면 다음과 같다⁽²²⁾.

$$Q = f_s GA(\rho^{-1}v' - \psi) \tag{22}$$

$$M = EI\rho^{-1}(\phi - \psi') \tag{23}$$

$$T = GJ\rho^{-1}(\psi + \phi') \tag{24}$$

위 식에서 f_s 는 단면형상계수이고 이 연구에서 채택한 원형단면에 대해서 $f_s = 10/9$ 이다. E , G 는 재료의 탄성계수, 전단탄성계수이다.

보의 자유진동을 조화진동으로 가정하면 관성력 F_v , C_ψ 및 C_ϕ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다⁽²³⁾.

$$F_v = -\gamma A\omega_i^2 v \tag{25}$$

$$C_\psi = -\gamma I\omega_i^2 \psi \tag{26}$$

$$C_\phi = -\gamma J\omega_i^2 \phi \tag{27}$$

여기서 γ 는 곡선보 재료의 질량밀도, ω_i 는 고유각진동수, $i(=1,2,3,4,\dots)$ 는 모드번호이다.

3.3 지배미분방정식

(1) 지배미분방정식의 유도

동적 평형방정식과 동적 합응력 및 관성력을 이용하여 일정체적 원호형 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도한다. 상미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$f = h/l \tag{28}$$

$$\zeta = \rho/l \tag{29}$$

$$\xi = x/l \tag{30}$$

$$\eta = y/l \tag{31}$$

$$\bar{v} = v/l \tag{32}$$

$$u = G/E \tag{33}$$

$$C_i = \omega_i l \sqrt{\gamma/E} \tag{34}$$

위와 같이 길이차원의 (h, ρ, x, y, v)는 지간길이 l 로 정규화하였다. f 는 높이비, ζ 는 무차원 곡률반경, (ξ, η)는 무차원 직교좌표계, \bar{v} 는 무차원 수직변위, u 는 탄성계수 비, C_i 는 무차원 고유진동수이다.

식 (22)~(24)와 식 (25)~(27)에 식 (16)~(18)을 대입하면 Q , M , T 와 F_v , C_ψ , C_ϕ 를 얻는다. 이렇게 얻어진 Q , M , T 로부터 θ 에 관한 1계미분식 Q' , M' , T' 를 얻는다. 이와 같이 정의된 (Q , M , T), (Q' , M' , T'), (F_v , C_ψ , C_ϕ)를 동적 평형방정식 (19)~(21)에 대입하고 무차원 변수식 (28)~(34)를 이용하면 일정체적 원호형 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 식 (35)~(37)과 같이 유도할 수 있다.

$$\bar{v}'' = a_1 \bar{v}' + C_i^2 a_2 \bar{v} + a_3 \psi' + a_4 \psi \tag{35}$$

$$\psi'' = a_5 \bar{v}' + a_6 \psi' + (a_7 + C_i^2 a_8) \psi + a_9 \phi' + a_{10} \phi \tag{36}$$

$$\phi'' = a_{11} \psi' + a_6 (\psi + \phi') + (a_{12} + C_i^2 a_{13}) \phi \tag{37}$$

위에서 미분방정식의 계수 $a_1 \sim a_{13}$ 는 다음과 같다.

$$a_1 = -2F^{-1}F' \tag{38a}$$

$$a_2 = -(f_s u)^{-1} \zeta^2 \tag{38b}$$

$$a_3 = \zeta \quad (38c)$$

$$a_4 = 2F^{-1}F'\zeta \quad (38d)$$

$$a_5 = -(f_s u s_r^2) F^{-2} \zeta \quad (38e)$$

$$a_6 = -4F^{-1}F' \quad (38f)$$

$$a_7 = u(2 + f_s s_r^2) F^{-2} \zeta^2 \quad (38g)$$

$$a_8 = -\zeta^2 \quad (38h)$$

$$a_9 = 1 + 2u \quad (38i)$$

$$a_{10} = 4F^{-1}F' \quad (38j)$$

$$a_{11} = -(1 + 0.5u^{-1}) \quad (38k)$$

$$a_{12} = 0.5u^{-1} \quad (38l)$$

$$a_{13} = -u^{-1}\zeta^2 \quad (38m)$$

위에서 s_r 은 곡선보의 세장비이며 다음과 같다.

$$s_r = l / \sqrt{I_a / A_a} = (2/\beta) \sqrt{\pi e c_1} \quad (39)$$

(2) 경계조건

회전지점에서 변위 v , ϕ 및 식 (23)의 휨 모멘트 M 은 발생하지 않는다. 따라서 다음과 같은 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\bar{v} = 0 \quad (40)$$

$$\phi = 0 \quad (41)$$

$$\psi' = 0 \quad (42)$$

고정지점에서 변위 v , ψ , ϕ 는 발생하지 않으므로 다음의 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\bar{v} = 0 \quad (43)$$

$$\psi = 0 \quad (44)$$

$$\phi = 0 \quad (45)$$

(3) 곡률 및 단면항

위에서 유도한 상미분방정식은 θ 에 관한 미분방정식이므로 계수 $a_1 \sim a_{13}$ 에 포함되어 있는 F , F'

를 독립변수인 θ 항으로 나타내야 한다. 이를 위하여 원호형 곡선보의 무차원 곡률반경 ζ , 중심각 α 및 원주길이 비 e 를 다음과 같이 산정한다.

$$\zeta = (4f^2 + 1) / (8f) \quad (46)$$

$$\alpha = 2 \tan^{-1} [f / (0.25 - f^2)] \quad (47)$$

$$e = \zeta \alpha \quad (48)$$

위에서 높이비 f 는 입력변수이다.

이제 변단면 종류에 따라서 결정되는 식 (7), (9), (11)의 변단면 함수식 F 에 포함된 변수 (s/L)는 다음과 같이 θ 항으로 나타낼 수 있다.

$$s/L = \rho \theta / (e l) = (\zeta / e) \theta \quad (49)$$

이상에서 나타낸 식 (46)~(49)를 이용하면 계수 $a_1 \sim a_{13}$ 에 포함되어 있는 F 를 θ 항으로 계산할 수 있다. F 의 1계 미분 F' 는 미분구적법⁽²⁴⁾을 이용하여 산정하였다. 계수 $a_1 \sim a_{13}$ 에 포함되어 있는 s_r , ζ 는 식 (39), (46)으로 계산할 수 있다.

4. 수치해석 예 및 토의

4.1 수렴해석 및 검증

이상의 해석이론을 이용하여 일정체적 원호형 곡선보의 무차원 고유진동수 C_i 를 산출할 수 있는 프로그램을 FORTRAN어로 개발하였다. 이 프로그램에 변단면 종류(직선/포물선/정현), 지점조건(회전-회전/회전-고정/고정-고정), 높이비 f , 단면비 d , 탄성계수 비 u , 체적비 β 를 입력하고 C_i 를 산정하였다.

이 연구에서 상미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법⁽²⁵⁾을 이용하였고, 미분방정식의 고유치인 C_i 는 행렬값 탐사법을 결합한 Regula-Falsi법⁽²⁵⁾을 이용하여 산출하였다.

수치해석 예제를 보이기 전에 수렴해석을 실시하여 Runge-Kutta법에서 적당한 단계길이(step size) $\Delta\alpha$ 를 결정하였다. Fig. 4는 상미분방정식의 수치적분에서 곡선보 요소의 분할개수($\alpha/\Delta\alpha$)에 따른 C_i 의 수렴 해석 결과를 나타낸다. 곡선보의 조건은 그림 상단에 표시되어 있다. 수렴해석의 결과로 분할개수가 약 40인 경우 제 4모드까지의 C_i 는 모두 유효숫자

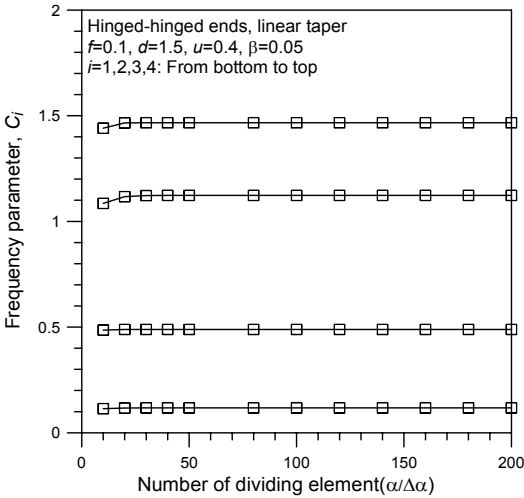


Fig. 4 Convergence analysis

4자리까지 수렴하였다. 이후의 모든 수치해석 예에서는 요소의 분할개수를 100으로 C_i 를 산출하였다.

4.2 수치해의 검증

이 연구의 이론 및 수치해석 방법을 검증하기 위하여 이 연구와 SAP 2000의 고유진동수 F_i (Hz)를 Table 1에 나타내었다. 고유진동수 산정에 이용한 곡선보 조건은 다음과 같다.

- 변단면 종류 : 포물선 변단면
- 지점 조건 : 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정
- 선형 : $l=1\text{ m}, h=0.1\text{ m}, L=1.026\text{ m}, \rho=1.300\text{ m}, \alpha=0.790\text{ rad}$
- 부재 제원 : $r_a=0.04\text{ m}, r_c=0.06\text{ m}$
- 부재 체적 : $V=9.287 \times 10^{-3}\text{ m}^3$
- 재료 성질 : $E=2 \times 10^{11}\text{ N/m}^2, G=8 \times 10^{10}\text{ N/m}^2, \gamma=7,850\text{ kg/m}^3$

위의 조건으로부터 무차원 입력변수 f, d, u, β 와 계수 $a_1 \sim a_{13}$ 를 산정하는 데 필요한 무차원 변수 c_1, e, s_r 을 계산하면 다음과 같다.

- 입력변수 : $f=0.1, d=1.5, u=0.4, \beta=0.0964$
- $c_1=1.8, e=1.026, s_r=50$

곡선보 재료의 기계적 성질 E, γ 를 식 (34)에 대입하면 $F_i = \omega_i / (2\pi) = (1/2\pi l) \sqrt{E/\gamma} C_i = 803.3 C_i\text{ Hz}$

로 산정되어 무차원 고유진동수 C_i 로부터 F_i (Hz)를 환산할 수 있다. 이 표에서 F_i 의 차이는 평균 1.69%를 보이고 있어 이 연구에서 전개한 이론 및 수치 해석 방법이 모두 타당함을 검증할 수 있다.

4.3 변수연구

Table 2는 $f=0.1, d=1.5, u=0.4, \beta=0.05$ 인 곡선보의 지점 조건별 무차원 고유진동수 C_i 를 나타낸다. 고정지점은 회전지점에 비하여 구조거동에 대한 강성이 크기 때문에 C_i 값은 고정-고정, 회전-고정, 회전-회전 순서로 크다. 제 4모드에서 C_i 값은 지점에 상관없이 거의 같은 값을 갖는다. 이는 제 4모드는 비틀림 지배모드이기 때문이며, 회전지점은 고정지점과 비교하여 비틀림이 지배모드의 C_i 를 계산하는 데에는 거의 영향력이 없는 것을 알 수 있다.

Table 3은 $f=0.1, d=1.5, \beta=0.05$ 인 곡선보의 탄성계수 비 u 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸다. u 값은 구조용 재료에서 0.35 이상의 값을 가지며 이론적으로 0.5가 최대치이다. u 가 증가하면 C_i 는 증가한다. 즉, u 가 증가하면 비틀림 강성이 증가하여 C_i 는 증가하게 되는 결과를 갖는다. 따라서 C_i 값을 증가시키기 위해서는 휨 강성 EI 와 비교하여 상대적으로 비틀림 강성 GA 가 더 큰 부재가 유리하다.

Fig. 5는 회전-고정, 포물선 변단면, $d=1.5, u=0.4, \beta=0.05$ 인 곡선보의 높이비 f 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸다. f 가 증가하면 곡선보 축의 길이가 커지므로 진동에 대한 강성이 작아지기 때문에 C_i 는 감소하는 경향이 있다. 그러나 이 그림에서와 같이 $f \leq 0.234$ 에서 제 4모드의 C_4 는 증가한다. 이 그림에서 ■로 표시한 좌표 (0.234, 1.639)에서 실선의 제 4모드와 점선의 제 5모드 고유진동수 곡선이 서로 만나고 있다. 이 좌표에서 C_i 값은 중복 고유진동수를 갖게 되며, 이 좌표에서 제 4, 5 모드 사이에서 모드변환이 일어나고 있다. 이 그림에서 $f \leq 0.234$ 에서는 제 4모드가 비틀림 모드이고, 제 5모드는 휨 모드이다. 한편, $f \geq 0.234$ 에서는 이와 반대로 제 4모드가 휨 모드이고 제 5모드가 비틀림 모드이다.

Fig. 6은 고정-고정, 정현 변단면, $f=0.1, u=0.4, \beta=0.05$ 인 곡선보의 단면비 d 의 변화에 따른 무차원

Table 1 Comparisons of natural frequency F_i in Hz between this study and SAP 2000

End constraint	i	Natural frequency F_i (Hz)		Error(%)*
		This study	SAP 2000	
Hinged - hinged	1	182.0	177.7	2.36
	2	745.5	731.0	1.95
	3	1,174.7	1,157.7	1.45
	4	1,635.1	1,616.6	1.13
Hinged - clamped	1	255.2	248.8	2.51
	2	874.8	862.5	1.41
	3	1,176.3	1,158.7	1.50
	4	1,808.8	1,787.5	1.18
Clamped - clamped	1	336.9	328.9	2.37
	2	1,012.6	992.9	1.95
	3	1,176.7	1,161.8	1.27
	4	1,987.5	1,964.0	1.18

* Error (%) = |1 - SAP 2000 / This study| × 100

Table 2 Effects of end constraint on frequency parameter C_i^*

Taper type	End constraint**	Frequency parameter C_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
Linear	H-H	0.118	0.489	1.123	1.467
	H-C	0.170	0.593	1.273	1.471
	C-C	0.231	0.706	1.409	1.503
Parabolic	H-H	0.119	0.497	1.120	1.466
	H-C	0.168	0.592	1.261	1.467
	C-C	0.224	0.695	1.407	1.472
Sinusoidal	H-H	0.119	0.494	1.118	1.447
	H-C	0.167	0.590	1.261	1.449
	C-C	0.224	0.696	1.402	1.462

* $f = 0.1, d = 1.5, u = 0.4, \beta = 0.05$

** H: hinged, C: clamped

Table 3 Effects of elasticity ratio u on frequency parameter C_i^*

Condition	u	Frequency parameter C_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
Linear taper, H-H	0.35	0.117	0.487	1.117	1.389
	0.40	0.118	0.489	1.123	1.467
	0.45	0.119	0.490	1.128	1.542
	0.50	0.120	0.490	1.131	1.614
Parabolic taper, H-C	0.35	0.167	0.590	1.254	1.388
	0.40	0.168	0.592	1.261	1.467
	0.45	0.169	0.593	1.266	1.543
	0.50	0.169	0.594	1.270	1.615
Sinusoidal taper, C-C	0.35	0.223	0.693	1.351	1.426
	0.40	0.224	0.696	1.402	1.462
	0.45	0.225	0.698	1.418	1.526
	0.50	0.225	0.700	1.426	1.595

* $f = 0.1, d = 1.5, \beta = 0.05$

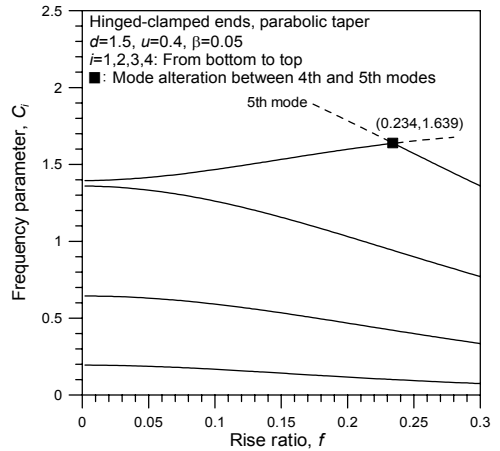


Fig. 5 $C_i - f$ curve

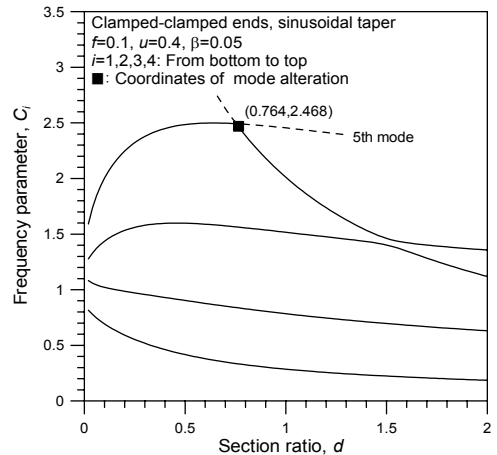


Fig. 6 $C_i - d$ curves

고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸다. 제 1, 2모드의 고유진동수 곡선은 d 가 증가함에 따라 C_i 는 감소한다. 제 3, 4모드의 고유진동수 곡선은 d 가 증가함에 따라 C_i 는 증가하다 최대치를 보인 후에 다시 감소한다. 따라서 C_i 가 최대가 되는 d 값을 적당히 선택하면 동적으로 강인한 곡선보를 설계할 수 있다. ■로 표시한 좌표 (0.764, 2.468)에서 모드변환이 발생한다.

Fig. 7은 회전-회전, 직선 변단면, $f=0.1, d=1.5, u=0.4$ 인 곡선보의 체적비 β 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸다. β 가 증가하면 일정체적을 갖는 곡선보는 단면강성이 커지기 때문에

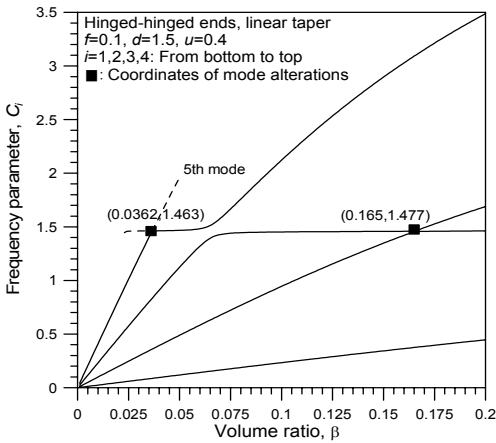


Fig. 7 $C_i - \beta$ curves

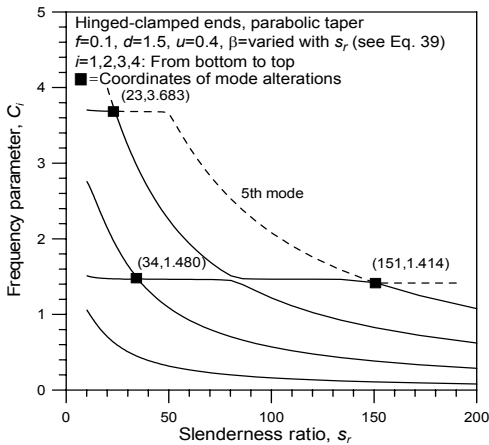


Fig. 8 $C_i - s_r$ curves

당연히 C_i 는 커진다. $\beta = 0$ 이면 곡선보의 체적이 “0”이므로 C_i 값은 모두 “0”이다. ■로 표시한 좌표들에서 모드변환이 발생한다.

Fig. 8은 회전-고정, 포물선 변단면, $f=0.1$, $d=1.5$, $u=0.4$ 인 곡선보의 세장비 s_r 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸다. s_r 이 증가하면 C_i 는 감소한다. s_r 이 증가함에 따라 C_1 값은 수평선에 접근하는 경향이 있다. ■로 표시한 좌표들에서 모드변환이 발생하고 있다.

5. 결 론

이 논문은 원형단면을 갖는 일정체적 원호형 곡

선보의 자유진동에 관한 연구이다. 단면반경의 변단면 함수를 선형, 포물선, 정현 함수로 채택하였으며, 곡선보의 체적은 일정하다. 이러한 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 무차원 고유진동수를 산출하였다. 이 연구의 수치해석 결과를 분석하여 얻어진 결론을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 무차원 고유진동수 C_i 값은 고정-고정>회전-고정>회전-회전 지점의 순서로 크다.
- (2) 높이비 f 가 증가하면 C_i 는 감소하는 경향이 있지만 모드변화가 발생하는 구간에서는 오히려 증가하는 구간도 있다.
- (3) 세장비 s_r 이 증가하면 C_i 는 감소한다.
- (4) 탄성계수 비 u 및 체적비 β 가 증가하면 C_i 는 증가한다.
- (5) 단면비 d 가 증가하면 C_i 는 감소하는 경향이 있지만, d 값의 특정 구간에서는 C_i 값이 증가하다 최대치를 보인 후에 다시 감소하는 구간이 있다.

이 연구는 “원형단면 원호형 곡선보”로 연구범위를 국한하였으나 “정다각형단면 변화곡률 곡선보”에 대한 연구범위로 확장하고, 이에 대한 수치해석 결과를 분석하여 동적 최적단면을 갖는 단면형상 및 변화곡률을 결정하는 후속연구가 필요하다.

후 기

이 논문은 2008년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업 연구이며(KRF-2008-313-D01036), 연구비를 지원해 준 재단당국에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Haftka, R. T., Grūdal, Z. and Kamat, M. P., 1990, Elements of Structural Optimization, Kluwer Academic Publisher, Netherlands.
- (2) Lee, B. K. and Oh, S. J., 2000, Elastica and Buckling Loads of Simple Tapered Columns with Constant Volume, International Journal of Solids and

Structures, Vol. 37, Issue 18, pp. 2507~2518.

(3) Keller, J. B., 1960, The Shape of Strongest Column, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 5, pp. 275~285.

(4) Park, J. S., 2010, Minimum Weight Beams with Shear Strain Energy, Master Thesis, Graduate School of Industry and Business, Wonkwang University, Korea.

(5) Lee, B. K., Oh, S. J. and Lee, T. E., 2009, Strongest Static Arches with Constant Volume, Transactions of the Korea Society for Civil Engineering, Vol. 29, No. 5A, pp. 477~486.

(6) Lee, B. K., Lee, T. E., Yoon, H. M. and Choi, J. M., 2010, Free Vibrations of Tapered Circular Arches with Constant Volume, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 20, No. 2, pp. 144~152.

(7) Gupta, A. K. and Howson, W. P., 1994, Exact Natural Frequencies of Plane Structures Composed of Slender Curved Member, Journal of Sound and Vibration, Vol. 175, No. 2, pp. 145~157.

(8) Howson, W. P., Jemah, A. K. and Zhou, J. Q., 1995, Exact Natural Frequencies for Out-of-plane Motion of Plane Structures Composed of Curved Beam Member, Computers & Structures, Vol. 55, No. 6, pp. 989~995.

(9) Kang, K. Z., Bert, C. W. and Striz, A. G., 1996, Vibration Analysis of Horizontally Curved Beams with Warping Using DQM, Journal of Structural Engineering- ASCE, Vol. 122, No. 6, pp. 657~662.

(10) Wang, T. M. and Guilbert, M. P., 1981, Effects of Rotatory Inertia and Shear on Natural Frequencies of Continuous Circular Curved Beams, International Journal of Solids and Structures, Vol. 17, No. 3, pp. 281~289.

(11) Issa, M. S., Wang, T. M. and Hsiao, B. T., 1987, Extensional Vibrations of Continuous Circular Curved Beams with Rotatory Inertia and Shear Deformation I: Free Vibration, Journal of Sound and Vibration, Vol. 114, No. 2, pp. 297~308.

(12) Gendy, A. S. and Saleeb, A. F., 1994,

Vibration Analysis of Coupled Extensional/Flexural/Torsional Modes of Curved Beams with Arbitrary Thin-walled Sections, Journal of Sound and Vibration, Vol. 174, No. 2, pp. 261~274.

(13) Kawakami, M., Sakiyama, H., Matuda, H. and Morita, C., 1995, In Plane and Out-of-plane Free Vibrations of Curved Beams with Variable Section, Journal of Sound and Vibration, Vol. 187, No. 3, pp. 381~401.

(14) Lee, B. K., Lee, T. E., Carr, A. J. and Oh, S. J., 2007, Out-of-plane Free Vibrations of Circular Strips with Variable Breadth, International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 7, No. 3, pp. 403~423.

(15) Wang, T. M., 1975, Fundamental Frequency of Clamped Elliptic Arcs for Vibration Outside the Plane of Initial Curvature, Journal of Sound and Vibration, Vol. 42, No. 4, pp. 515~519.

(16) Takahashi, S. and Suzuki, K., 1977, Vibrations of Elliptic Arc Bar Perpendicular to Their Plane, Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 20, pp. 1409~1426.

(17) Scott, J. F. and Woodhouse, J., 1992, Vibration of an Elastic Strip with Varying Curvature, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Physical Science and Engineering, Vol. 339, pp. 587~625.

(18) Lee, B. K., Oh, S. J., Mo, J. M. and Lee, T. E., 2008, Out-of-plane Free Vibrations of Curved Beams with Variable Curvature, Journal of Sound and Vibration, Vol. 318, Issues 1-2, pp. 227~246.

(19) Wang, T. M. and Brannen, W. F., 1982, Out-of-plane Vibrations of Curved Beams on Elastic Foundation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 84, No. 2, pp. 241~246.

(20) Lee, B. K., Oh, S. J. and Park, K. K., 2002, Free Vibrations of Shear Deformable Circular Curved Beams Resting on an Elastic Foundation, International Journal Structural Stability and Dynamics, Vol. 2, No. 1, pp. 77~97.

(21) Issa, M. S., Nasr, M. E. and Naiem, M. A., 1990, Free Vibrations of Curved Timoshenko Beams

on Pasternak Foundations. International Journal of Solids and Structures, Vol. 26, No. 4, pp. 1243~1252.

(22) Borg, S. F. and Gennaro, J. J., 1959, Advanced Structural Analysis, Van Nostrand, USA.

(23) Chopra, A. K., 2001, Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Inc., USA.

(24) Shu, C., 2000, Differential Quadrature and Its Application in Engineering, Springer Verlag, UK.

(25) Carnahan, B., Luther, H. A. and Wilkes, J. O., 1969, Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons, USA.

(26) Lee, B. K., Oh, S. J., Li, G. and Choi, K. M., 2003, Free Vibration Analysis of Parabolic Arches in Cartesian Coordinates, International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 3, No. 3, pp. 377~390.