

자기장 및 열하중을 받는 복합재료 판의 동적 특성

Dynamic Characteristics of Composite Plates Subjected to Electromagnetic and Thermal Fields

김 성 균*. 이 근 우*. 문 제 권*. 최 중 운**.
김 영 준***. 박 상 윤***. 송 오 섭†

Sung-Kyun Kim, Kune-Woo Lee, Jei-Kwon Moon, Jong-Woon Choi,
Young-Jun Kim, Sang-Yun Park and Ohseop Song

(2011년 3월 22일 접수 ; 2011년 5월 16일 심사완료)

Key Words : Composite Plate(복합재료 평판), Dynamic Characteristics(동특성), Electromagnetic Field(자기장), Transverse Shear Deformation(횡전단변형), Extended Galerkin Method(확장된 Galerkin 방법)

ABSTRACT

Structural model of laminated composite plates based on the first order shear deformable plate theory and subjected to a combination of magnetic and thermal fields is developed. Coupled equations of motion are derived via Hamilton's principle on the basis of electromagnetic equations (Faraday, Ampere, Ohm, and Lorentz equations) and thermal ones which are involved in constitutive equations. In order to reveal the implications of a number of geometrical and physical features of the model, free vibration of a composite plate immersed in a transversal magnetic field and subjected to a temperature gradient is considered. Special coupling effects between the magnetic-thermal-elastic fields are revealed in this paper.

기 호 설 명

B, B₀, b : 자속밀도벡터

E, E₀, e : 전기벡터

f : 로렌츠 힘 벡터

H, H₀, h : 자기벡터

J, J₀, j : 전류밀도벡터

$2h$: 평판 두께

β_1, β_2 : 횡전단변형률

ℓ_1, ℓ_2 : 평판의 길이

μ_0 : 진공 중에서의 투자율

N_L : 복합재료 적층판의 층 개수

φ, ψ : 미소변형 전기장의 e_1, e_2 항

$\rho_0^{(k)}$: k 번째 층의 밀도

τ : 무차원 시간

Θ : 온도 변화량

θ : 섬유각

V_i, v_i : 3D, 2D변위 성분

χ : 미소변형 자기장의 h_3 항

z_k : 원점에서 k 번째 층의 바닥까지 좌표

$M_0 [g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} / N_L$

† 교신저자; 정회원, 충남대학교 기계공학과
E-mail : songos@cnu.ac.kr
Tel : (042)821-5650, Fax : (042)822-5642

* 한국원자력연구원

** (주)한화 종합연구소

*** 충남대학교 대학원

이 논문의 일부는 2011년 춘계 소음진동 학술대회에서 발표되었음.

$$M_2[g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} (z_{i+1}^2 + z_{i+1}z_i + z_i^2) / (3N_L)$$

1. 서 론

복합재료는 높은 비강도 및 비강성, 내부식성, 우수한 피로수명, 낮은 열팽창률 등의 장점으로 인하여 극한 운전조건에서도 구조적 강성을 유지해야 하는 항공우주 및 원자력분야 및 일반산업분야인 기계, 건축, 토목 분야에서도 널리 적용되고 있다.

최근 탄성-열-자기-전기 등의 상호 연성을 고려하여 설계해야 되는 구조물 형태가 출현하고 있으며 그 예로서 ITER(international thermal-nuclear experimental reactor)⁽¹⁾를 들 수 있다. ITER는 전세계 7개국이 공동으로 개발하고 있는 핵융합 실험로를 말한다. 핵융합로 내에서는 수소와 같은 가벼운 원자핵들을 플라즈마 상태에서 무거운 헬륨 원자핵으로 바꾸어 핵융합 반응을 일으킨다. 이때 노 내에서 수소 원자핵들이 반발력을 상실하고 상호 핵융합 반응을 일으키기 위해 플라즈마를 약 1억 °C까지 가열하며, 또한 가열된 플라즈마를 안정적으로 유지하기 위해 초전도 자석으로 플라즈마 주위에 자기장을 형성한다. 이와 같은 구조물은 탄성뿐만 아니라 탄성-열-자기-전기 등이 상호 연성된 구조물이라 할 수 있으며 이를 설계하기 위해서는 반드시 상호 연성을 고려해서 설계가 이루어져야 한다.

이와 관련된 연구동향으로 Anandkumar⁽²⁾는 자기-전기-탄성이 연성된 복합재료 보의 자유진동 해석을 수행하였으며, Ramirez와 Pan^(3,4)은 자기-전기-탄성이 연성된 복합재료 평판의 자유진동 해석을 수행하였다. 또한 Bhangale와 Qin^(5,6)은 자기-전기-탄성이 연성된 원통셀의 자유진동 해석을 수행하였다. Hasanyan과 Qin 등^(7,8)은 판의 한 방향의 길이가 무한대인 경우에 대하여 탄성-열-전자기 상호 연성된 판 구조물에 관한 연구를 수행하였다.

이 연구에서는 가로 세로 방향으로 유한한 길이를 갖는 복합재료 평판에 온도 구배와 임의의 방향의 자기장이 가해질 때의 일반적인 운동방정식 및 경계조건을 유도하였다. 그리고 수치해석 대상으로서 자기장 및 온도 구배가 수직방향일 때, 온도 구배와 자기장의 세기가 자유진동특성에 미치는 영향에 대하여 고찰하였다. 이 연구를 통하여 자기장에 의하여

발생되는 감쇠 효과, 온도 차이에 의한 강성의 변화 및 섬유각에 따른 구조연성효과를 고찰하였다.

2. 운동방정식

2.1 기초방정식

(1) 변위장(displacement field)

Fig. 1과 같이 평판의 중심을 원점으로 하는 (x_1, x_2, x_3) 좌표계를 설정하고 섬유각 θ 를 정의하였다. 복합재료 평판의 모델링을 위해 다음과 같이 가정하였다.

- (a) 각 복합재료 층들은 서로 완전히 접촉되어 있으며 각 층의 두께는 모두 동일하다.
- (b) 횡단단변형률을 고려한다.
- (c) 모든 변형은 선형으로 가정한다.

Fig. 2는 평판 단면의 변형 전·후의 형상을 나타

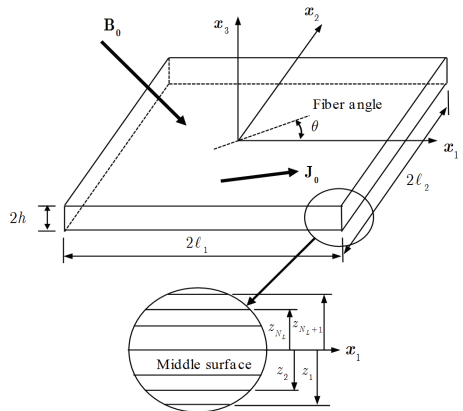


Fig. 1 Geometry of laminated composite plate

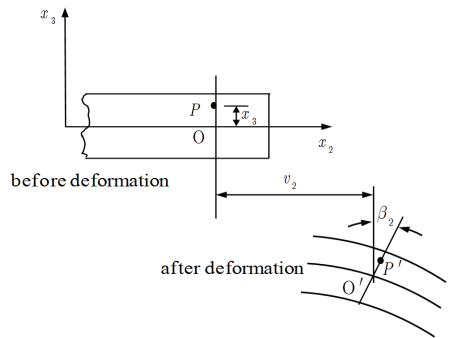


Fig. 2 Deformation variables for a rectangular plate

내고 있다. 상기 가정을 기초로 변위장을 중립면에 대한 변위장으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V_1(x_1, x_2, x_3, t) = v_1(x_1, x_2, t) + x_3 \beta_1(x_1, x_2, t) \quad (1a)$$

$$V_2(x_1, x_2, x_3, t) = v_2(x_1, x_2, t) + x_3 \beta_2(x_1, x_2, t) \quad (1b)$$

$$V_3(x_1, x_2, x_3, t) = v_3(x_1, x_2, t) \quad (1c)$$

여기서 v_1, v_2, v_3 는 x_1, x_2, x_3 방향의 중립면에서의 변위, β_1, β_2 는 x_2, x_1 축 방향의 회전각을 나타낸다.

식 (1)로부터 변형률을 구하면 다음과 같다.

$$\epsilon_{11} = V_{,11} = v_{,11} + x_3 \beta_{,11} \quad (2a)$$

$$\epsilon_{22} = V_{,22} = v_{,22} + x_3 \beta_{,22} \quad (2b)$$

$$\gamma_{12} = V_{,12} + V_{,21} = v_{,12} + v_{,21} + x_3 (\beta_{,12} + \beta_{,21}) \quad (2c)$$

$$\gamma_{13} = V_{,13} + V_{,31} = \beta_1 + v_{,31} \quad (2d)$$

$$\gamma_{23} = V_{,23} + V_{,32} = \beta_2 + v_{,32} \quad (2e)$$

여기서 $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot) / \partial x_i$.

(2) 전자기장(electromagnetic field)

전기장 및 자기장 방정식은 일반화된 맥스웰 방정식으로부터 유도된다. 미소 변형된 전자기장에서의 맥스웰 방정식은 다음과 같다. 식 (3c)를 통해 전자기와 변위가 서로 연성되는 항이 생성되며 운동방정식의 외력으로 작용하게 된다.

$$\text{패러데이 법칙 } \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (3a)$$

$$\text{앙페르 법칙 } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3b)$$

$$\text{옴의 법칙 } \mathbf{J} = \mathbf{G}(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{V}} \times \mathbf{B}) \quad (3c)$$

$$\text{로렌츠 힘 } \mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (3d)$$

위 식에서 \mathbf{f} 는 단위 체적당 로렌츠 힘, μ_0 는 진공중에서의 투자율을 나타낸다. 그리고 \mathbf{G} 는 전기전도도 행렬을 의미하며 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 $g_{11} = g_1 \cos^2 \theta + g_2 \sin^2 \theta, g_{33} = g_3, g_{22} = g_2 \cos^2 \theta + g_1 \sin^2 \theta, g_{12} = (g_1 - g_2) \sin \theta \cos \theta$ 이며 $g_i (i=1,2,3)$ 는 각각 섬유방향 및 섬유방향과 수직인 방향의 전기전도율을 나타낸다.

평판이 미소 변형하고 전자기장이 선형으로 변화한다고 가정할 때 전계, 자계 및 자속밀도는 다음과 같이 1차 값과 미소 값으로 나누어 표현할 수 있다.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{e}, \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{b}$ 는 각각 미소 전계, 자계 및 자속밀도 벡터를 나타낸다.

수평방향 전계벡터 e_1, e_2 와 수직방향 자계벡터 h_3 는 각각 전계 및 자계의 경계조건⁽⁹⁾으로부터 x_3 와 무관하다. 편의상 전계벡터 e_1, e_2 와 h_3 를 하첨자가 없는 변수로서 다음과 같이 표현한다.

$$e_1 \equiv e_1(x_1, x_2, t) \equiv \varphi(x_1, x_2, t) \quad (6a)$$

$$e_2 \equiv e_2(x_1, x_2, t) \equiv \psi(x_1, x_2, t) \quad (6b)$$

$$h_3 \equiv h_3(x_1, x_2, t) \equiv \chi(x_1, x_2, t) \quad (6c)$$

2.2 전자기-열-탄성 연성 운동방정식

(1) 구성방정식(constitutive equations)

섬유강화 복합재료 구조물은 일반적으로 구조좌표계(body coordinates)와 물질좌표계(material coordinates)가 상이하다. 좌표변환을 통하여 구조좌표계 (x_1, x_2, x_3) 에 대하여 다음과 같이 온도 구배를 고려한 구성방정식을 정의할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{11} \\ \bar{\alpha}_{22} \\ \bar{\alpha}_{12} \end{bmatrix} \Theta \quad (7a)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{23} \\ S_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (7b)$$

여기서 $\bar{Q}_{ij} (i, j = 1, 2, 6)$ 를 환산탄성계수, $\bar{\alpha}_{\alpha\beta}$ 는 환산 열팽창계수를 뜻한다.

(2) 운동방정식

식 (1), (2)와 식 (7)을 아래의 Hamilton 원리식에

대입하여 운동방정식을 유도한다⁽¹⁰⁾.

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_0}^{t_1} [T - U + W_e] dt = 0 \quad (8)$$

$$\textcircled{a} t = t_0, t_1 : \delta v_i = \delta \beta_\alpha = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \quad \alpha = 1, 2)$$

여기서 T, U, W_e 는 각각 운동에너지, 탄성에너지, 외력을 나타내며 그 변분과 가상일은 다음과 같다.

$$\delta T = \int_{\Omega} \int_{-h}^h \rho \dot{V}_i \delta \dot{V}_i d\Omega dx_3 \quad (9a)$$

$$\delta U = \int_{\Omega} \int_{-h}^h [S_{ij} \delta \varepsilon_{ij}] d\Omega dx_3 \quad (9b)$$

$$\delta W_e = \int_{\tau} \rho f_i \delta V_i d\tau + \int_{\Omega} \sigma_i \delta V_i d\Omega \quad (9c)$$

식(9)에서 \dot{V}_i 는 식(1)의 변위의 시간 미분, ρ 는 재료의 밀도, S_{ij} 는 식(7)의 응력, ε_{ij} 는 변형률, f_i 는 체적력인 로렌츠 힘 벡터(Lorentz force vector), σ_i 는 표면력(surface traction vector)를 나타낸다.

Hamilton 원리를 이용하여 유도한 운동방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\delta v_i : N_{i11} + N_{i22} - m_i \ddot{v}_i + \sigma_{i3} \Big|_{-}^{+} + \int_{-h}^h f_i dx_3 = 0 \quad (10a)$$

$$\delta \beta_\alpha : M_{\alpha 11} + M_{\alpha 22} - N_{\alpha 3} - m_3 \ddot{\beta}_\alpha + h \sigma_{\alpha 3} \Big|_{-}^{+} + \int_{-h}^h x_3 f_\beta dx_3 = 0 \quad (10b)$$

$$(i = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2)$$

경계조건 ($i = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2$; *not summation index*)

$$\textcircled{a} x_1 = \pm \ell_1$$

$$\delta v_i : (-N_{1i} + N_{2i}) \delta v_i = 0 \quad (10c)$$

$$\delta \beta_\alpha : (-M_{1\alpha} + M_{2\alpha}) \delta \beta_\alpha = 0$$

$$\textcircled{a} x_2 = \pm \ell_2$$

$$\delta v_i : (-N_{2i} + N_{1i}) \delta v_i = 0 \quad (10d)$$

$$\delta \beta_\alpha : (-M_{2\alpha} + M_{1\alpha}) \delta \beta_\alpha = 0$$

식(10)의 합응력과 합모멘트는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &\equiv \int_{-h}^h S_{\alpha\beta} dx_3, \quad N_{\alpha 3} \equiv \int_{-h}^h S_{\alpha 3} dx_3, \\ M_{\alpha\beta} &\equiv \int_{-h}^h x_3 S_{\alpha\beta} dx_3 \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \end{aligned} \quad (11)$$

식(10a, b)에서 로렌츠 힘 f_i 와 로렌츠 힘을 정의하는데 필요한 유도전류 j_i 는 식(1), (4~6)을 식(3)에 대입하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$f_1 = J_{02} B_{03} + J_{02} b_3 + (j_2 B_{03} - j_3 B_{02}) \quad (12a)$$

$$f_2 = -J_{01} B_{03} - J_{01} b_3 + (j_3 B_{01} - j_1 B_{03}) \quad (12b)$$

$$f_3 = (J_{01} B_{02} - J_{02} B_{01}) + (J_{01} b_2 - J_{02} b_1) + (j_1 B_{02} - j_2 B_{01}) \quad (12c)$$

$$\begin{aligned} j_1 &= \left\{ g_{11}^{(i)} (\varphi + \dot{v}_2 B_{03}^0 - \dot{v}_3 B_{02}^0) + g_{12}^{(i)} (\psi + \dot{v}_3 B_{01}^0 - \dot{v}_1 B_{03}^0) \right\} \\ &+ x_3 \left\{ g_{11}^{(i)} (\dot{v}_2 B_{03}^1 + \dot{\beta}_2 B_{03}^0 - \dot{v}_3 B_{02}^1) \right. \\ &+ g_{12}^{(i)} (\dot{v}_3 B_{01}^1 - \dot{v}_1 B_{03}^1 - \dot{\beta}_1 B_{03}^0) \left. \right\} \\ &+ x_3^2 \left\{ g_{11}^{(i)} \dot{\beta}_2 - g_{12}^{(i)} \dot{\beta}_1 \right\} B_{03}^1 \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} j_2 &= \left\{ g_{12}^{(i)} (\varphi + \dot{v}_2 B_{03}^0 - \dot{v}_3 B_{02}^0) + g_{22}^{(i)} (\psi + \dot{v}_3 B_{01}^0 - \dot{v}_1 B_{03}^0) \right\} \\ &+ x_3 \left\{ g_{12}^{(i)} (\dot{v}_2 B_{03}^1 + \dot{\beta}_2 B_{03}^0 - \dot{v}_3 B_{02}^1) \right. \\ &+ g_{22}^{(i)} (\dot{v}_3 B_{01}^1 - \dot{v}_1 B_{03}^1 - \dot{\beta}_1 B_{03}^0) \left. \right\} \\ &+ x_3^2 \left\{ g_{12}^{(i)} \dot{\beta}_2 - g_{22}^{(i)} \dot{\beta}_1 \right\} B_{03}^1 \end{aligned} \quad (13b)$$

식(13)을 식(12)에 대입하고 이를 식(10)의 로렌츠 힘에 대한 적분을 수행하여 합응력과 합모멘트를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h f_1 dx_3 &= 2h J_{02} B_{03}^0 + 2h J_{02} \mu_0 \chi \\ &+ B_{03}^0 \int_{-h}^h j_2 dx_3 + B_{03}^1 \int_{-h}^h x_3 j_2 dx_3 \\ &- B_{02}^0 \int_{-h}^h j_3 dx_3 - B_{02}^1 \int_{-h}^h x_3 j_3 dx_3 \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h f_2 dx_3 &= -2h J_{01} B_{03}^0 - 2h J_{01} \mu_0 \chi \\ &+ B_{01}^0 \int_{-h}^h j_3 dx_3 - B_{03}^0 \int_{-h}^h j_1 dx_3 \\ &+ B_{01}^1 \int_{-h}^h x_3 j_3 dx_3 - B_{03}^1 \int_{-h}^h x_3 j_1 dx_3 \end{aligned} \quad (14b)$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h x_3 f_1 dx_3 &= \frac{2h^3}{3} J_{02} B_{03}^1 + B_{03}^0 \int_{-h}^h x_3 j_2 dx_3 \\ &+ B_{03}^1 \int_{-h}^h x_3^2 j_2 dx_3 - B_{02}^0 \int_{-h}^h x_3 j_3 dx_3 \\ &- B_{02}^1 \int_{-h}^h x_3^2 j_3 dx_3 \end{aligned} \quad (14c)$$

$$\int_{-h}^h x_3 f_2 dx_3 = -\frac{2h^3}{3} J_{01} B_{03}^1 + B_{01}^0 \int_{-h}^h x_3 j_3 dx_3 + B_{01}^1 \int_{-h}^h x_3^2 j_3 dx_3 - B_{03}^0 \int_{-h}^h x_3 j_1 dx_3 - B_{03}^1 \int_{-h}^h x_3^2 j_1 dx_3 \quad (14d)$$

2.3 자기장이 수직으로 작용할 때 운동방정식

(1) 운동방정식

평판의 4변이 모두 단순지지 경계조건이고, 평판에 수직한 방향으로 온도 구배와 자기장이 작용할 때의 운동방정식과 경계조건을 다음과 같이 변위의 함수로 유도하였다.

$$A_{45}(\beta_{2,1} + v_{3,12}) + A_{55}(\beta_{1,1} + v_{3,11}) + A_{44}(\beta_{2,2} + v_{3,22}) + A_{45}(\beta_{1,2} + v_{3,12}) - A_{11}^\alpha \Theta v_{3,11} - 2A_{12}^\alpha \Theta v_{3,12} - A_{22}^\alpha \Theta v_{3,22} - I_0 \ddot{v}_3 = 0 \quad (15a)$$

$$D_{11} \beta_{1,11} + D_{12} \beta_{2,12} + D_{16}(\beta_{1,12} + \beta_{2,11}) + D_{16} \beta_{1,12} + D_{26} \beta_{2,22} + D_{66}(\beta_{1,22} + \beta_{2,12}) - A_{45}(\beta_2 + v_{3,2}) - A_{55}(\beta_1 + v_{3,1}) - I_2 \ddot{\beta}_1 + (B_{03}^0)^2 C_{12}^g \dot{\beta}_2 - (B_{03}^0)^2 C_{22}^g \dot{\beta}_1 = 0 \quad (15b)$$

$$D_{16} \beta_{1,11} + D_{26} \beta_{2,12} + D_{66}(\beta_{1,12} + \beta_{2,11}) + D_{21} \beta_{1,12} + D_{22} \beta_{2,22} + D_{26}(\beta_{1,22} + \beta_{2,12}) - A_{44}(\beta_2 + v_{3,2}) - A_{45}(\beta_1 + v_{3,1}) - I_2 \ddot{\beta}_2 - (B_{03}^0)^2 C_{11}^g \dot{\beta}_2 + (B_{03}^0)^2 C_{12}^g \dot{\beta}_1 = 0 \quad (15c)$$

경계조건

$$\begin{aligned} @x_1 = \pm \ell_1, \\ v_3 = \beta_2 = 0 \\ D_{11} \beta_{1,11} + D_{12} \beta_{2,22} + D_{16}(\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) = 0 \\ @x_2 = \pm \ell_2 \\ v_3 = \beta_1 = 0 \\ D_{16} \beta_{1,11} + D_{26} \beta_{2,22} + D_{66}(\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) = 0 \end{aligned}$$

여기서 $C_{\alpha\beta}^g \equiv 2hM_2[g_{\alpha\beta}]$, $\bar{g}_{\alpha\beta} \equiv M_0[g_{\alpha\beta}]$, $(\alpha, \beta) = 1, 2$

(2) 무차원 운동방정식

앞에서 유도한 운동방정식을 무차원화하기 위해 식(16)과 같은 무차원변수를 사용하였다. 또한 식

(17)에서 $\Psi_v^T(\xi_1, \xi_2)$ 은 경계조건을 만족하는 무차원 변위 근사함수를 나타내며, 확장된 Galerkin 방법을 사용하여 식(17)을 Hamilton 원리식에 대입하여 식(18)과 같은 이산화된 운동방정식을 유도하였다.

$$\xi_1 \equiv x_1/\ell_1, \xi_2 \equiv x_2/\ell_2, \tau \equiv t \sqrt{\frac{D_{11}}{I_0 \ell_1^4}}, \bar{v}_3 \equiv v_3/h, \bar{\Theta} = \frac{\Theta \alpha_0 \ell_1^2}{h^2}, \bar{B}_{03}^0 = B_{03}^0 \sqrt{\frac{g_0 h}{\sqrt{\rho_0 E_0}}} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_3 &= \Psi_v^T(\xi_1, \xi_2) \mathbf{q}_v(\tau), \\ \bar{\beta}_1 &= \Psi_{\beta_1}^T(\xi_1, \xi_2) \mathbf{q}_{\beta_1}(\tau), \\ \bar{\beta}_2 &= \Psi_{\beta_2}^T(\xi_1, \xi_2) \mathbf{q}_{\beta_2}(\tau) \end{aligned} \quad (17)$$

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (18)$$

$[\mathbf{M}], [\mathbf{C}], [\mathbf{K}]$ 행렬의 요소들은 부록에 명시하였다. 식(18)을 다음과 같이 상태방정식으로 변환하였다.

$$[\mathbf{M}^*]\{\dot{\boldsymbol{\eta}}\} + [\mathbf{K}^*]\{\boldsymbol{\eta}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (19)$$

$$\text{여기서 } [\mathbf{M}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, [\mathbf{K}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$$

식(19)의 벡터 $\boldsymbol{\eta}$ 를 다음과 같이 변수 분리한다.

$$\boldsymbol{\eta} = e^{\lambda \tau} \mathbf{Z} \quad (20)$$

여기서 λ 는 복소 고유치이고, \mathbf{Z} 는 모드형상을 나타내는 벡터이다. 식(20)을 식(19)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\lambda[\mathbf{M}^*]\{\mathbf{Z}\} + [\mathbf{K}^*]\{\mathbf{Z}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (21)$$

3. 수치해석

이 연구의 수치해석에 사용한 재료의 물성치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_1 / E_0 = 10, E_2 / E_0 = 5, G_{12} / E_0 = 4, \\ G_{13} / E_0 = 2, \mu_{12} = \mu_{23} = \mu_{13} = 0.25, \alpha_1 / \alpha_0 = 0.1, \end{aligned}$$

$$\alpha_2 / \alpha_0 = 2, \alpha_3 / \alpha_0 = 1, E_0 = 10^{10} \text{ N/m}^2, \alpha_0 = 10^{-3},$$

$$g_0 = 10^8 \text{ S/m}^3$$

Table 1은 이 연구에서 수행한 해석결과의 검증 을 위해 참고문헌⁽¹¹⁾의 해석결과와 상호 비교하였 다. 표에서 FSDT 모델의 경우 참고문헌 결과와의 최대오차가 0.2%를 넘지 않는 것을 알 수 있으며 이를 통해 이 연구의 해석결과에 대한 신뢰성을 확 인하였다.

Fig. 3은 자기장의 세기 및 온도 변화에 따른 복 합재료 평판의 고유진동수(고유치의 허수부)와 감쇠 (고유치의 실수부) 변화를 나타내고 있다. 그림에서 자기장의 세기가 커질수록 평판의 감쇠가 급격히 증가하고, 고유진동수는 점차 감소하는 것을 알 수 있다. 그 이유는 식 (15), (18)에서 자기장의 세기가 커질수록 운동방정식의 감쇠 행렬 값이 증가하기 때문이다. 또한 온도 구배의 증가와 고유진동수는 상호 반비례관계가 있으며 이는 식 (15a) 및 부록 (A.2)에서 온도 구배에 따라 구조강성의 변화가 수 반되므로 온도 차이가 고유진동수에 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

Fig. 4는 적층방법(stacking sequence)이 다를 때 자기장 세기의 변화에 따른 복합재료 평판의 고유치 변화를 나타내고 있다. 그림에서 적층방법이 [30/-30/30]s일 때가 [90/45/0]s일 때 보다 자기장에 더 민감하게 영향을 받음을 알 수 있으며, 동일 적층방 법에서도 온도에 따라 고유진동수 변화가 크게 다 름을 알 수 있다.

Table 1 Comparison of the natural frequencies[rad/s] with reference⁽¹¹⁾ ([0/90/0]; $E_1=25E_2, G_{12}=G_{13}=0.5E_2, G_{23}=0.2E_2, \nu_{12}=0.25$)

Mode	m	n	Present		Error (%)	Reddy ⁽¹¹⁾		Error (%)
			CPT	CPT		FSDT	FSDT	
1	1	1	280.667	280.076	0.211	279.778	279.304	0.170
1	2	2	421.606	420.712	0.211	420.547	419.774	0.184
1	3	3	742.523	740.942	0.213	740.290	738.845	0.195
2	1	1	1048.346	1046.107	0.213	1034.612	1034.096	0.050
2	2	2	1122.398	1119.993	0.214	1108.381	1107.835	0.049

Figs. 5~7은 두께비 $h/\ell_1 = h/\ell_2$ 의 변화에 따른 TS 모델(transverse shearable model)과 NTS 모델 (non-transverse shearable model)의 고유치의 실수 부와 허수부의 변화를 나타내고 있다. 그림에서 $h/\ell_1=1/50$ 에서는 자기장의 세기가 증가할 때 TS 모델과 NTS모델의 고유진동수 및 감쇠에 큰 차이 가 없음을 알 수 있다. 그러나 h/ℓ_1 비가 증가할수 록 TS 모델과 NTS 모델에서 큰 차이를 보이는 것 을 알 수 있다.

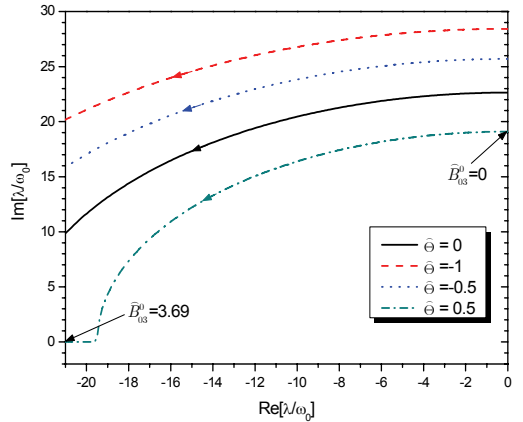


Fig. 3 Root loci of eigenvalues for \hat{B}_{03}^0 ([90/45/0]_s, $h/\ell_1 = h/\ell_2 = 1/50, g_1/g_0 = g_3/g_0 = 3.0, g_2/g_0 = 1.1$)

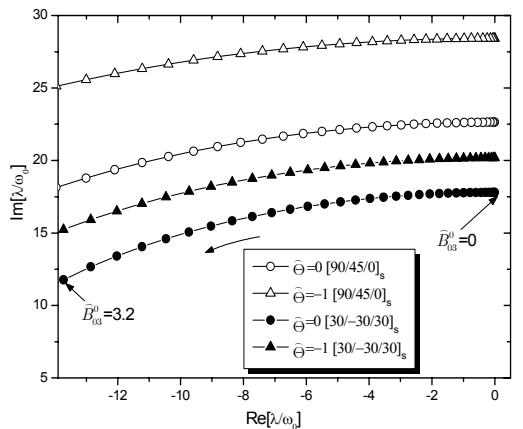


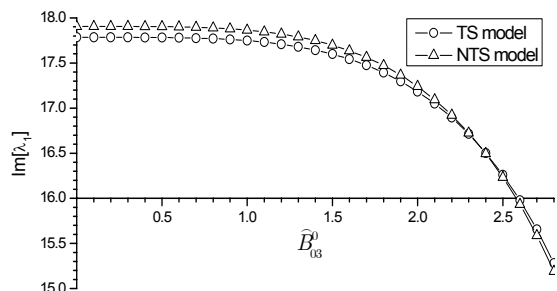
Fig. 4 Root loci of eigenvalues for \hat{B}_{03}^0 , temperature gradient and stacking sequences($h/\ell_1 = h/\ell_2 = 1/50, g_1/g_0 = g_3/g_0 = 3.0, g_2/g_0 = 1.1$)

$h/\ell_1=15$ 이고 자기장의 세기가 0과 2.8일 때를 비교해 보면 TS모델은 고유진동수가 16.5에서 15.9로 3.1% 감소한 반면, NTS모델은 17.6에서 15로 14.7%가 감소하였다. 그리고 자기장의 세기가 2.5 부근에서 TS 모델과 NTS모델에 의한 고유진동수의 역전현상이 일어남을 알 수 있다.

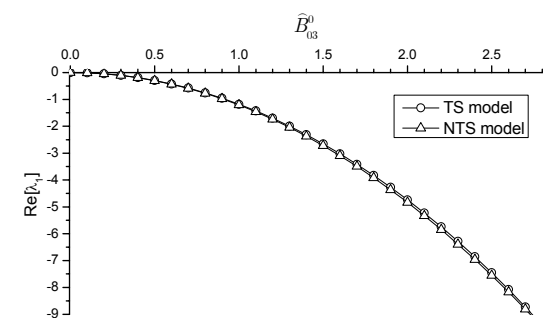
이러한 현상들은 자기장의 세기가 TS모델의 굽힘 및 횡전단변형 감쇠행렬에 미치는 효과보다 NTS모델의 굽힘 감쇠행렬에 영향을 주는 효과가 크기 때문으로 판단된다.

따라서 NTS모델에서 자기장의 세기가 어느 정도 이상으로 커지면 급격한 고유진동수의 감소가 나타남을 알 수 있다. 이 결과를 통해 자기장을 받는 복합재로 평판에서 자기장의 효과와 전단변형효과가 복합적으로 결과에 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

Fig. 8은 자기장의 세기의 변화에 따른 1~3차 고유진동수 및 감쇠 변화를 나타내고 있다. 그림에서 자기장의 세기가 증가함에 따라 1차, 3차 고유진동수는

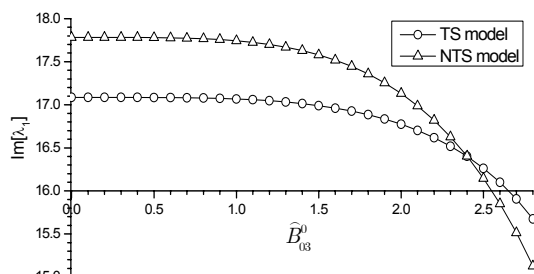


(a) $\text{Im}[\lambda_1]$ vs. \hat{B}_{03}^0

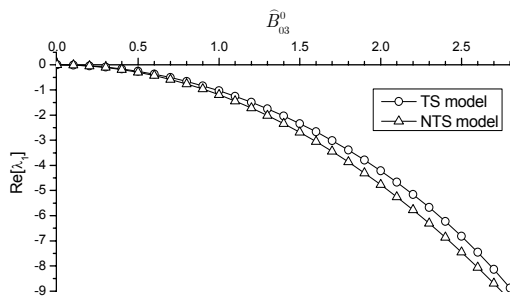


(b) $\text{Re}[\lambda_1]$ vs. \hat{B}_{03}^0

Fig. 5 Variation of fundamental eigenvalue λ_1 with \hat{B}_{03}^0 for TS and NTS models ($[0]_6$, $h/\ell_1 = h/\ell_2 = 1/50$, $g_1/g_0 = g_3/g_0 = 3.0$, $g_2/g_0 = 1.1$)

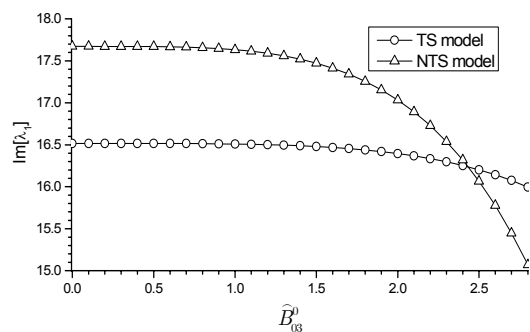


(a) $\text{Im}[\lambda_1]$ vs. \hat{B}_{03}^0

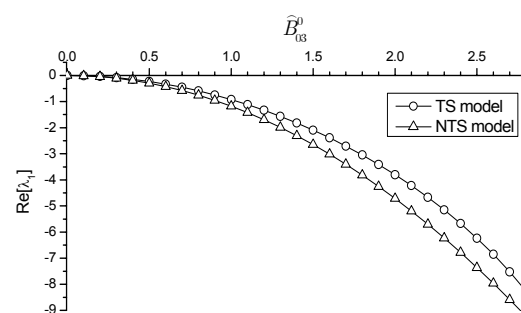


(b) $\text{Re}[\lambda_1]$ vs. \hat{B}_{03}^0

Fig. 6 Counterpart of Fig. 5 for $h/\ell_1 = h/\ell_2 = 1/20$

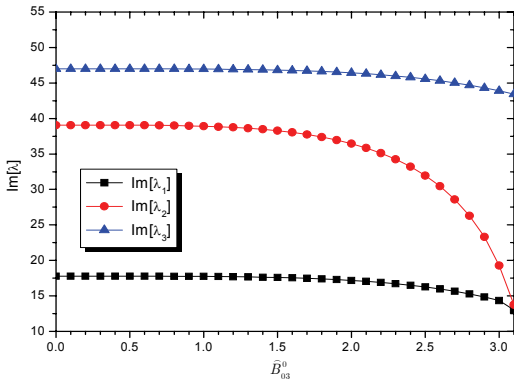


(a) $\text{Im}[\lambda_1]$ vs. \hat{B}_{03}^0

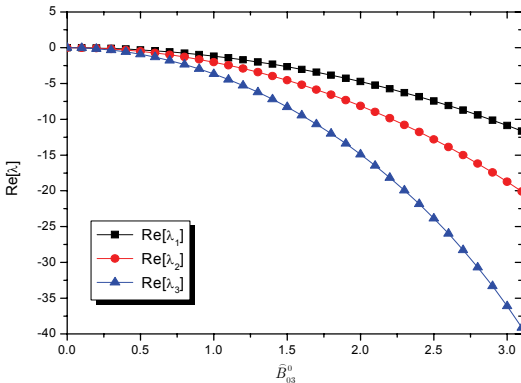


(b) $\text{Re}[\lambda_1]$ vs. \hat{B}_{03}^0

Fig. 7 Counterpart of Fig. 5 for $h/\ell_1 = h/\ell_2 = 1/15$



(a) $\text{Im}[\lambda_i]$



(b) $\text{Re}[\lambda_i]$

Fig. 8 Variation of natural frequencies and damping with \hat{B}_{03}^0 ([0]6, $h/\ell_1 = h/\ell_2 = 1/50$, $g_0 = 10^8 \text{ S/m}^3$, $g_1/g_0 = g_3/g_0 = 3.0$, $g_2/g_0 = 1.1$)

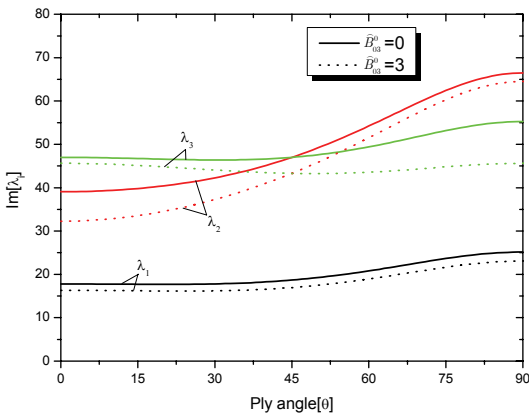


Fig. 9 Variation of natural frequencies with ply angle of stacking sequence $[\theta / -\theta / \theta]_s$ ($h/\ell_1 = h/\ell_2 = 1/50$, $g_1/g_0 = g_3/g_0 = 3.0$, $g_2/g_0 = 1.1$, $g_0 = 10^8 \text{ S/m}^3$)

비슷한 비율로 감소하는 반면, 2차 고유진동수는 자기장의 세기가 2~3 사이에서 급격하게 감소하는 것을 알 수 있다. 이로써 자기장의 세기가 고유 진동수에 미치는 영향이 차수에 따라 그 민감도가 서로 다를 수 있다. 이로써 차수에 따른 진동 모드와 자기장의 상호관련성이 있음을 알 수 있다.

Fig. 9는 $[\theta / -\theta / \theta]_s$ 로 적층된 경우, 섬유각 θ 의 변화에 따른 평판의 고유진동수 변화를 나타내고 있다. 그림에서 1차 고유진동수는 자기장의 유무에 섬유각의 변화에 따라 큰 변화를 보이지 않았다. 그러나 2차 고유진동수는 $\theta=0^\circ$ 부근에서 자기장의 유무에 크게 영향을 받으며, $\theta=90^\circ$ 부근으로 갈수록 자기장의 영향이 점차 약화되는 것을 알 수 있다. 또한 3차 고유진동수의 경우에는 2차 고유진동수와 반대의 경향이 나타남을 알 수 있다. 즉 $\theta=0^\circ$ 부근에서 자기장의 유무에 의해 큰 차이가 발생하지 않는 반면, $\theta=90^\circ$ 부근으로 갈수록 자기장의 유무에 따라 매우 큰 차이가 발생함을 알 수 있다. 이는 섬유각에 따른 구조강성의 차이와 자기장의 세기와 고유진동수 사이의 민감도 차이에 기인하는 것으로 판단된다.

4. 결 론

이 연구에서는 전자기장이 임의의 방향으로 작용하는 경우에 전자기-열-탄성-관성이 연성된 복합재료 평판에 대해 운동방정식과 경계조건을 유도하였다. 수치해석 대상으로서, 수직방향으로 자기장이 작용하는 평판에 대하여 무차원 지배방정식을 유도하고 확장된 Galerkin 방법을 이용하여 해석을 수행하였다. 즉, 자기장 및 온도 구배의 변화에 따른 고유진동수 및 감쇠 변화를 고찰하였으며 자기장의 세기가 평판의 감쇠를 증가시키며 이에 따라 고유진동수가 감소하는 것을 알 수 있었다. 또한 온도 구배에 따라 고유진동수가 크게 차이가 나는 것을 알 수 있는데 이는 온도가 복합재료 평판의 구조강성을 변화시킴으로써 발생하는 현상임을 알 수 있었다. 또한 복합재료의 섬유각에 따른 구조강성의 차이가 자기장 및 온도와 복합적으로 작용하는 것을 확인할 수 있었다. 무차원 지배방정식을 통하여 얻어진 이 연구 결과는 전자기-열-탄성 등이 상호 연성된 복합재료 구조물의 해석 시 유용하게 적용될 수 있을 것으로 판단된다.

후 기

이 논문은 2010년도 교육과학기술부(한국연구재단)의 지원을 받아 수행된 일반연구자지원사업(기본연구)임 (과제번호 2010-0024485).

참 고 문 헌

- (1) <http://www.iter.org>; <http://www.nfri.re.kr>
- (2) Anandkumar, R., Annigeri, N., Ganesan, S., and Swarnamani, S., 2007, Free Vibration Behaviour of Multiphase and Layered Magneto-electro-elastic Beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, No. 1-2, pp. 44~63.
- (3) Ramirez, F., Heyliger, P. H. and Pan, E., 2007, Free Vibration Response of Two-dimensional Magneto-electro-elastic Laminated Plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 292, No. 3-5, pp. 626~644.
- (4) Pan, E. and Heylinger, P. H., 2002, Free Vibrations of Simply Supported and Multilayered Magneto-electro-elastic Plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 252, No. 3, pp. 429~442.
- (5) Bhangale, R. N. and Ganesan, N., 2005, Free Vibration Studies of Simply Supported Non-homogeneous Functionally Graded Magneto-electro-elastic Finite Cylindrical Shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 288, No. 1-2, pp. 412~422.
- (6) Qin, Z., 2010, Magneto-thermo-elasticity of an Electroconductive Circular Cylindrical Shell Featuring Nonlinear Deformations, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 12, pp. 1797~1810.
- (7) Hasanyan, D., Libresu, L., Qin, Z. and Ambur, D. R., 2005, Magneto-thermo-elastokinetics of Geometrically Nonlinear Laminated Composite Plates. Part 1: Foundation of the Theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 287, No. 1-2, pp. 153~175.
- (8) Qin, Z., Hasanyan, D., Libresu, L. and Ambur, D. R., 2005, Magneto-thermo-elastokinetics of Geometrically Nonlinear Laminated Composite Plates, Part 2: Vibration and Wave Propagation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 287, No. 1-2, pp. 177~201.

(9) Kim, S. Y., 2001, *Engineering Electro-magnetics*, Scitech, Seoul.

(10) Kim, S. K. and Yoo, H. H., 2001, Vibration Analysis of Rotating Composite Cantilever Plates, *Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference*, pp. 407~413.

(11) Reddy, J. N., 2004, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis*, 2nd Edition, CRC Press, New York.

부 록

A.1 식 (15)의 인장강성행렬 $A_{ij}, A_{11}^\alpha, A_{12}^\alpha, A_{22}^\alpha$ 및 굽힘강성행렬 D_{ij} , 관성 항 I_0, I_2

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N_L} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k),$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_L} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3)$$

$$A_{11}^\alpha = \sum_{k=1}^{N_L} [A_{11}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)} + A_{12}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)} + A_{16}^{(k)} \alpha_{12}^{(k)}]$$

$$A_{12}^\alpha = \sum_{k=1}^{N_L} [A_{16}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)} + A_{26}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)} + A_{66}^{(k)} \alpha_{12}^{(k)}]$$

$$A_{22}^\alpha = \sum_{k=1}^{N_L} [A_{12}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)} + A_{22}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)} + A_{26}^{(k)} \alpha_{12}^{(k)}]$$

$$I_0 = \sum_{k=1}^{N_L} \rho_0^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \quad I_2 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_L} \rho_0^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3)$$

$\bar{Q}_{ij}^{(k)}, \alpha_{ij}^{(k)}$ 는 k 번째 층의 환산탄성계수와 열팽창계수이다.

A.2 질량행렬 M , 감쇠행렬 C 및 강성행렬 K

$$M = \begin{bmatrix} M_{vv} & 0 & 0 \\ 0 & M_{\beta_1 \beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{\beta_2 \beta_2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\beta_1 \beta_1} & C_{\beta_1 \beta_2} \\ 0 & C_{\beta_2 \beta_1} & C_{\beta_2 \beta_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv} & \mathbf{K}_{v\beta_1} & \mathbf{K}_{v\beta_2} \\ \mathbf{K}_{\beta_1 v} & \mathbf{K}_{\beta_1\beta_1} & \mathbf{K}_{\beta_1\beta_2} \\ \mathbf{K}_{\beta_2 v} & \mathbf{K}_{\beta_2\beta_1} & \mathbf{K}_{\beta_2\beta_2} \end{bmatrix}$$

여기서

$$\mathbf{M}_{vv} \equiv \frac{I_0 h^2}{I_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_v \Psi_v^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathbf{M}_{\beta_1\beta_1} \equiv \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_1} \Psi_{\beta_1}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathbf{M}_{\beta_2\beta_2} \equiv \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_2} \Psi_{\beta_2}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathbf{K}_{vv} \equiv 2 \frac{A_{45} I_0 \ell_1^3 h^2}{D_{11} I_2 \ell_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{v,1} \Psi_{v,2}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \frac{A_{55} I_0 \ell_1^4}{D_{11} I_2} \left(\frac{h}{\ell_1} \right)^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{v,1} \Psi_{v,1}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \frac{A_{44} I_0 \ell_1^4}{D_{11} I_2} \left(\frac{h}{\ell_2} \right)^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{v,2} \Psi_{v,2}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \hat{\Theta} \frac{A_{11}^\alpha}{\alpha_0} \frac{h^4 I_0}{D_{11} I_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{v,11} \Psi_{v,11}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ 2\hat{\Theta} \frac{A_{12}^\alpha}{\alpha_0} \frac{h^4 I_0 \ell_1}{D_{11} I_2 \ell_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{v,12} \Psi_{v,12}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \hat{\Theta} \frac{A_{22}^\alpha}{\alpha_0} \frac{h^4 I_0 \ell_1^2}{D_{11} I_2 \ell_2^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{v,22} \Psi_{v,22}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathbf{K}_{v\beta_1} = \mathbf{K}_{\beta_1 v} \equiv \frac{A_{45} I_0 \ell_1^4}{D_{11} I_2} \left(\frac{h}{\ell_2} \right) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{v,2} \Psi_{\beta_1}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \frac{A_{55} I_0 \ell_1^4}{D_{11} I_2} \left(\frac{h}{\ell_1} \right) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{v,1} \Psi_{\beta_1}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathbf{K}_{v\beta_2} = \mathbf{K}_{\beta_2 v} \equiv \frac{A_{44} I_0 \ell_1^4}{D_{11} I_2} \left(\frac{h}{\ell_2} \right) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{v,2} \Psi_{\beta_2}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \frac{A_{45} I_0 \ell_1^4}{D_{11} I_2} \left(\frac{h}{\ell_1} \right) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{v,1} \Psi_{\beta_2}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathbf{K}_{\beta_1\beta_1} \equiv \frac{I_0 \ell_1^2}{I_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_1,1} \Psi_{\beta_1,1}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \frac{D_{16} I_0 \ell_1^3}{D_{11} I_2 \ell_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_1,1} \Psi_{\beta_1,2}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$- \frac{D_{16} I_0 \ell_1^3}{D_{11} I_2 \ell_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_1} \Psi_{\beta_1,12}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$- \frac{D_{66} I_0 \ell_1^4}{D_{11} I_2 \ell_2^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_1} \Psi_{\beta_1,22}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \frac{A_{35} I_0 \ell_1^4}{D_{11} I_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_1} \Psi_{\beta_1}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathbf{K}_{\beta_1\beta_2} = \mathbf{K}_{\beta_2\beta_1} \equiv \frac{D_{12} I_0 \ell_1^3}{D_{11} I_2 \ell_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_1,1} \Psi_{\beta_2,2}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \frac{D_{16} I_0 \ell_1^2}{D_{11} I_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_1,1} \Psi_{\beta_2,1}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$- \frac{D_{26} I_0 \ell_1^4}{D_{11} I_2 \ell_2^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_1} \Psi_{\beta_2,22}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$- \frac{D_{66} I_0 \ell_1^3}{D_{11} I_2 \ell_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_1} \Psi_{\beta_2,12}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \frac{A_{45} I_0 \ell_1^4}{D_{11} I_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_1} \Psi_{\beta_2}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathbf{K}_{\beta_2\beta_2} \equiv \frac{D_{26} I_0 \ell_1^3}{D_{11} I_2 \ell_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_2,1} \Psi_{\beta_2,2}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$- \frac{D_{26} I_0 \ell_1^3}{D_{11} I_2 \ell_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_2} \Psi_{\beta_2,12}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \frac{D_{66} I_0 \ell_1^2}{D_{11} I_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_2,1} \Psi_{\beta_2,1}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$- \frac{D_{22} I_0 \ell_1^4}{D_{11} I_2 \ell_2^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_2} \Psi_{\beta_2,22}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \frac{A_{44} I_0 \ell_1^4}{D_{11} I_2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_2} \Psi_{\beta_2}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathbf{C}_{\beta_1\beta_1} \equiv (\hat{B}_{03}^0)^2 \frac{\sqrt{\rho_0 E_0} C_{22}^g \ell_1^2 \sqrt{I_0}}{g_0 h I_2 \sqrt{D_{11}}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_1} \Psi_{\beta_1}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathbf{C}_{\beta_2\beta_2} \equiv (\hat{B}_{03}^0)^2 \frac{\sqrt{\rho_0 E_0} C_{11}^g \ell_1^2 \sqrt{I_0}}{g_0 h I_2 \sqrt{D_{11}}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_2} \Psi_{\beta_2}^T d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathbf{C}_{\beta_1\beta_2} = \mathbf{C}_{\beta_2\beta_1} \equiv -(\hat{B}_{03}^0)^2 \frac{\sqrt{\rho_0 E_0} C_{12}^g \ell_1^2 \sqrt{I_0}}{g_0 h I_2 \sqrt{D_{11}}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_{\beta_1} \Psi_{\beta_2}^T d\xi_1 d\xi_2$$