최대 군위상 분해 부밴드 인접투사 적응필터를 위한 초기 최적 스텝사이즈 해석

On the Initial Optimum Step Size for the MPDSAP Adaptive Filter

김영민*, 손상욱**, 배현덕**, 최 훈*
Young-Min Kim*, Sang-Wook Shon**, Hyeon-Deok Bae**, Hun Choi*

요 약

부밴드 구조에서 투사차원이 P인 전밴드 인접투사 적응필터는 최대 군위상 분해와 노블아이덴티티를 적용함으로써 P개의 적응 부필터로 분해된다. 각각의 적응 부필터는 투사차원이 1인 간단한 계수 갱신식을 갖게 된다. 이러한 부밴드 분해기법은 구현관점에서 가장 실용적인 해법 중 하나이다. 많은 응용에서 활용을 위해 MPDSAP 적응 필터의 최적 스텝사이즈 해석이 필요하다. 본 논문은 MPDSAP 적응 필터의 MSE에 대한 개선된 해석 모델을 제안하고 초기 최적 스텝사이즈를 유도한다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 MSE의 개선된 해석 모델과 유도된 최적 초기 스텝사이즈에 대해 이론과 실험적 결과 사이의 일치함을 확인하였다.

Abstract

In subband structure, the fullband AP adaptive filter with P projection dimension can be decomposed P adaptive sub-filters by applying maximally polyphase decomposition and noble identity. Each adaptive sub-filter has a simple weight update formula with the unit projection dimension. This subband decomposition method is one of the most practical solution in the viewpoint of implementation. For utilization in many applications, it is necessary that analysis for the optimum step size of the maximally polyphase decomposed subband AP(MPDSAP) adaptive filter. In this paper, we present an improved analysis model of mean square error and induce the initial optimum step size for the MPDSAP adaptive filter. Computer simulations show that there is a relatively good match between theory and practice for the improved analysis model of MSE and the induced initial optimum step size.

Keywords : Adaptive filter, Subband affine projection, MPDSAP, MSE, Optimum Step Size

I. 서 론

최근 LMS형 알고리즘의 느린 수렴속도 문제를 해결하기 위해 인접 투사(Affine Projection : AP) 알고리즘이 발표 되었다[1,2]. AP 알고리즘은 과거 입력을 포함한 투사차원 P개의 입력신호 벡터가 생성하는 인접 부평면(affine subspace)으로의 투사를 통해 입력신호를 사전에 백색화(pre-whitening)한다. 이 사전 백색화를 통해 입력 상관도를 감소시키므로 수렴성능이 향상된다. 최근 AP 알고리즘의 성능을 다양하게 해석한 논문들이 발표되었다[3-6]. 이들은 AP 알고리즘의 양적인 통계 해석(quantitative statical analysis)[3]과 빠른 수렴속도를 위해 단위 적응이득(unity adaptive gain)을 적용하여 백색 가우시안 입력(white gaussian input)과 AR(autoregressive) 입력에 대해 통계적 분석(statistical analysis)을 하였다[4-6]. 이러한 AP 알고리즘은 빠른 수렴성능을 위해 역행렬 연산을 해야하므로 많은 계산량이 요구된다. AP 알고리즘의 단점을 극복하기 위해 최대 군위상 분해된 부밴드(subband) 구조의 AP(Maximal Polyphase Decomposed Subband AP : MPDSAP) 알고리즘이 발표되었다[7-9]. MPDSAP 알고리즘은 최대 군위상 분해(polyphase decomposition)와 노블아이덴티티(noble identity)[10]가 적용된 부밴드 구조에서 정규직교 분해필터(orthonormal analysis filters: OAF)에 의해 입력신호의 상관도를 줄임으로써 수렴속도를 향상시킬 수 있다. 또한 적응필터의 길이와 투사차원(projection order)은 최대 군위상 분해기법에 의해 부밴드 수에 비례하여 감소된다. 따라서 계수갱신에 필요한 계산량을 효과적으로 줄일 수 있다. MPDSAP 알고리즘은 부밴드 구조와 데이터 벡터를 기반으로 한 계수 갱신식(weight-updating formula)을 사용하므로 전통적인 AP 알고리즘을 구현함에 있어 실용적인 해(practical solution)로 볼 수 있다. 따라서 MPDSAP 알고리즘이 다양한 응용에서 활용될 수 있도록 안정성과 수렴성능 향상을 위한 스텝사이즈의 최적해 해석이 요구된다.

* 동의대학교 ** 충북대학교
투고 일자 : 2010. 12. 14 수정완료일자 : 2011. 1. 24
게재확정일자 : 2011. 2. 2
* 이 논문은 2009학년도 동의대학교 교내 일반연구비 자원에 의해 연구되었음(2009AA170).

본 논문은 최근 발표된 MPDSAP 알고리즘[8]의 수렴성능에 대한 통계적 해석방법 및 수정된 결과를 바탕으로 MPDSAP 알고리즘의 MSE에 대한 보다 정확한 해석결과를 이끌어냈다. 또한 그 결과로부터 적응 초기에 사용할 최적 스텝사이즈를 해석적으로 유도하고 이의 타당함을 컴퓨터 모의실험을 통해 확인하였다.

II. MPDSAP 알고리즘

군위상 분해와 노블아이덴티티가 적용된 M-부밴드 구조에서 길이 N인 전밴드 AP 적응필터는 등가변환에 의해 $N_s = N/M$ 길이를 갖는 M개의 적응 부필터 (adaptive sub-filter)로 군위상 분해된다[7-9]. AP 알고리즘에서 입력상관도 제거를 위한 입력신호가 생성하는 벡터공간으로의 투사과정은 SAP 알고리즘[7]에서 충분한 수의 직교분해필터 (Orthonormal Analysis Filter : OAF)를 통한 입력신호의 백색화 전처리과정으로 등가는 아니더라도 대체될 수 있다. 따라서 AP 적응필터의 투사차원 P는 M-SAP 적응 부필터에서 $P_s \approx P/M$으로 낮출 수 있다[8,9]. P차원 AP 적응필터에서 $P\times P$ 크기의 입력 데이터 자기상관행렬의 역행렬 연산을 기반으로 하는 계수갱신은 $M=P$로 부밴드 분해된 SAP 적응 부필터에서 $N_s\times 1$ 크기의 입력 데이터 벡터 기반의 계수갱신으로 대체될 수 있다. 이처럼 투사차원과 동일한 수의 부밴드 수를 갖는 최대 군위상 분해된 SAP (Maximally Polyphase Decomposed SAP : MPDSAP) 알고리즘은 AP 알고리즘의 최대 단점인 역행렬 연산을 피할 수 있으므로 실제 구현에 있어 매우 유리하다. MPDSAP 알고리즘은 다음과 같이 쓸 수 있다. [8,9].

$$\boldsymbol{s}(k+1)=\boldsymbol{s}(k)+\mu\boldsymbol{\Phi}(k)[\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{\Phi}^{T}(k)]^{-1}\boldsymbol{\epsilon}(k) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(k)=\begin{bmatrix} \phi_{00}(k) & \phi_{10}(k) & \cdots & \phi_{(M-1)0}(k) \\ \phi_{01}(k) & \phi_{11}(k) & \cdots & \phi_{(M-1)1}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{0(M-1)}(k) & \phi_{1(M-1)}(k) & \cdots & \phi_{(M-1)(M-1)}(k) \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}(k)&=[e_0(k), e_1(k), \cdots, e_{M-1}(k)]^T \\ &=\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{s}^*+\boldsymbol{\zeta}(k)-\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{s}(k)\end{aligned} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\zeta}(k)=[z_0(k), z_1(k), \cdots, z_{M-1}(k)]^T \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\phi_{ij}}(k)=[\phi_{ij}(k)\,\phi_{ij}(k-1)\cdots\phi_{ij}(k-N_s+1)]^T \tag{5}$$

$$\phi_{ij}(k)=\phi_i(Mk-j) \tag{6}$$

여기서 $\boldsymbol{\phi_{ij}}(k)$는 부밴드 분해된 입력신호의 군위상 성분으로 구성된 길이 $N_s\times 1$의 벡터이며 입력 $u(n)$과 원하는 신호 $d(n)$은 길이 L의 직교분해필터 $h_i(k)$에 의해 부밴드 입력신호인 $\phi_i(n)$와 원하는 신호인 $d_i(n)$ for $i=1, 2, \cdots, M-1$으로 분해되며 각각 $\phi_i(n)=h_i^T(n)u(n)$과 $d_i(n)=h_i^T(n)[d(n)+z(n)]$으로 나타낸다. $\boldsymbol{\Phi}(k)$는 입력 데이터 행렬로 $MN_s\times M$ 이다. 또한 $z_i(n)$은 부밴드 분해된 측정잡음 또는 모델링 오차로 iid(independent identically distribution)특성을 갖는 평균이 0(zero)이며 분산이 σ_z^2인 랜덤 프로세스로 입력 $u(n)$과 통계적으로 독립이다. $e_i(k)$는 부밴드 오차신호이며 $\boldsymbol{\epsilon}(k)$와 $\boldsymbol{\zeta}(k)$는 모두 $M\times 1$ 크기의 벡터이다. $\boldsymbol{s}^*$는 길이 N의 미지시스템 (unknown system)의 계수벡터이다[8,9].

III. MPDSAP 알고리즘의 평균 자승 오차

2.1 개선된 평균 자승 오차 거동

입력신호의 부밴드 분해를 위해 파라유니터리(paraunitary) 특성을 갖는 필터뱅크를 사용하였을 때 MPDSAP 알고리즘의 MSE는 부밴드 추정오차들에 대한 평균자승값(mean squared value)의 평균(average)으로 수정되어야 한다[11, pp. 249-250].

$$\begin{aligned}J(k)&=\frac{1}{M}E\{\boldsymbol{\epsilon}^T(k)\boldsymbol{\epsilon}(k)\} \\ &=\frac{1}{M}E\{\boldsymbol{v}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{v}(k)\}-\frac{1}{M}E\{\boldsymbol{v}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{\zeta}(k)\} \\ &\quad-\frac{1}{M}E\{\boldsymbol{\zeta}^T(k)\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{v}(k)\}+\frac{1}{M}E\{\boldsymbol{\zeta}^T(k)\boldsymbol{\zeta}(k)\}\end{aligned} \tag{7}$$

식 (7)의 해석을 위해 다음과 같은 [8]에서 사용한 가정을 적용하였다.

가정 1. 입력 $u(n)$이 OAF에 의해 충분히 분해되었다고 가정하면 부밴드 입력신호 $\{\phi_i(n)\}$와 $\{\phi_j(n)\}$는 $i\neq j$에 대해 확률적으로 직교인 wss(wide sense stationary) 백색가우시안 랜덤프로세스로서 평균이 0(zero)이며 분산은 σ_i^2이다.

가정 2. 부밴드 분해된 입력신호들로 구성되는 입력 행렬 $\boldsymbol{\Phi}(n)$와 적응필터 계수벡터 $\boldsymbol{s}(k)$는 통계적으로 독립이다.

가정 3. 부밴드 분해된 입력신호들로 구성되는 입력행렬 $\boldsymbol{\Phi}(k)$와 $\boldsymbol{\zeta}(k)$는 통계적으로 독립이다.

가정 4. $z_i(k)$와 $z_j(k)$는 $i\neq j$에 대해 확률적으로 직교이고 각 부밴드에서의 $E\{z_i^2(k)\}$는 $i\neq j$에 대해 $E\{z_i^2(k)\}=E\{z_j^2(k)\}$이며 $E\{z_i^2(k)\}=\frac{1}{M}\sigma_z^2$ (for $i=0, \cdots, M-1$)이다.

식 (7)의 우측변 두 번째와 세 번째 항의 $\boldsymbol{\zeta}(k)$는 평균이 0이며 다른 신호와 상관도가 없으므로 우측변 두 번째와 세 번째 항은 제거 가능하다. 따라서 식 (7)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$J(k)=\frac{1}{M}E\{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{v}(k)\}+\frac{1}{M}E\{\boldsymbol{\zeta}^T(k)\boldsymbol{\zeta}(k)\} \quad (8)$$

식 (8)은 [8]의 식 (17)~식 (22)의 유도과정을 통해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$J(k)\approx\frac{1}{M}E\{\boldsymbol{v}^T(k)E\{\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{\Phi}^T(k)\}\boldsymbol{v}(k)\}+\frac{1}{M}E\{\boldsymbol{\zeta}^T(k)\boldsymbol{\zeta}(k)\}$$
$$=\frac{1}{M}tr[\boldsymbol{R}_{\Phi\Phi}(k)\boldsymbol{K}(k)]+\frac{1}{M}E\{\boldsymbol{\zeta}^T(k)\boldsymbol{\zeta}(k)\} \quad (9)$$

여기서 $\boldsymbol{K}(k)=E\{\boldsymbol{v}(k)\boldsymbol{v}^T(k)\}$이다 $\boldsymbol{R}_{\Phi\Phi}(k)=M\sigma_u^2\boldsymbol{I}$ 이므로 식 (9)의 MSE는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$J(k)=\sigma_u^2tr[\boldsymbol{K}(k)]+\frac{1}{M}E\{\boldsymbol{\zeta}^T(k)\boldsymbol{\zeta}(k)\}$$
$$=\sigma_u^2tr[\boldsymbol{K}(k)]+\sigma_z^2 \quad (10)$$

$tr[\boldsymbol{K}(k)]$를 구하기 위하여 [8]의 식 (16)으로부터 계수오차벡터의 상관행렬을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}&E\{\boldsymbol{v}(k+1)\boldsymbol{v}^T(k+1)\}\\&=E\{(\boldsymbol{I}-\mu\boldsymbol{\Phi}(k)[\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T(k))\\&\times\boldsymbol{v}(k)\boldsymbol{v}^T(k)(\boldsymbol{I}-\mu\boldsymbol{\Phi}(k)[\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T(k))\}\\&+\mu E\{(\boldsymbol{I}-\mu\boldsymbol{\Phi}(k)[\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T(k))\\&\times\boldsymbol{v}(k)\boldsymbol{\zeta}^T(k)[\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T(k)\}\\&+\mu E\{\boldsymbol{\Phi}(k)[\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)]^{-1}\boldsymbol{\zeta}(k)\boldsymbol{v}^T(k)\\&\times(\boldsymbol{I}-\mu\boldsymbol{\Phi}(k)[\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T(k))\}\\&+\mu^2E\{\boldsymbol{\Phi}(k)[\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)]^{-1}\boldsymbol{\zeta}(k)\boldsymbol{\zeta}^T(k)\\&\times[\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T(k)\}\end{aligned} \quad (11)$$

또한 부밴드 구조와 가정 4를 고려하면 $E\{\boldsymbol{\zeta}(k)\boldsymbol{\zeta}^T(k)\}$는 대각성분을 제외하고 모두 0이 되며 다음과 같이 수정되어야 한다.

$$E\{\boldsymbol{\zeta}(k)\boldsymbol{\zeta}^T(k)\}=\sigma_z^2\boldsymbol{I}_M \quad (12)$$

식 (11)의 마지막 항은 [8]의 식 (20) ~ 식 (23) 그리고 식 (34)의 결과를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mu^2E\{\boldsymbol{\Phi}(k)[\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)]^{-1}E\{\boldsymbol{\zeta}(k)\boldsymbol{\zeta}^T(k)\}[\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T(k)\}$$
$$=\mu^2\frac{\sigma_z^2}{MN_s^2\sigma_u^2}\boldsymbol{I} \quad (13)$$

식 (11)은 가정 2 ~ 가정 4와 [8]에서의 식 (32) ~ 식 (38)을 적용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\boldsymbol{K}(k+1)=\boldsymbol{K}(k)-2\alpha\mu\boldsymbol{K}(k)+\beta\mu^2tr[\boldsymbol{K}(k)]\boldsymbol{I}+\tau\mu^2\boldsymbol{I} \quad (14)$$

여기서 α, β, τ는 [8]의 결과와 달리 $\alpha=1/N_s$, $\beta=1/(MN_s^2)$, $\tau=\sigma_z^2/(M^2N_s^2\sigma_u^2)$과 같이 수정된다.

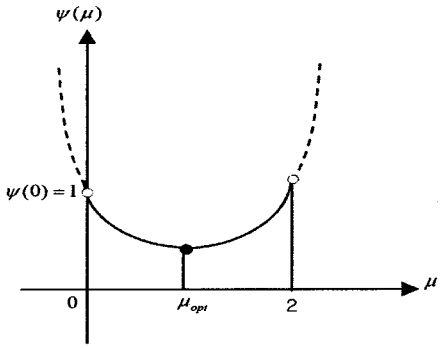

그림 1. μ와 $\psi(\mu)$의 관계
Fig. 1. The relation between μ and $\psi(\mu)$

식 (14)에 대각합 (trace)을 취하고 정리하면 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$tr[\boldsymbol{K}(k+1)]=(1-2\alpha\mu+N\beta\mu^2)tr[\boldsymbol{K}(k)]+N\tau\mu^2 \quad (15)$$

식 (15)는 닫힌 식으로서 $tr[\boldsymbol{K}(k)]$을 다음과 같다.

$$tr[\boldsymbol{K}(k+1)]=(1-2\alpha\mu+N\beta\mu^2)tr[\boldsymbol{K}(k)]+N\tau\mu^2 \quad (16)$$

식 (16)은 간단한 연산에 의해 다음과 같이 $tr[\boldsymbol{K}(k)]$으로 정리할 수 있다.

$$tr[\boldsymbol{K}(k)]=\psi^k tr[\boldsymbol{K}(0)]+N\tau\mu^2\sum_{l=0}^{k-1}\psi^l \quad (17)$$

여기서 $\psi=1-2\alpha\mu+N\beta\mu^2$이고 $tr[\boldsymbol{K}(0)]=\boldsymbol{v}^T(0)\boldsymbol{v}(0)$ 이다.

식 (10)에서 $E\{\boldsymbol{\zeta}^T(k)\boldsymbol{\zeta}(k)\}=\sigma_z^2$이므로 식 (10)에 위의 결과를 대입하면 MPDSAP의 MSE를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J(k)\equiv\sigma_u^2tr[\boldsymbol{K}(k)]+\sigma_z^2$$
$$=\sigma_u^2\psi^k\,tr[\boldsymbol{K}(0)]+N\tau\sigma_u^2\mu^2\frac{1-\psi^k}{1-\psi}+\sigma_z^2 \quad (18)$$

식 (17)에서 수렴할 조건은 $|\psi|<1$이므로 적응이득 파라미터 μ의 범위는 $0<\mu<2$이다. 또한 ψ는 적응이득 파라미터가 고정일 때 $1/N_s=M/N$에 의존하므로 부밴드 수 M이 증가할수록 ψ는 작아지며 $J(k)$는 ψ^k의 함수이므로 ψ가 작을수록 수렴속도는 증가한다.

정상상태에서 MPDSAP 적응필터의 MSE를 구하기 위해 $k\rightarrow\infty$ 일 때의 극한 개념을 도입하면 식 (18)은 다음과 같이 된다.

$$\lim_{k\rightarrow\infty}J(k)=\sigma_u^2\,tr[\boldsymbol{K}_\infty]+\sigma_z^2 \quad (19)$$

식 (19)의 $tr[\boldsymbol{K}_\infty]$을 구하기 위해 식 (19)에 $k\rightarrow\infty$ 일 때의 극한 개념과 대각합을 적용하여 정리하면

$$tr[\boldsymbol{K}_\infty]=\frac{\mu\sigma_z^2}{\sigma_u^2(2-\mu)} \quad (20)$$

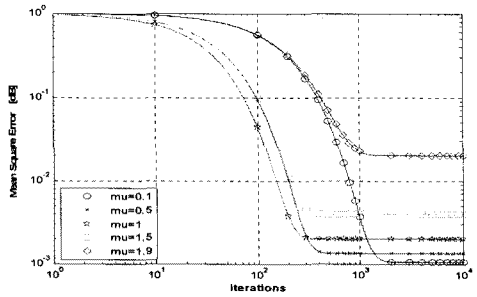

그림 2. 스텝사이즈별 MSE 이론 곡선
Fig. 2. Theoretical MSE curves for different step sizes (N=64, M=2, σ_u^2=1, SNR = 30dB)

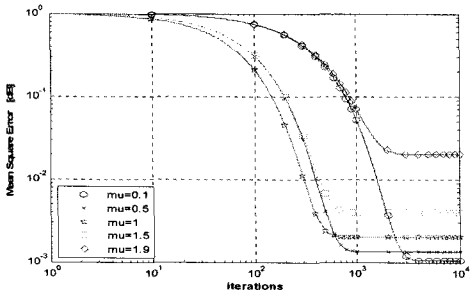

그림 3. 스텝사이즈별 MSE 이론 곡선
Fig. 3. Theoretical MSE curves for different step sizes (N=128, M=2, σ_u^2=1, SNR = 30dB)

식 (20)의 결과를 사용하여 식 (19)를 다시 쓰면

$$\lim_{k\to\infty} J(k) = \left(1+\frac{\mu\sigma_u^2}{\sigma_u^2(2-\mu)}\right)\sigma_z^2 \tag{21}$$

식 (21)에서 스텝사이즈가 클 때 (2에 가까울수록) 정상상태에서 MSE는 우변의 두 번째 항에 의해 증가한다. 반면 스텝사이즈

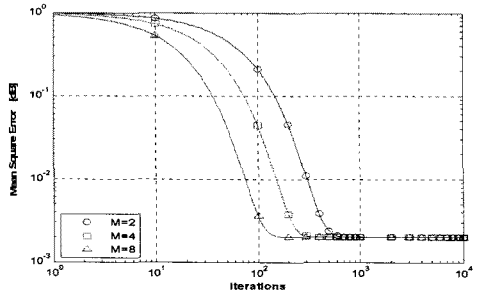

그림 4. 부밴드 수별 MSE 이론 곡선
Fig. 4. Theoretical MSE curves for different numbers of subbands (N=128, M=2, 4, 8, σ_u^2=1, μ=1, SNR = 30dB)

가 0(zero)에 가까울수록 두 번째 항은 무시될 수 있다. 따라서 MSE는 MMSE(minimum mean square error)인 σ_z^2에 접근하게 된다. 또한 MMSE는 부밴드 수와 상관없음을 알 수 있다.

2.2 최적 초기 스텝사이즈 해석

2.1절에서 개선된 식 (18)의 MPDSAP의 평균자승오차(mean square error : MSE)를 이용하여 MPDSAP의 MSE를 최소로 하는 초기 최적 스텝사이즈를 해석한다. 먼저 $J(k)$가 최소가 되기 위한 조건은 식 (18)에서 $tr[\boldsymbol{K}(k)]$를 최소로 만드는 조건과 같다. 그런데 $tr[\boldsymbol{K}(k)]$는 ψ의 거듭제곱 형태이므로 ψ의 최소를 구하게 되면 $tr[\boldsymbol{K}(k)]$ 또한 최소가 된다. 식 (17)로부터 $\psi = 1-2\alpha\mu+N\beta\mu^2$이므로 ψ는 μ에 대한 2차 함수이다. 필터 길이 N, β가 항상 양수이므로 ψ는 아래로 볼록한 볼록함수(convex function)형태를 갖는다. ψ와 μ의 관계는 그림 1과 같다. MSE가 최소가 되도록 하는 $\psi(\mu)$의 최소값은 $\psi(\mu)$를 μ에 대해 미분하여 그 결과가 0 (zero)이 되는 μ를 구하면 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{d\mu} &= 0\\ &= 2N\beta\mu - 2\alpha\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\mu_{ini}^* &= 2\alpha/(2N\beta)\\ &= 2\frac{1}{N_s}\Big/\left(2MN_s\frac{1}{MN_s^2}\right)\\ &= 1\end{aligned} \tag{23}$$

식 (23)의 결과는 $k=0$(적응 초기)에서 평균자승오차 $J(1)$를 최소로 만드는 값으로 적응 필터가 가장 빠른 수렴속도를 갖도록 한다. 즉, MPDSAP 적응필터의 수렴속도 관점에서 최적스텝사이즈 μ_{ini}^*=1이다.

Ⅳ. 모의실험

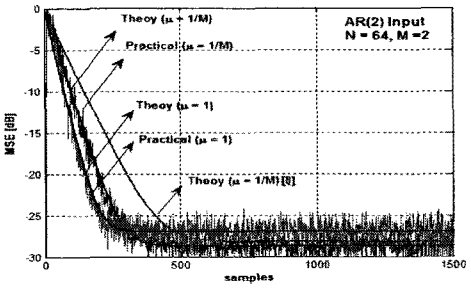

그림 5. 스텝 사이즈별 MSE 곡선
Fig. 5. MSE curves for different step sizes (AR(2) Input with $a=[0.95,-0.35]^T$, N = 64, M = 2, σ_u^2 = 1, SNR = 30dB)

개선된 평균자승오차와 최적 초기스텝사이즈의 유효성을 확인하기 위해 시스템 식별 모델을 고려한 모의실험을 하였다. 시스템 식별 모델의 미지 시스템은 차량 내에서 측정한 반향경로를 길이 N으로 잘라서 사용하였으며 부밴드 분해를 위해 여현변조 필터뱅크(cosine modulated filter bank)를 사용하였다. 입력신호는 [8]에서 사용한 계수 $a=[0.95,-0.35]$를 갖는 AR(2) 프로세스(process)로 다음과 같다.

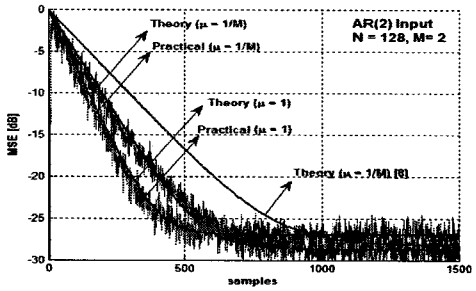

그림 6. 스텝 사이즈별 MSE 곡선

Fig. 6. MSE curves for different step sizes (AR(2) Input with $a=[0.95,-0.35]^T$, N = 128, M = 2, σ_u^2 = 1, SNR = 30dB)

$$u(n)=\sum_{i=1}^{q}a_i u(n-i)+f(n) \tag{24}$$

여기서 $f(n)$은 평균이 0(zero)이고 분산이 σ_f^2인 wss(wide sense stationary) 백색 프로세스로서 σ_f^2는 σ_u^2=1이 되도록 모델링되었다.

그림 2 ~그림 4는 필터 길이(N)과 부밴드 수(M)에 따른 최적 초기 스텝사이즈별 수렴성능을 비교한 결과이다. 그림 2 ~ 그림 3의 결과에서 스텝사이즈가 2에 가까워질수록 정상상태오차는 증가하며 0에 가까울수록 MMSE에 근접한다. 또한 스텝사이즈가 1일 때 수렴속도는 가장 빠르다. 이는 식 (21)과 식(23)의 이론적 결과와 일치한다. 그림 4는 부밴드 수별 MPDSAP 적응필터의 수렴성능을 비교한 결과이다. 부밴드 수(M)가 증가할수록 수렴속도는 향상된다. 이와 같은 결과는 다음과 같이 설명될 수 있다. [8]의 식(25)에서 제시한 바와 같이 적응필터의 평균계수오차(mean weight error)는 $\left(1-\mu\frac{M}{N}\right)^k$에 비례하므로 $\mu=1$일 때 M이 증가함에 따라 수렴속도는 감소하게 되기 때문이다. 또한 부밴드 수에 상관없이 정상상태오차가 같게 되는 것은 식 (21)에서 유도된 결과와 일치한다.

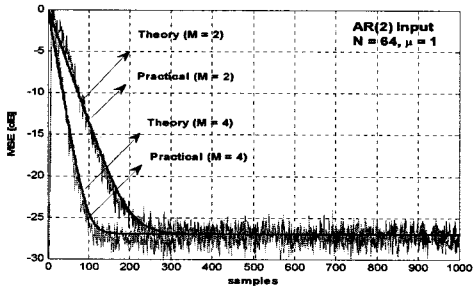

그림 7. 부밴드 수별 MSE 곡선

Fig. 7. MSE curves for different numbers of subbands (AR(2) Input with $a=[0.95,-0.35]^T$, N = 64, M = 2, 4, σ_u^2 = 1, SNR = 30dB)

그림 5와 그림 6는 부밴드 수 M=2일 때 필터길이 N=64, 128에 대해 [8]의 결과와 식 (18)에서 개선된 이론적 MSE를 비교한 결과이다. 유도한 이론적 MSE와 실험적 MSE의 일치도를 확인한 결과 [8]의 결과에 비해 식 (18)에서 개선된 MSE가 실험적 MSE 곡선과 보다 잘 일치한다. 또한 수렴 속도 측면에서도 최적 초기 스텝사이즈를 사용하였을 때 [8]에서는 k=300(그림 5), k=600(그림 6)에서 수렴하지만 제안한 방법은 k=250(그림 5), k=500(그림 6)에서 수렴하는 것을 알 수 있다. 입력신호의 분산이 $\sigma_u^2=1$, μ=1일 때 제안한 방법에서 정상상태오차($J_{ex}(k)$)는 -28.5dB로 식 (21)로부터 계산된 결과와 일치한다. 그림 7은 부밴드 수($M=2,4$)별 식 (18)에서 유도된 이론적 MSE의 유효성을 평가한 결과이다. 그림 4의 결과와 동일하게 부밴드 수가 증가할수록 수렴속도는 향상되며 부밴드 수와 정상상태오차는 관계없음을 확인할 수 있다. 그림 5 ~ 그림 7의 결과로부터 개선된 MSE의 결과를 이용하여 MPDSAP 적응필터의 수렴성능에 대한 정확한 예측이 가능함을 알 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 기존에 발표된 최대 군위상 분해 부밴드 인접투사 알고리즘의 MSE에 보다 개선된 해석모델과 수렴속도 관점에서 최적의 초기 스텝사이즈를 제시하였다. 개선된 MPDSAP 적응필터의 MSE 해석모델로부터 적응필터의 수렴속도는 부밴드 수가 증가할수록 향상되지만 정상상태오차는 동일함을 해석적으로 확인하였다. 또한 적응필터가 가장 빠르게 수렴할 수 있도록 하는 최적의 초기 스텝사이즈는 $\mu_{ini}^{*}=1$임을 해석적으로 유도하였다. 결과로부터 MPDSAP 적응 필터의 최적 초기 스텝사이즈는 일반적인 LMS형 알고리즘의 최적 초기 스텝사이즈와 달리 필터 길이에 제약이 없다. 개선된 MSE의 결과를 이용하면 MPDSAP 적응필터의 수렴성능에 대한 정확한 예측이 가능하다. 또한 MPDSAP 알고리즘의 수렴성능을 개선하기 위해 적응 순간별 최적 스텝사이즈를 적용하면 수렴성능이 개선될 것이다.

참고 문헌

[1]S. Haykin, Adaptive Filter Theory, 4th Ed., NJ: Prentice-Hall, 2002.

[2]K. Ozeki and T. Umeda, "An Adaptive Filtering Algorithm using an Orthogonal Projection to an Affine Subspace and Its Properties," Electron. Comm. Jap., vol 67-A, no. 5, pp. 19-27, 1984.

[3]M. Rupp, "A family of filter algorithms with decorrelating properties",IEEE Trans. Signal Process., vol. 46, no. 3, pp. 771-775, Mar. 1998.

[4]N. J. Bershad, D. Linebarger, and S. McLaughlin, "A stochastic analysis of the affine projection algorithm for gaussian autoregressive inputs", in Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing, vol. 6, May 2001, pp. 3837-3840.

[5]S. J. M. Almeida and J. C. M. Bermudez, ""A new stochastic analysis of the affine projection algorithm for gaussian inputs and large number of coefficients,"" in Proc. Int. Telecommunications Symp. ITS'02, Natal, Brazil, Sep. 2002.

[6]S. J. M. de Almeida, J. C. M. Bermudez, N. J. Bershad, and M. H. Costa, "A statistical analysis of the affine projection algorithm for unity step size and autoregressive inputs",IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers, vol. 52, no. 7, pp. 1394-1405, Jul. 2005.

[7]H. Choi and H. D. Bae, "Subband affine projection algorithm for acoustic echo cancellation system," Eurasip Jour. on ASP, vol. 2007, Article ID 75621, doi: 10.1155/2007/75621, 2007.

[8]최 훈, 배현덕, "최대 다위상 분해 부밴드 인접투사 적응필터의 수렴 거동 해석", 전자공학회, 제 46권 SP편 제 6호, pp.880-891, 2009.

[9]김영민, 최 훈, "MPDSAP 적응필터를 위한 MSE의 통계적 해석", 해양정보통신학회, 2009

[10]P. P. Vaidyanathan, Multirate System and Filter Banks, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.

[11]K. A. Lee, W. S. Gan, and S. M. Kuo, "Mean-Square performance analysis of the normalized subband adaptive filter", in Proc. 40th Asilomar Conf. Siganls, Syst. Comput., ACSSC06, pp. 248-252, Nov. 2006.

김 영민(Young-min Kim)

2009년 2월 동의대 전자공학과(공학사)
2009년 ~ 현재 동의대 전자공학과(석사과정)
※주관심분야 : 적응신호처리, 다중신호처리 FPGA 구현

손 상욱(Sang-wook Sohn)

2004년 2월 충북대 전자공학과(공학사)
2006년 2월 충북대 전자공학과(공학석사)
2006년 ~ 현재 충북대 전기공학과(박사수료)
※주관심분야 : 적응신호처리, 암묵신호처리 FPGA 구현, 전력품질

배 현덕(Hyeon-deok Bea)

1977년 한양대 전자공학과(공학사)
1980년 서울대 전자공학과(공학석사)
1992년 서울대 전자공학과(공학박사)
1994년 ~ 1995년 미국 시라큐스 대학 방문교수
1987년 ~ 현재 충북대학교 전기공학과 교수
※주관심분야 : 적응신호처리, 다중신호처리, 신호처리 알고리즘 응용

최 훈(Hun Choi)

1996년 8월 충북대 전자공학과(공학사)
2001년 2월 충북대 전자공학과(공학석사)
2006년 8월 충북대 전자공학과(공학박사)
1995년 ~ 2008년 LG 반도체
2006년 9월 ~ 2008년 2월 한국표준과학연구원 Post-Doc.
2008년 3월 ~ 현재 동의대학교 전자공학과 조교수
※주관심분야 : 적응신호처리, 다중신호처리, 계측시스템, 신호처리 알고리즘 응용