

2차원 벡터 공정능력지수 C_{pmk} 의 추정량과 극한분포 이론에 관한 연구

조중재^{1,a}, 박병선^b

^a충북대학교 정보통계학과, ^b통계청 경제통계기획과

요약

공정능력지수는 공정능력을 측정하고 분석하기 위하여 매우 중요한 역할을 하는 측도로, 품질수준과 밀접한 관계가 있을 뿐만 아니라 보다 높은 품질수준은 고객들에게 더 큰 만족을 가져다 준다. 제3세대 공정능력지수 C_{pmk} 는 흔히 6시그마 산업현장에서 공정능력을 평가하기 위하여 유용하게 사용되는 두 가지 지수 C_p 와 C_{pk} 보다 이론적으로 강력한 지수이다. 실제로 제조현장에서 두 가지 이상의 서로 연관이 있는 품질특성치들과 제품에 대한 규격한계들을 사용하여 보다 정확한 공정능력 분석이 필요할 것이다. 이러한 경우에 단순히 하나의 일변량 공정능력지수를 통하여 공정능력분석을 하기 보다는 벡터 공정능력지수나 다변량 공정능력지수를 통하여 분석을 수행하는 것이 바람직할 것이다.

본 논문에서는 3세대 공정능력지수 C_{pmk} 를 고려하여 2차원 벡터 공정능력지수 $\mathbf{C}_{pmk} = (C_{pmkx}, C_{pmky})'$ 에 대하여 연구하였다. 우선, \mathbf{C}_{pmk} 에 대한 플러그-인(plug-in) 추정량 $\hat{\mathbf{C}}_{pmk}$ 과 관련하여 핵심내용인 극한 확률분포를 유도하였다. 나아가 이러한 결과를 기초로 이변량 정규분포 하에서 공분산 행렬 V_{pmk} 을 구체적으로 계산하였다. 또한 이 행렬의 추정을 통하여 벡터 공정능력지수 \mathbf{C}_{pmk} 에 대한 근사적인 공동 신뢰영역을 제시함으로써, 본 논문에서의 극한분포 연구결과가 벡터 공정능력지수 \mathbf{C}_{pmk} 에 대한 통계적 추론에 유용하게 활용될 수 있음을 보여주었다.

주요어: 벡터 공정능력지수, 플러그-인 추정량, 극한 확률분포, 분산-공분산 행렬, 공동 신뢰영역.

1. 서론

제조현장에서 더 우수한 품질의 제품을 생산할 수 있도록 주어진 규격을 충족시켜 관련 공정을 관리상태로 유지하고 조정하는 일은 매우 중요하다. 공정능력(process capability)이란 제조공정이 제품의 설계과정에서 설정한대로 얼마나 균일한 제품을 생산할 수 있는지를 반영하는 공정의 고유능력 즉, 균일성을 의미한다. 제조업 분야이든 서비스업 분야이든 공정과 관련하여 측정된 자료로부터 품질변동이 작으면 공정능력은 좋다고 말하고, 품질변동이 크면 공정능력이 좋지 않다고 말한다. 다시 말해서 공정능력이란 공정이 관리상태에 있을 때, 그 공정에서 생산되는 제품의 품질변동을 기초로 공정성과(process performance)를 평가하기 위한 중요한 개념이라고 할 수 있다.

공정의 변동과 제품의 규격한계 등으로 공정능력을 평가하는 것을 공정능력분석이라 하고, 이를 정량적으로 표현한 것이 공정능력지수(process capability index; PCI)이다. 보다 정확한 공정의 고유능력을 평가하기 위해서 다양한 공정능력지수들이 제안되어 왔으며, 통계적 추정 문제와 관련된 연구가 대단히 활발한 편이다 (Pearn 등, 1992; Franklin과 Wasserman, 1992; Kotz와 Johnson, 1993; Cho 등, 1999; Niverthi와 Dey, 2000; Pearn 등, 2007).

이 논문은 2009년도 충북대학교 학술연구 지원사업의 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

¹ 교신저자: (361-763) 충북 청주시 흥덕구 성봉로 410, 충북대학교 정보통계학과, 교수. E-mail: jjcho@chungbuk.ac.kr

일반적으로 하나의 제품은 여러 개의 품질특성들을 갖고 있으며, 이러한 특성들을 기초로 그 제품의 품질을 판단하게 된다. 예를 들면, 조명에 사용되는 광램프의 경우에는 관경 뿐만 아니라 길이, 무게, 소비전력, 금속의 형상, 스위치특성, 광속유지율, 수명, 광원색, 외관 등 하나의 제품이지만 여러 개의 품질특성들을 갖고 있으며, 각 특성치들에 대하여 설정된 규격을 충족시킬 경우 그 제품의 품질이 우수하다고 할 수 있을 것이다. 하지만 제품의 품질은 이들 특성 각각의 성능보다는 오히려 결합된 성능에 많은 영향을 받는다. 실제로 이들 특성을 하나 하나 측정하지만, 특성치들 간에 독립적이라기 보다는 오히려 관련이 있어서 종속적으로 분포되어 있다고 가정하는 것이 보다 현실적인 것이다. 이러한 경우에 독립성을 가정하여 각 품질특성치들을 기초로 단순히 하나의 일변량 공정능력지수로 측정하고 분석하는 것만으로는 충분하다고 할 수 없을 것이다. 이 때 벡터 공정능력지수를 사용하는 것이 매우 자연스럽게 바람직할 것이다. 또한 자동 검사 시스템에 의해 여러 특성들을 하나 하나 쉽게 측정할 수 있는 오늘날에 다변량 품질관리의 중요성은 더욱 크다고 할 수 있겠다. Alt와 Smith (1988)는 현재 이용 가능한 다변량 공정관리 기법들을 훌륭하게 정리·연구하였다. 최근에는 여러 특성들을 기초로 하여 공정능력을 올바르게 평가하는 문제가 중요한 이슈가 되었다. Kocherlakota와 Kocherlakota (1991)는 이변량 정규분포 $BN(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ 하에서 가장 간단한 공정능력지수의 추정량들인 \hat{C}_{px} 와 \hat{C}_{py} 의 결합 확률분포함수를 계산하고 통계적 추론 방향을 제시하였다. Hubele 등 (1991)은 또 다른 형태의 벡터 공정능력지수를 정의, 연구하였다. Taam 등 (1993)은 지수 C_{pm} 를 확장, 변형된 공차영역(modified tolerance region)을 고려한 다변량 공정능력지수를 제안, 연구하였다. Niverthi와 Dey (2000)는 베이저안 방법을 응용하여 여러 가지 다변량 공정능력지수를 제안, 연구하였다. 또한 Pearn 등 (2007)은 Taam 등 (1993)에 의해 제안된 다변량 공정능력지수의 확률적 성질들과 통계적 추론문제를 연구하였다. 그리고 최근에 Shahriari와 Abdollahzadeh (2009)는 성분별로 고려한 새로운 다변량 공정능력 벡터를 제안, 연구하였다.

본 논문에서는 공정능력지수 C_{pmk} 를 2차원으로 확장한 벡터 공정능력지수 \mathbf{C}_{pmk} 에 대한 통계적 추론을 위해 플러그-인 추정량과 관련하여 주로 극한 분포이론에 대하여 연구하였다. 공정능력지수 C_{pmk} 는 공정능력지수 C_p , C_{pk} , C_{pm} 들과 비교하여 보다 효율적인 성질을 갖는 제3세대 공정능력지수이다.

먼저 2절에서는 벡터공정능력지수 $\mathbf{C}_{pmk} = (C_{pmkx}, C_{pmky})'$ 의 기본적인 개념과 플러그-인 추정량 $\hat{\mathbf{C}}_{pmk}$ 에 대하여 고찰하였다. 3절에서는 논문의 주요 핵심내용인 추정량 $\hat{\mathbf{C}}_{pmk}$ 과 관련하여 극한 확률 분포를 유도하였다. 그리고 4절에서는 앞 절에서 정립한 극한 확률분포를 이용하여 벡터 공정능력지수 \mathbf{C}_{pmk} 에 대한 근사적인 신뢰영역 제시를 위해 필요한 공분산 행렬 V_{pmk} 를 구체적으로 계산한 후, 이 행렬에 대한 추정행렬 \hat{V}_{pmk} 을 마련, 연구하였다.

2. 벡터 공정능력지수 \mathbf{C}_{pmk} 와 플러그-인 추정량

현장에서 매우 유용하게 이용되는 제1세대 공정능력지수 C_p 및 제2세대 공정능력지수 C_{pk} 와 C_{pm} 들의 단점들을 보완하여, Pearn 등 (1992)은 좀더 복잡하지만 보다 강력한 다음과 같은 제3세대 공정능력지수 C_{pmk} 를 정의하였다.

$$C_{pmk} = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sqrt{E(X - T)^2}} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

단, 두 상수 d 와 M 은 각각 $d = (USL - LSL)/2$ 이고, $M = (USL + LSL)/2$ 이다.

나아가 보다 효율적인 공정능력지수 C_{pmk} 를 2차원으로 확장한 벡터 공정능력지수 \mathbf{C}_{pmk} 를 설명하면 다음과 같다 (Kotz와 Johnson, 1993).

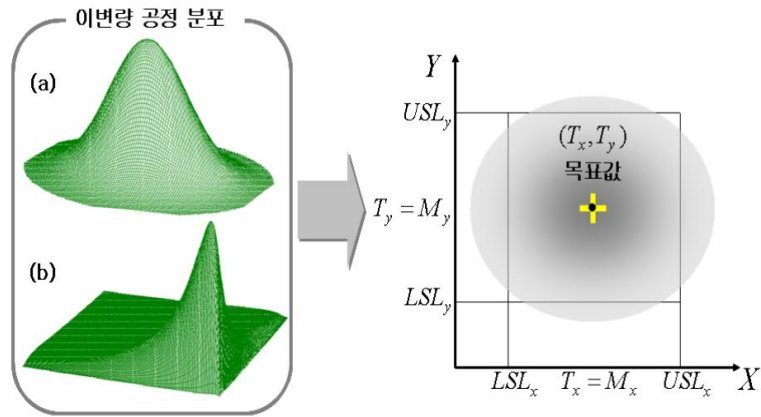


그림 1: 이변량 공정의 두 품질특성치 X 와 Y 에 대한 규격과 목표값

우선, 벡터 (X, Y) 을 평균벡터 (μ_x, μ_y) 와 공분산 행렬 Σ 인 이변량 확률벡터라 하자. 단, 공분산 행렬 Σ 은 다음과 같이 확률변수 X 와 Y 에 대한 각각의 분산과 공분산으로 구성되어 있다.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}.$$

그리고 USL_x 와 LSL_x 은 품질특성치를 뜻하는 확률변수 X 에 대한 각각의 규격상한(upper specification limit)과 규격하한(lower specification limit)을 나타내고, USL_y 와 LSL_y 은 확률변수 Y 에 대한 각각의 규격상한과 규격하한을 나타낸다. 또한, 상수 d_x 는 $d_x = (USL_x - LSL_x)/2$ 이고, 상수 d_y 는 $d_y = (USL_y - LSL_y)/2$ 이다. 그리고 상수 M_x 는 $M_x = (USL_x + LSL_x)/2$ 이고, 상수 M_y 는 $M_y = (USL_y + LSL_y)/2$ 를 뜻한다.

2차원 벡터 공정능력지수를 측정하기 위한 상황을 표현하면 다음의 그림 1과 같다. 단, 상수 T_x 와 T_y 는 품질특성치 X 와 Y 에 대한 각각의 목표값(target value)을 뜻한다.

그러면 우리는 품질특성치들인 확률변수 X 와 Y 에 대한 각각의 일변량 공정능력지수를 다음과 같이 정의할 수 있을 것이다.

$$C_{pmkx} = \frac{d_x - |\mu_x - M_x|}{3\sqrt{\sigma_x^2 + (\mu_x - T_x)^2}} = \frac{d_x - |\mu_x - M_x|}{3\tau_x},$$

$$C_{pmky} = \frac{d_y - |\mu_y - M_y|}{3\sqrt{\sigma_y^2 + (\mu_y - T_y)^2}} = \frac{d_y - |\mu_y - M_y|}{3\tau_y}.$$

나아가 이러한 개념의 공정능력지수를 2차원으로 확장하여 벡터 공정능력지수 C_{pmk} 를 다음과 같이 정의하였다.

$$C_{pmk} = (C_{pmkx}, C_{pmky})^t = \left(\frac{d_x - |\mu_x - M_x|}{3\sqrt{\sigma_x^2 + (\mu_x - T_x)^2}}, \frac{d_y - |\mu_y - M_y|}{3\sqrt{\sigma_y^2 + (\mu_y - T_y)^2}} \right)^t$$

$$= \left(\frac{d_x - |\mu_x - M_x|}{3\tau_x}, \frac{d_y - |\mu_y - M_y|}{3\tau_y} \right)^t$$

단, τ_x^2 와 τ_y^2 은 각각 $\tau_x^2 = \sigma_x^2 + (\mu_x - T_x)^2$ 와 $\tau_y^2 = \sigma_y^2 + (\mu_y - T_y)^2$ 이다.

이러한 벡터 공정능력지수 \mathbf{C}_{pmk} 에 대한 장점은 일변량 공정능력지수에 비해 이변량 통계량(bivariate statistics)의 차별화된 설명력을 갖게 될 것이다.

표본 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 을 평균벡터 (μ_x, μ_y) 와 공분산 행렬 Σ 을 갖는 이변량 공정분포로부터의 확률표본이라고 하자. 그러면 플러그-인 방법에 의해 우리의 벡터 공정능력지수 \mathbf{C}_{pmk} 에 대하여 다음과 같은 추정량 $\hat{\mathbf{C}}_{pmk}$ 을 고려할 수 있을 것이다.

$$\hat{\mathbf{C}}_{pmk} = (\hat{C}_{pmkx}, \hat{C}_{pmky})^t = \left(\frac{d_x - |\bar{X} - M_x|}{3\sqrt{S_x^2 + (\bar{X} - T_x)^2}}, \frac{d_y - |\bar{Y} - M_y|}{3\sqrt{S_y^2 + (\bar{Y} - T_y)^2}} \right)^t$$

단, 표본평균 \bar{X}, \bar{Y} , 그리고 표본분산 S_x^2, S_y^2 은 각각 다음과 같다.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2.$$

또한 τ_x^2 와 τ_y^2 의 추정량은 각각 플러그-인 방법에 의해 $\hat{\tau}_x^2 = S_x^2 + (\bar{X} - T_x)^2$ 와 $\hat{\tau}_y^2 = S_y^2 + (\bar{Y} - T_y)^2$ 이다.

3. 벡터 공정능력지수 $\hat{\mathbf{C}}_{pmk}$ 와 관련된 극한분포 결과

벡터 공정능력지수 \mathbf{C}_{pmk} 에 대한 통계적 추정과 가설검정문제를 해결하기 위해서 확률변수 $\sqrt{n}(\hat{\mathbf{C}}_{pmk} - \mathbf{C}_{pmk})$ 의 극한 확률분포를 구하여야 하는데, 우선적으로 사용될 보조정리 1을 인용하면 다음과 같다 (Park 등, 2002).

보조정리 1. 확률변수 X 와 Y 에 관한 4차 중심적률 $\mu_{4x} = E(X - \mu_x)^4$ 와 $\mu_{4y} = E(Y - \mu_y)^4$ 이 존재하는 공정에 대하여 표본의 크기 n 이 $n \rightarrow \infty$ 이면, 다음의 극한 분포(다변량 정규분포)결과가 성립한다.

$$\begin{aligned} (Z_{1n}, Z_{2n}, Z_{3n}, Z_{4n})^t &= (\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_x), \sqrt{n}(\bar{Y} - \mu_y), \sqrt{n}(S_x^2 - \sigma_x^2), \sqrt{n}(S_y^2 - \sigma_y^2))^t \\ &\xrightarrow{d} (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)^t \end{aligned}$$

단, $(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)^t \stackrel{d}{\sim} \text{MN}(0, \Sigma_{4 \times 4})$ 이고, 여기서 $\Sigma_{4 \times 4}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Sigma_{4 \times 4} = (\sigma_{ij})_{4 \times 4} &= \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \mu_{1x1y} & \mu_{3x} & \mu_{1x2y} \\ & \sigma_y^2 & \mu_{2x1y} & \mu_{3y} \\ & \text{symm.} & \mu_{4x} - \sigma_x^4 & \mu_{2x2y} - \sigma_x^2 \sigma_y^2 \\ & & & \mu_{4y} - \sigma_y^4 \end{pmatrix}, \\ \mu_{ix} &= E[(X - \mu_x)^i], \quad \mu_{iy} = E[(Y - \mu_y)^i], \quad i = 3, 4, \\ \mu_{ixjy} &= E[(X - \mu_x)^i (Y - \mu_y)^j], \quad i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

우선, 보다 현실적인 이변량 정규공정을 고려하여 부연설명하면 다음과 같다. 표본 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 을 이변량 정규분포 $\text{BN}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ 로부터의 확률표본이라고 가정하자. 그러면 위에서 언급한 보조정리 1로부터 다음과 같은 분산-공분산 행렬 $\Sigma_{4 \times 4}$ 을 보다 구체적으로 계산할

표 1: C_{pmk} 의 추정량과 관련된 극한분포 유도를 위한 고려 조건들

조건(Condition)				세부조건(Detailed Condition)		
case1:	$\mu_x = M_x$	and	$\mu_y = M_y$	$\mu_x = M_x$	and	$\mu_y = M_y$
case2:	$\mu_x = M_x$	and	$\mu_y \neq M_y$	$\mu_x = M_x$	and	$\mu_y < M_y$
				$\mu_x = M_x$	and	$\mu_y > M_y$
case3:	$\mu_x \neq M_x$	and	$\mu_y = M_y$	$\mu_x < M_x$	and	$\mu_y = M_y$
				$\mu_x > M_x$	and	$\mu_y = M_y$
case4:	$\mu_x \neq M_x$	and	$\mu_y \neq M_y$	$\mu_x < M_x$	and	$\mu_y < M_y$
				$\mu_x < M_x$	and	$\mu_y > M_y$
				$\mu_x > M_x$	and	$\mu_y < M_y$
				$\mu_x < M_x$	and	$\mu_y < M_y$

수 있을 것이다.

$$\Sigma_{4 \times 4} = (\sigma_{ij})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y & 0 & 0 \\ & \sigma_y^2 & 0 & 0 \\ & & \text{symm.} & 2\sigma_x^4 \\ & & & (1 + 2\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2 \\ & & & & 2\sigma_y^4 \end{pmatrix}.$$

이러한 공분산 행렬 $\Sigma_{4 \times 4}$ 은 벡터 공정능력지수 C_{pmk} 에 대한 다음 형태의 근사적인 신뢰영역을 설정하는 데 매우 유용하게 활용될 것이다.

$$n(\hat{C}_{pmk} - C_{pmk})' (\hat{V}_{pmk})^{-1} (\hat{C}_{pmk} - C_{pmk}) \leq \chi^2(2; \alpha)$$

단, 임계치 $\chi^2(2; \alpha)$ 는 자유도 2인 카이제곱 분포에 대한 $100(1 - \alpha)$ 백분위수이다. 그리고 추정행렬 \hat{V}_{pmk} 은 공분산 행렬 $\Sigma_{4 \times 4}$ 와 다음에 이어지는 본 논문의 중요한 결과인 정리 1로부터 얻을 수 있는 바, 이에 대한 보다 구체적인 내용은 4절에서 설명, 언급될 것이다.

다음으로 확률변수 $\sqrt{n}(\hat{C}_{pmk} - C_{pmk})$ 의 극한분포를 유도하기 위하여, 표 1에서처럼 4가지 경우 혹은 9가지 경우로 나누어 계산하면 될 것이다. 하지만 실제 현장에서는 $\mu_x = M_x$ 나 $\mu_y = M_y$ 가 고려된 case1 ~ case3 보다는 case4의 경우가 일반적이라 할 수 있다.

위의 보조정리 1과 기본적인 공정능력지수들의 추정량과 관련된 극한분포 연구결과 (Chan 등, 1990)를 확장하여 2차원 벡터공정능력지수 C_{pmk} 의 추정량 \hat{C}_{pmk} 과 관련된 극한분포 결과를 유도하여 정리하면 다음과 같다.

정리 1. 4차 중심적률 $\mu_{4x} = E(X - \mu_x)^4$ 와 $\mu_{4y} = E(Y - \mu_y)^4$ 이 존재하는 이변량 공정 (X, Y) 에 대하여 표본의 크기 n 이 $n \rightarrow \infty$ 이면, 다음의 극한 분포(이변량 정규분포)결과가 성립한다.

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{C}_{pmk} - C_{pmk}) &= \sqrt{n}(\hat{C}_{pmkx} - C_{pmkx}, \hat{C}_{pmky} - C_{pmky})' \\ &\xrightarrow{d} \left(\frac{(|M_x - \mu_x| - d_x)(Z_3 + 2(\mu_x - T_x)Z_1)}{6\tau_x^3} + \frac{\rho(M_x, \mu_x, Z_1)}{3\tau_x}, \frac{(|M_y - \mu_y| - d_y)(Z_4 + 2(\mu_y - T_y)Z_2)}{6\tau_y^3} + \frac{\rho(M_y, \mu_y, Z_2)}{3\tau_y} \right)' \\ &\stackrel{d}{\sim} \text{BN}(0, V_{pmk}) \end{aligned}$$

단, 함수 $\rho(M, \mu, Z)$ 는 $\rho(M, \mu, Z) = \begin{cases} -\text{sgn}(Z), & M = \mu, \\ \text{sgn}(M - \mu), & M \neq \mu \end{cases}$ 이고, 확률벡터 $(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)'$ 는 $(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)' \sim \text{MN}(0, \Sigma_{4 \times 4})$ 이다.

증명: 확률변수 $\sqrt{n}(\hat{C}_{pmk} - C_{pmk})$ 의 극한분포를 유도하기 위하여 앞에서 언급한 표 1의 4가지 경우로 나누어 생각해 보자.

우선, 가장 단순한 경우인 **case1**: $\mu_x = M_x$ 와 $\mu_y = M_y$ 에 대하여 확률변수 $\sqrt{n}(\hat{\mathbf{C}}_{pmk} - \mathbf{C}_{pmk})$ 의 극한 분포를 계산, 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{\mathbf{C}}_{pmk} - \mathbf{C}_{pmk}) &= \sqrt{n}(\hat{C}_{pmkx} - C_{pmkx}, \hat{C}_{pmky} - C_{pmky})^t \\ &= \left(\sqrt{n} \left(\frac{d_x - |\bar{X} - M_x|}{3\hat{\tau}_x} - \frac{d_x}{3\tau_x} \right), \sqrt{n} \left(\frac{d_y - |\bar{Y} - M_y|}{3\hat{\tau}_y} - \frac{d_y}{3\tau_y} \right) \right)^t \\ &= \left[\frac{1}{3\hat{\tau}_x\tau_x} \left\{ -d_x \frac{\sqrt{n}(\hat{\tau}_x^2 - \tau_x^2)}{\hat{\tau}_x + \tau_x} - \tau_x |\sqrt{n}(\bar{X} - M_x)| \right\}, \frac{1}{3\hat{\tau}_y\tau_y} \left\{ -d_y \frac{\sqrt{n}(\hat{\tau}_y^2 - \tau_y^2)}{\hat{\tau}_y + \tau_y} - \tau_y |\sqrt{n}(\bar{Y} - M_y)| \right\} \right]^t \\ &\xrightarrow{d} \left(-\frac{d_x(Z_3 + 2(\mu_x - T_x)Z_1)}{6\tau_x^3} - \frac{|Z_1|}{3\tau_x}, -\frac{d_y(Z_4 + 2(\mu_y - T_y)Z_2)}{6\tau_y^3} - \frac{|Z_2|}{3\tau_y} \right)^t \end{aligned}$$

단, τ_x^2 와 τ_y^2 의 추정량은 플러그-인 방법에 의해 각각 $\hat{\tau}_x^2 = S_x^2 + (\bar{X} - T_x)^2$ 와 $\hat{\tau}_y^2 = S_y^2 + (\bar{Y} - T_y)^2$ 이다. 그리고 계산과정에서 우리는 다음 사실을 사용하였다.

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{\tau}_x^2 - \tau_x^2) &= \sqrt{n}((\hat{S}_x^2 - \sigma_x^2) + (\bar{X} - \mu_x)(\bar{X} + \mu_x - 2T_x)) \xrightarrow{d} Z_3 + 2(\mu_x - T_x)Z_1 \\ \sqrt{n}(\hat{\tau}_y^2 - \tau_y^2) &= \sqrt{n}((\hat{S}_y^2 - \sigma_y^2) + (\bar{Y} - \mu_y)(\bar{Y} + \mu_y - 2T_y)) \xrightarrow{d} Z_4 + 2(\mu_y - T_y)Z_2. \end{aligned}$$

다음으로, 두 번째 경우 **case2**: $\mu_x = M_x$ 와 $\mu_y \neq M_y$ 에 대하여 계산, 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{\mathbf{C}}_{pmk} - \mathbf{C}_{pmk}) &= \sqrt{n}(\hat{C}_{pmkx} - C_{pmkx}, \hat{C}_{pmky} - C_{pmky})^t \\ &= \left(\sqrt{n} \left(\frac{d_x - |\bar{X} - M_x|}{3\hat{\tau}_x} - \frac{d_x}{3\tau_x} \right), \sqrt{n} \left(\frac{d_y - |\bar{Y} - M_y|}{3\hat{\tau}_y} - \frac{d_y - |\mu_y - M_y|}{3\tau_y} \right) \right)^t \\ &= \left(\frac{\sqrt{n}}{3\hat{\tau}_x\tau_x} \left\{ -d_x(\hat{\tau}_x - \tau_x) - \tau_x |\bar{X} - M_x| \right\}, \frac{\sqrt{n}}{3\hat{\tau}_y\tau_y} \left\{ -d_y(\hat{\tau}_y - \tau_y) - \tau_y |\bar{Y} - M_y| + \hat{\tau}_y |\mu_y - M_y| \right\} \right)^t \\ &\xrightarrow{d} \left(-\frac{d_x(Z_3 + 2(\mu_x - T_x)Z_1)}{6\tau_x^3} - \frac{|Z_1|}{3\tau_x}, \frac{(|\mu_y - M_y| - d_y)\{Z_4 + 2(\mu_y - T_y)Z_2\} + \text{sgn}(M_y - \mu_y)Z_2}{6\tau_y^3} + \frac{\text{sgn}(M_y - \mu_y)Z_2}{3\tau_y} \right)^t. \end{aligned}$$

그리고 세 번째 경우 **case3**: $\mu_x \neq M_x$ 와 $\mu_y = M_y$ 에 대하여 계산, 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{\mathbf{C}}_{pmk} - \mathbf{C}_{pmk}) &= \sqrt{n}(\hat{C}_{pmkx} - C_{pmkx}, \hat{C}_{pmky} - C_{pmky})^t \\ &= \left(\sqrt{n} \left(\frac{d_x - |\bar{X} - M_x|}{3\hat{\tau}_x} - \frac{d_x - |\mu_x - M_x|}{3\tau_x} \right), \sqrt{n} \left(\frac{d_y - |\bar{Y} - M_y|}{3\hat{\tau}_y} - \frac{d_y}{3\tau_y} \right) \right)^t \\ &= \left(\frac{\sqrt{n}}{3\hat{\tau}_x\tau_x} \left\{ -d_x(\hat{\tau}_x - \tau_x) - \tau_x |\bar{X} - M_x| + \hat{\tau}_x |\mu_x - M_x| \right\}, \frac{\sqrt{n}}{3\hat{\tau}_y\tau_y} \left\{ -d_y(\hat{\tau}_y - \tau_y) - \tau_y |\bar{Y} - M_y| \right\} \right)^t \\ &\xrightarrow{d} \left(\frac{(|\mu_x - M_x| - d_x)\{Z_3 + 2(\mu_x - T_x)Z_1\} + \text{sgn}(M_x - \mu_x)Z_1}{6\tau_x^3} + \frac{\text{sgn}(M_x - \mu_x)Z_1}{3\tau_x}, -\frac{d_y(Z_4 + 2(\mu_y - T_y)Z_2)}{6\tau_y^3} - \frac{|Z_2|}{3\tau_y} \right)^t \end{aligned}$$

마지막으로, 네 번째 경우 **case4**: $\mu_x \neq M_x$ 와 $\mu_y \neq M_y$ 에 대하여 계산, 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{\mathbf{C}}_{pmk} - \mathbf{C}_{pmk}) &= \sqrt{n}(\hat{C}_{pmkx} - C_{pmkx}, \hat{C}_{pmky} - C_{pmky})^t \\ &= \left(\sqrt{n} \left(\frac{d_x - |\bar{X} - M_x|}{3\hat{\tau}_x} - \frac{d_x - |\mu_x - M_x|}{3\tau_x} \right), \sqrt{n} \left(\frac{d_y - |\bar{Y} - M_y|}{3\hat{\tau}_y} - \frac{d_y - |\mu_y - M_y|}{3\tau_y} \right) \right)^t \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{n}}{3\hat{\tau}_x\tau_x} \{-d_x(\hat{\tau}_x - \tau_x) - \tau_x|\bar{X} - M_x| + \hat{\tau}_x|\mu_x - M_x|\}, \frac{\sqrt{n}}{3\hat{\tau}_y\tau_y} \{-d_y(\hat{\tau}_y - \tau_y) - \tau_y|\bar{Y} - M_y| + \hat{\tau}_y|\mu_y - M_y|\} \right)^t$$

$$\rightarrow d \left(\frac{(|\mu_x - M_x| - d_x)\{Z_3 + 2(\mu_x - T_x)Z_1\}}{6\tau_x^3} + \frac{\text{sgn}(M_x - \mu_x)Z_1}{3\tau_x}, \frac{(|\mu_y - M_y| - d_y)\{Z_4 + 2(\mu_y - T_y)Z_2\}}{6\tau_y^3} + \frac{\text{sgn}(M_y - \mu_y)Z_2}{3\tau_y} \right)^t$$

□

결론적으로, 함수 $\rho(M, \mu, Z)$ 를 $\rho(M, \mu, Z) = \begin{cases} -\text{sgn}(Z), & M=\mu \\ \text{sgn}(M-\mu), & M \neq \mu \end{cases}$ 으로 정의하고, 위에서 계산한 내용들을 종합하면, 확률변수 $\sqrt{n}(\hat{C}_{pmk} - C_{pmk})$ 는 다음의 확률변수로 분포수렴(convergence in distribution)하게 된다.

$$\left(\frac{(|\mu_x - M_x| - d_x)\{Z_3 + 2(\mu_x - T_x)Z_1\}}{6\tau_x^3} + \frac{\rho(M_x, \mu_x, Z_1)Z_1}{3\tau_x}, \frac{(|\mu_y - M_y| - d_y)\{Z_4 + 2(\mu_y - T_y)Z_2\}}{6\tau_y^3} + \frac{\rho(M_y, \mu_y, Z_2)Z_2}{3\tau_y} \right)^t$$

4. 이변량 정규공정하에서 공분산 행렬 V_{pmk} 와 공동 신뢰 영역

표본 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 을 이변량 정규분포 $\text{BN}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ 로부터의 확률표본이라고 가정하자. 그러면 각각의 4차 중심적률 $\mu_{4x} = E(X - \mu_x)^4 = 3\sigma_x^4$ 와 $\mu_{4y} = E(Y - \mu_y)^4 = 3\sigma_y^4$ 으로 계산되고 유한한 값으로 존재함을 알 수 있다.

따라서 3절에서 유도·증명된 본 논문의 중요한 결과인 정리 1로부터 근사적인 공분산 행렬 V_{pmk} 를 구체적으로 계산하여 바람직한 추정량을 얻은 후, 우리는 벡터 공정능력지수 C_{pmk} 에 대한 효율적인 $100(1 - \alpha)\%$ 근사 공동 신뢰영역을 다음과 같은 형태로 제시하고자 한다.

$$n(\hat{C}_{pmk} - C_{pmk})^t (\hat{V}_{pmk})^{-1} (\hat{C}_{pmk} - C_{pmk}) \leq \chi^2(2; \alpha)$$

단, 임계치 $\chi^2(2; \alpha)$ 는 자유도 2인 카이제곱 분포에 대한 $100(1 - \alpha)$ 백분위수이고, 행렬 \hat{V}_{pmk} 은 플러그-인 방법에 의한 근사적인 분산-공분산 행렬 $V_{pmk} = \begin{pmatrix} \sigma_{pmk11} & \sigma_{pmk12} \\ \sigma_{pmk21} & \sigma_{pmk22} \end{pmatrix}$ 의 추정행렬이다.

다음으로 근사적인 공분산 행렬 V_{pmk} 을 구체적으로 계산해 보자. 우리는 앞 절의 표 1에서 μ_x 와 M_x , μ_y 와 M_y 의 관계에 따라 크게 4가지 경우를 고려하였지만, 실제 현장에서는 case4의 경우가 주된 경우이므로 분산-공분산 행렬 V_{pmk} 을 구체적으로 계산시 case4: $\mu_x \neq M_x, \mu_y \neq M_y$ 의 경우만을 고려하고자 한다. 왜냐하면, 일반적으로 공정평균 μ_x 와 μ_y 는 미지의 모수들이고, 상수 M_x 와 M_y 는 정확히 기지(known)의 값이기 때문이다($M_x = (\text{USL}_x + \text{LSL}_x)/2$, $M_y = (\text{USL}_y + \text{LSL}_y)/2$).

따라서 앞에서 언급한 표 1의 마지막 경우인 $\mu_x \neq M_x$ 와 $\mu_y \neq M_y$ 에 대하여 고려하면 충분할 것이다. 이 경우에 다음의 극한 확률변수 정리 1

$$\left(\frac{(|\mu_x - M_x| - d_x)\{Z_3 + 2(\mu_x - T_x)Z_1\}}{6\tau_x^3} + \frac{\text{sgn}(M_x - \mu_x)Z_1}{3\tau_x}, \frac{(|\mu_y - M_y| - d_y)\{Z_4 + 2(\mu_y - T_y)Z_2\}}{6\tau_y^3} + \frac{\text{sgn}(M_y - \mu_y)Z_2}{3\tau_y} \right)^t$$

$$= (a_x Z_1 + b_x Z_3, a_y Z_2 + b_y Z_4)^t$$

단,

$$a_x = \frac{(|M_x - \mu_x| - d_x)(\mu_x - T_x)}{3\tau_x^3} + \frac{\text{sgn}(M_x - \mu_x)}{3\tau_x}, \quad b_x = \frac{|M_x - \mu_x| - d_x}{6\tau_x^3},$$

$$a_y = \frac{(|M_y - \mu_y| - d_y)(\mu_y - T_y)}{3\tau_y^3} + \frac{\text{sgn}(M_y - \mu_y)}{3\tau_y}, \quad b_y = \frac{|M_y - \mu_y| - d_y}{6\tau_y^3},$$

$$(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)^t \sim \text{MN}(0, \Sigma_{4 \times 4})$$

를 고려하여 행렬 $V_{pmk} = (\sigma_{pmkij})_{2 \times 2}$ ($i, j = 1, 2$)의 각 성분들은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{pmk11} &= \text{Var}(a_x Z_1 + b_x Z_3) = a_x^2 \sigma_x^2 + 2a_x b_x \mu_{3x} + b_x^2 (\mu_{4x} - \sigma_x^4) \\ &= \frac{1}{9\tau_x^6} \left[\left\{ (|M_x - \mu_x| - d_x)(\mu_x - T_x) + \tau_x^2 \right\}^2 \sigma_x^2 \right. \\ &\quad + \left\{ (|M_x - \mu_x| - d_x)(\mu_x - T_x) + \tau_x^2 \cdot \text{sgn}(M_x - \mu_x) \right\} (|M_x - \mu_x| - d_x) \mu_{3x} \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (|M_x - \mu_x| - d_x)^2 (\mu_{4x} - \sigma_x^4) \right], \\ \sigma_{pmk22} &= \text{Var}(a_y Z_2 + b_y Z_4) = a_y^2 \sigma_y^2 + 2a_y b_y \mu_{3y} + b_y^2 (\mu_{4y} - \sigma_y^4) \\ &= \frac{1}{9\tau_y^6} \left[\left\{ (|M_y - \mu_y| - d_y)(\mu_y - T_y) + \tau_y^2 \right\}^2 \sigma_y^2 \right. \\ &\quad + \left\{ (|M_y - \mu_y| - d_y)(\mu_y - T_y) + \tau_y^2 \cdot \text{sgn}(M_y - \mu_y) \right\} (|M_y - \mu_y| - d_y) \mu_{3y} \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (|M_y - \mu_y| - d_y)^2 (\mu_{4y} - \sigma_y^4) \right], \\ \sigma_{pmk12} &= \sigma_{pmk21} = \text{Cov}(a_x Z_1 + b_x Z_3, a_y Z_2 + b_y Z_4) = a_x a_y \sigma_{12} + a_x b_y \sigma_{14} + b_x a_y \sigma_{32} + b_x b_y \sigma_{34} \\ &= \frac{1}{9\tau_x^3 \tau_y^3} \times \left\{ (|M_x - \mu_x| - d_x)(\mu_x - T_x) + \tau_x^2 \cdot \text{sgn}(M_x - \mu_x) \right\} \\ &\quad \times \left\{ (|M_y - \mu_y| - d_y)(\mu_y - T_y) + \tau_y^2 \cdot \text{sgn}(M_y - \mu_y) \right\} \sigma_{12} \\ &\quad + \frac{1}{18\tau_x^3 \tau_y^3} \times \left\{ (|M_x - \mu_x| - d_x)(\mu_x - T_x) + \tau_x^2 \cdot \text{sgn}(M_x - \mu_x) \right\} \times (|M_y - \mu_y| - d_y) \sigma_{14} \\ &\quad + \frac{1}{18\tau_x^3 \tau_y^3} \times (|M_x - \mu_x| - d_x) \times \left\{ (|M_y - \mu_y| - d_y)(\mu_y - T_y) + \tau_y^2 \cdot \text{sgn}(M_y - \mu_y) \right\} \sigma_{32} \\ &\quad + \frac{1}{36\tau_x^3 \tau_y^3} \times (|M_x - \mu_x| - d_x) \times (|M_y - \mu_y| - d_y) \sigma_{34} \end{aligned}$$

단, $\sigma_{12}, \sigma_{14}, \sigma_{32}, \sigma_{34}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= E(X - \mu_x)(Y - \mu_y), & \sigma_{14} &= E(X - \mu_x)(Y - \mu_y)^2, \\ \sigma_{32} &= E(X - \mu_x)^2(Y - \mu_y), & \sigma_{34} &= E(X - \mu_x)^2(Y - \mu_y)^2 - \sigma_x^2 \sigma_y^2. \end{aligned}$$

물론, 이변량 정규공정 $\text{BN}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ 하에서는, 다음과 같이 좀 더 구체적으로 공분산 행렬 $\Sigma_{4 \times 4} = (\sigma_{ij})_{4 \times 4}$ 의 성분들을 계산할 수 있을 것이다.

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= E(X - \mu_x)(Y - \mu_y) = \rho \sigma_x \sigma_y, & \sigma_{14} &= E(X - \mu_x)(Y - \mu_y)^2 = 0 \\ \sigma_{32} &= \sigma_{23} = E(X - \mu_x)^2(Y - \mu_y) = 0 \end{aligned}$$

그리고 이중 기대치 공식(double expectation formula)에 의해서 성분 σ_{34} 는 $\sigma_{34} = E(X - \mu_x)^2(Y - \mu_y)^2 - \sigma_x^2 \sigma_y^2 = (1 + 2\rho^2)\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_x^2 \sigma_y^2 = 2\rho^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2$ 로 계산되어진다.

결국, 이변량 정규공정하에서, 공분산 행렬 $V_{pmk} = (\sigma_{pmkij})_{2 \times 2}$ 의 비대각항 성분인 $\sigma_{pmk12} = \sigma_{pmk21}$ 은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{pmk21} = \sigma_{pmk12} &= \frac{1}{9\tau_x^3\tau_y^3} \times \left\{ (|M_x - \mu_x| - d_x)(\mu_x - T_x) + \tau_x^2 \cdot \text{sgn}(M_x - \mu_x) \right\} \\ &\quad \times \left\{ (|M_y - \mu_y| - d_y)(\mu_y - T_y) + \tau_y^2 \cdot \text{sgn}(M_y - \mu_y) \right\} \rho\sigma_x\sigma_y \\ &\quad + \frac{1}{18\tau_x^3\tau_y^3} \times (|M_x - \mu_x| - d_x) \times (|M_y - \mu_y| - d_y) \rho^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2. \end{aligned}$$

따라서 일반적인 이변량 공정분포 하에서, 벡터 공정능력지수 C_{pmk} 에 대한 $100(1 - \alpha)\%$ 근사적인 공동신뢰영역

$$n(\hat{C}_{pmk} - C_{pmk})' (\hat{V}_{pmk})^{-1} (\hat{C}_{pmk} - C_{pmk}) \leq \chi^2(2; \alpha)$$

을 설정하는 데 매우 중요한 추정 행렬 \hat{V}_{pmk} 는 공분산 행렬 V_{pmk} 의 플러그-인 추정량으로 다음과 같이 구하면 될 것이다.

물론, 위에서 제시한 $100(1 - \alpha)\%$ 근사적인 공동신뢰영역은 중심이 \hat{C}_{pmkx} 와 \hat{C}_{pmky} 인 타원의 내부로 표현되는 바, 타원의 단축과 장축 그리고 회전정도는 아래에서 계산될 분산 $\hat{\sigma}_{pmk11}$ 와 $\hat{\sigma}_{pmk22}$, 그리고 공분산 $\hat{\sigma}_{pmk12}$ 의 크기에 의해서 결정될 것이다.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{pmk11} &= \frac{1}{9\hat{\tau}_x^6} \left[\left\{ (|M_x - \bar{X}| - d_x)(\bar{X} - T_x) + \hat{\tau}_x^2 \right\}^2 \hat{\sigma}_x^2 \right. \\ &\quad + \left\{ (|M_x - \bar{X}| - d_x)(\bar{X} - T_x) + \hat{\tau}_x^2 \cdot \text{sgn}(M_x - \bar{X}) \right\} (|M_x - \bar{X}| - d_x) \hat{\mu}_{3x} \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (|M_x - \bar{X}| - d_x)^2 (\hat{\mu}_{4x} - \hat{\sigma}_x^4) \right], \\ \hat{\sigma}_{pmk22} &= \frac{1}{9\hat{\tau}_y^6} \left[\left\{ (|M_y - \bar{Y}| - d_y)(\bar{Y} - T_y) + \hat{\tau}_y^2 \right\}^2 \hat{\sigma}_y^2 \right. \\ &\quad + \left\{ (|M_y - \bar{Y}| - d_y)(\bar{Y} - T_y) + \hat{\tau}_y^2 \cdot \text{sgn}(M_y - \bar{Y}) \right\} (|M_y - \bar{Y}| - d_y) \hat{\mu}_{3y} \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (|M_y - \bar{Y}| - d_y)^2 (\hat{\mu}_{4y} - \hat{\sigma}_y^4) \right], \\ \hat{\sigma}_{pmk21} &= \hat{\sigma}_{pmk12} \\ &= \frac{1}{9\hat{\tau}_x^3\hat{\tau}_y^3} \times \left\{ (|M_x - \bar{X}| - d_x)(\bar{X} - T_x) + \hat{\tau}_x^2 \cdot \text{sgn}(M_x - \bar{X}) \right\} \\ &\quad \times \left\{ (|M_y - \bar{Y}| - d_y)(\bar{Y} - T_y) + \hat{\tau}_y^2 \cdot \text{sgn}(M_y - \bar{Y}) \right\} \hat{\sigma}_{12} \\ &\quad + \frac{1}{18\hat{\tau}_x^3\hat{\tau}_y^3} \times \left\{ (|M_x - \bar{X}| - d_x)(\bar{X} - T_x) + \hat{\tau}_x^2 \cdot \text{sgn}(M_x - \bar{X}) \right\} \times (|M_y - \bar{Y}| - d_y) \hat{\sigma}_{14} \\ &\quad + \frac{1}{18\hat{\tau}_x^3\hat{\tau}_y^3} \times (|M_x - \bar{X}| - d_x) \times \left\{ (|M_y - \bar{Y}| - d_y)(\bar{Y} - T_y) + \hat{\tau}_y^2 \cdot \text{sgn}(M_y - \bar{Y}) \right\} \hat{\sigma}_{32} \\ &\quad + \frac{1}{36\hat{\tau}_x^3\hat{\tau}_y^3} \times (|M_x - \bar{X}| - d_x) \times (|M_y - \bar{Y}| - d_y) \hat{\sigma}_{34} \end{aligned}$$

단,

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{kx} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, & \hat{\mu}_{ky} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^k, & k &= 3, 4, \\ \hat{\mu}_{lxy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X})^l (Y_i - \bar{Y})^m], & l, m &= 1, 2, \\ \hat{\sigma}_{12} &= \hat{\mu}_{1x1y}, & \hat{\sigma}_{13} &= \hat{\mu}_{3x}, & \hat{\sigma}_{14} &= \hat{\mu}_{1x2y}, & \hat{\sigma}_{23} &= \hat{\sigma}_{32} = \hat{\mu}_{2x1y}, & \hat{\sigma}_{24} &= \hat{\mu}_{3y}, \\ \hat{\sigma}_{33} &= \hat{\mu}_{4x} - S_x^4, & \hat{\sigma}_{44} &= \hat{\mu}_{4y} - S_y^4, & \hat{\sigma}_{34} &= \hat{\mu}_{2x2y} - S_x^2 S_y^2.\end{aligned}$$

물론, 흔히 현장에서 활용가능한 이변량 정규공정 $\text{BN}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ 하에서, 추정 행렬 \hat{V}_{pmk} 는 공분산 행렬 V_{pmk} 의 플러그-인 추정량으로 보다 구체적으로 다음과 같이 구하면 될 것이다.

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{pmk11} &= \frac{1}{9\hat{\tau}_x^6} \left[\left\{ (|M_x - \bar{X}| - d_x)(\bar{X} - T_x) + \hat{\tau}_x^2 \right\}^2 S_x^2 + \frac{1}{2} (|M_x - \bar{X}| - d_x)^2 S_x^4 \right], \\ \hat{\sigma}_{pmk22} &= \frac{1}{9\hat{\tau}_y^6} \left[\left\{ (|M_y - \bar{Y}| - d_y)(\bar{Y} - T_y) + \hat{\tau}_y^2 \right\}^2 S_y^2 + \frac{1}{2} (|M_y - \bar{Y}| - d_y)^2 S_y^4 \right].\end{aligned}$$

그리고 공분산 항 $\hat{\sigma}_{pmk12} = \hat{\sigma}_{pmk21}$ 은 다음과 같이 계산되어 정리된다.

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{pmk21} &= \hat{\sigma}_{pmk12} = \frac{1}{9\hat{\tau}_x^3 \hat{\tau}_y^3} \times \left\{ (|M_x - \bar{X}| - d_x)(\bar{X} - T_x) + \hat{\tau}_x^2 \cdot \text{sgn}(M_x - \bar{X}) \right\} \\ &\quad \times \left\{ (|M_y - \bar{Y}| - d_y)(\bar{Y} - T_y) + \hat{\tau}_y^2 \cdot \text{sgn}(M_y - \bar{Y}) \right\} \hat{\rho} \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \\ &\quad + \frac{1}{36\hat{\tau}_x^3 \hat{\tau}_y^3} \times (|M_x - \bar{X}| - d_x) \times (|M_y - \bar{Y}| - d_y) (1 + 2\hat{\rho}^2) \hat{\sigma}_x^2 \hat{\sigma}_y^2\end{aligned}$$

단, 4차 중심적률 μ_{4x} 와 μ_{4y} 의 추정량은 이변량 정규분포 $\text{BN}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ 하에서 4차 중심적률을 계산하고 플러그-인하여 각각

$$\hat{\mu}_{4x} = 3\hat{\sigma}_x^2 = 3S_x^2, \quad \hat{\mu}_{4y} = 3\hat{\sigma}_y^2 = 3S_y^2$$

으로 계산, 정리된다. 또한 상관계수 ρ 의 추정량은 표본상관계수 $\hat{\rho}$ 을 의미한다. 물론 위의 과정에 의해 계산된 행렬 $\hat{V}_{pmk} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{pmk11} & \hat{\sigma}_{pmk12} \\ \hat{\sigma}_{pmk21} & \hat{\sigma}_{pmk22} \end{pmatrix}$ 는 행렬 V_{pmk} 의 플러그-인 추정량으로 일치성(consistency)을 갖는 바람직한 추정 행렬임을 쉽게 밝힐 수 있을 것이다.

지금까지 앞에서 전개한 내용들을 바탕으로, 2차원 벡터 공정능력지수 $\mathbf{C}_{pmk} = (C_{pmkx}, C_{pmky})^t$ 에 대한 근사적인 신뢰영역을 그림으로 표현한 수치적인 예를 살펴보기로 한다.

두 품질특성 X 와 Y 에 대한 규격한계와 목표값이 각각 다음과 같다고 하자.

$$\begin{aligned}\text{USL}_x &= 60, & \text{LSL}_x &= 40, & T_x &= 50 (= M_x), \\ \text{USL}_y &= 110, & \text{LSL}_y &= 90, & T_y &= 100 (= M_y).\end{aligned}$$

편의상, 이변량 정규분포 $\text{BN}(\mu_x = 49, \mu_y = 99, \sigma_x^2 = 3^2, \sigma_y^2 = 2^2, \rho = 0.7)$ 로부터 60개의 난수를 생성하여 두 품질특성치들에 대한 자료라고 가정한 후, 앞에서 전개한 내용들을 기초로 벡터 공정능력지수 $\mathbf{C}_{pmk} = (C_{pmkx}, C_{pmky})^t$ 에 대한 90%와 95% 그리고 99% 근사적인 공동 신뢰영역을 구하면 다음의 그림 2와 같다.

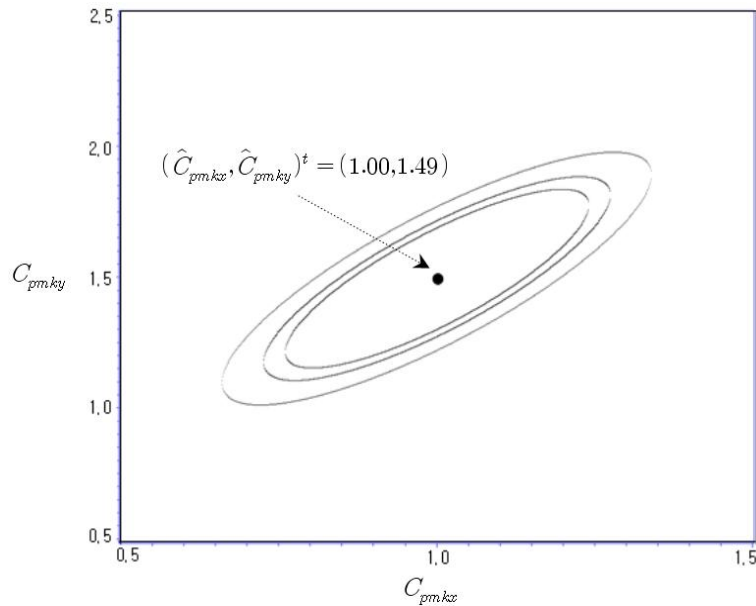


그림 2: 벡터 공정능력지수 C_{pmk} 에 대한 90%(안쪽 타원내부), 95%(가운데 타원내부) 및 99%(바깥쪽 타원내부) 공동 신뢰영역

5. 결론

본 논문에서는 보다 효율적인 3세대 공정능력지수 C_{pmk} 를 2차원으로 확장한 벡터 공정능력지수 C_{pmk} 에 대한 통계적 추론을 위해 플러그-인 추정량과 관련하여 주로 극한 분포이론에 대하여 연구하였다.

먼저 2절에서는 벡터 공정능력지수 $C_{pmk} = (C_{pmkx}, C_{pmky})'$ 의 기본적인 개념과 플러그-인 추정량 \hat{C}_{pmk} 에 대하여 고찰하였다. 3절에서는 논문의 주요 내용 중 하나인 플러그-인 추정량 \hat{C}_{pmk} 과 관련하여 극한 분포결과를 유도하였다. 그리고 4절에서는 앞 절에서 정립한 극한 확률분포를 이용하여 공정능력지수 C_{pmk} 에 대한 근사적인 공동 신뢰영역을 추정, 제시하였고, 가설검정에서도 필요한 공분산 행렬 \hat{V}_{pmk} 를 구체적으로 계산, 연구하였다. 이러한 연구내용들은 보다 정확한 공정능력 분석에 충분히 기여할 수 있으리라 판단된다.

한편, 벡터 공정능력지수 C_{pmk} 에 대하여 논문에서 제시한 근사적인 공동 신뢰영역과 붓스트랩 공동 신뢰영역들을 설정하여 효율성 문제를 모의실험을 통하여 충분히 비교, 분석하는 문제는 좋은 연구 주제가 될 수 있을 것으로 사료된다.

참고 문헌

- Alt, F. B. and Smith, N. D. (1988). *Multivariate Process Control*, In P.R. Krishnaiah and C.R.Rao, Editors, *Handbook of Statistics*, **7**, North-Holland, Amsterdam, 333–351.
- Chan, L. K., Xiong, Z. and Zhang, D. (1990). On the asymptotic distributions of some process capability indices, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **19**, 11–18.
- Cho, J. J., Kim, J. S. and Park, B. S. (1999). Better nonparametric bootstrap confidence interval for process capability index C_{pk} , *Korean Journal of Applied Statistics*, **12**, 45–65.

- Franklin, L. A. and Wasserman, G. S. (1992). Bootstrap lower confidence interval limits for capability indices, *Journal of Quality Technology*, **24**, 196–210.
- Hubele, N. F., Shahriari, H. and Cheng, C. S. (1991). A bivariate process capability vector, *Statistical Process Control in Manufacturing*(J.B. Keats and D.C. Montgomery, eds.), New York, 299–310.
- Kocherlakota, S. and Kocherlakota, K. (1991). Process capability indices: Bivariate Normal distribution, *Communication in Statistics: Theory and Methods*, **20**, 2529–2547.
- Kotz, S. and Johnson, N. L. (1993). *Process Capability Indices*, 1st ed., Chapman & Hall.
- Niverthi, M. and Dey, D. K. (2000). Multivariate process capability, a Bayesian perspective, *Communication in Statistics: Simulation and Computation*, **29**, 667–687.
- Park, B. S., Lee, C. H. and Cho, J. J. (2002). On the confidence region of vector-valued process capability indices C_p and C_{pk} , *Journal of the Korean Society for Quality Management*, **30**, 44–57.
- Pearn, W. L., Kotz, S. and Johnson, N. L. (1992). Distributional and inferential properties of process capability indices, *Journal of Quality Technology*, **24**, 216–231.
- Pearn, W. L., Wang, F. K. and Yen, C. H. (2007). Multivariate capability indices: Distributional and inferential properties, *Journal of Applied Statistics*, **34**, 941–962.
- Shahriari, H. and Abdollahzadeh, M. (2009). A new multivariate process capability vector, *Quality Engineering*, **21**, 290–299.
- Taam, W., Subbaiah, P. and Liddy, J. W. (1993). A note on multivariate capability indices, *Journal of Applied Statistics*, **20**, 339–351.

On the Plug-in Estimator and its Asymptotic Distribution Results for Vector-Valued Process Capability Index C_{pmk}

Joong-Jae Cho^{1,a}, Byoung-Sun Park^b

^aDepartment of Information & Statistics, Chungbuk National University

^bEconomic Statistics Planning Division, Statistics Korea

Abstract

A higher quality level is generally perceived by customers as improved performance by assigning a correspondingly higher satisfaction score. The third generation index C_{pmk} is more powerful than two useful indices C_p and C_{pk} that have been widely used in six sigma industries to assess process performance. In actual manufacturing industries, process capability analysis often entails characterizing or assessing processes or products based on more than one engineering specification or quality characteristic. Since these characteristics are related, it is a risky undertaking to represent the variation of even a univariate characteristic by a single index. Therefore, the desirability of using vector-valued process capability index(PCI) arises quite naturally.

In this paper, we consider more powerful vector-valued process capability index $C_{pmk} = (C_{pmkx}, C_{pmky})^t$ that consider the univariate process capability index C_{pmk} . First, we examine the process capability index C_{pmk} and plug-in estimator \hat{C}_{pmk} . In addition, we derive its asymptotic distribution and variance-covariance matrix V_{pmk} for the vector valued process capability index C_{pmk} . Under the assumption of bivariate normal distribution, we study asymptotic confidence regions of our vector-valued process capability index $C_{pmk} = (C_{pmkx}, C_{pmky})^t$.

Keywords: Vector-valued process capability index, plug-in estimator, limiting distribution, variance covariance matrix, asymptotic confidence region.

This work was supported by Chungbuk National University Research Grant in 2009.

¹ Corresponding author: Professor, Department of Information & Statistics, Chungbuk National University, Cheongju 361-763, Korea. E-mail: jjcho@chungbuk.ac.kr