대한수학교육학회지 <학교수학> 제 13 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.13, No.1 65-88. Mar. 2011

# 미적분학의 기본정리에 대한 교사의 Folding Back 사고 모형 제안

김 부 미* · 박 지 현**

본 연구에서는 먼저 수학사에서 미적분학의 기본정리의 발달 과정을 고찰하고 기하적, 대수적, 형식적 관점에서 그 발생과정을 구분하여 배열한 다음, 이를 바탕으로 학생들이 겪을 수 있는 인식론적 장애와 교과서의 관련 내용을 분석하였다. 그리고 미적분학의 기본정리와 관련된 수학사, 학생들의 오류, 교과서 분석 내용을 바탕으로 미적분학의 기본정리를 학생들에게 의미충실하게 지도할 수 있도록 교사의 'folding back 사고 모형'을 개발하였다([그림 Ⅴ-1] 참조). 'folding back 사고 모형'은 미적분학의 기본정리와 관련된 수학사, 학생들의 오류, 교과서 분석 내용을 바탕으로 교사가 어떤 교수학적 중재를 활용하는지를 결정하는 단계와 미적분학의 기본정리 개념의 역사발생적 배열 및 학생의 개념 이해 수준을 고려하여 재구성한 '발생적 이해 수준에 따른 개념 모형'([그림 Ⅴ-2])을 중심으로 제작되었다. 'folding back 사고 모형'의 교수학적 중재 단계에서는 교사가 실제 수업을 설계할 때 활용할 수 있는 자기질문 형식의 'folding back 사고의 적용 요령'(<표 Ⅴ-1>)을 개발하여 제시하였다. 본 연구에서 제안한 'folding back 사고 모형'은 Pirie-Kieren(1991)의 이론에서 제시된 folding back 개념을 활용하여 교사가 실제로 수학 수업을 설계할 때 수학사와 학생의 오류를 고려할 수 있도록 개발된 사고 모형이다. 이는 수학 교사의 전문성 신장을 이끌고 학생에게는 교과 내용을 배우면서 사고력을 향상 시킬 수 있는 수업을 제공하는데 기여할 수 있을 것이다.

## Ⅰ. 서론

2007 개정 수학과 교육과정에서는 미적분 개념이 이공계열로 진학하는 학생들 뿐 만 아니라 인문사회 계열을 희망하는 학생들도 이수하도록 편성되어 있다. 이는 미적분이 진로에 관계없이 학생들에게 변화하는 현상에 대한 이해와 해석 능력을 길러주기 위한 매우 중요한 개념임을 의미하는 것이다. 실제로 미적분은 사회현상과 자연현상을 설명하기 위해 유용하게 활용되고 있으며, 학교수학에서도 단순히 미분법과 적분법의 공식만 알고 이를 적용하기 보다는 미분과 적분의 의미를 잘 이해하고 변화현상을 미분과 적분 개념을 활용하여 이해하고 분석하며, 문제를 해결할 수 있게 지도할 것을 권고하고 있다(교육과학기술부, 2008).

학교수학에서 다루는 미적분의 여러 가지 개념들 중 미적분학의 기본정리는 수학사에서 독립적으로 발달해 온 미분과 적분을 서로 역의 과정이라는 관계로 통합하여 학생들이 미적분을 수학적으로 이해할 수 있게 하는 기초적이고 핵심적인 정리이다. 그러나 정연준(2010)에 의하면, 학교수학에서는 미적분학의 기본정리가 직관적으로 다루어지면서 '변화량-변화율' 관계가 명시적으로 다루어지지 않고 역연산 관

* 한국교육과정평가원(bumi71@naver.com)
** 이화여자대학교 대학원(ph210@hanmail.net)

계만을 강조하고 있으며, 학생들은 부정적분을 이용한 정적분 계산법의 숙달에 치중한다. 이는 미적분학의 기본정리의 알고리즘이 수학의 다른 복잡한 공식들에 비해 상대적으로 간단하기 때문에 단순한 사고를 선호하는 인간의 성향에 따라 학생들이 공식을 암기하고 이를 기계적으로 활용하여 문제를 해결하는 것과 관련이 있을 수 있다. 학생들이 미적분학의 기본정리를 잘 이해하여 문제를 해결하는 것처럼 보이지만, 실제 학생들의 미분과 적분에 대한 이해를 분석한 연구를 살펴보면, 학생들은 미적분학의 기본정리를 명확히 이해하지 못하고 있으며 미적분 문제를 해결하는 과정에서 여러 가지 장애가 발생하고 있다(조완영, 2006; 김민경, 2007; Orton, 1983).

이러한 현상이 발생하는 이유는 첫째, 미적분학의 기본정리를 표현하는 기호가 나타내고자 하는 기본 아이디어는 간단하다고 하더라도 그에 압축된 개념이 복잡하기 때문이다. 따라서 추상과 기호를 지나치게 사용하는 지적 과정으로 인하여 미분과 적분의 관계가 그 의미를 상실한 채 학생들에게 이해되지 않도록 하기 위해 '미적분학의 기본정리'를 중심으로 수학사에서 미적분의 발생 과정을 살펴볼 필요가 있다. 둘째, 교사들이 미적분학의 기본정리에서 다루는 미분과 적분의 함축적인 주제를 이미 내면화하여 숙달하고 있으므로 은연중에 자신의 학생도 그렇게 하기를 기대하기 때문이다. 박희진(2007)에 의하면, 미분계수의 개념과 의미, 접선 개념, 변곡점에서의 접선, 극값의 개념, 위치와 속력의 이해에 대한 학생들의 오류 비율과 교사들이 그러한 학생들의 오류를 인식하는 비율은 서로 상당한 차이가 있는 것으로 나타났다. 셋째, 미적분학의 발달사에서 나타났던 장애들을 학생들이 미적분을 학습할 때 필연적으로 만나기 때문일 수도 있다. 그러나 현실적으로 교사가 인식론적 장애를 적절히 취급할 수 있는지를 확인하기 어렵고 이에 대한 연구도 거의 없는 실정이다.

Brousseau는 어떤 특정한 맥락에서는 성공적이고 유용했던 지식으로서 학생의 인지 구조의 일부가 되었지만 새로운 문제 상황이나 더 넓어진 문맥에서는 부적합해진 지식을 인식론적 장애라고 하였다. 장애를 만나면 그것을 극복하기 위한 정당화의 상황이 필연적으로 나타나게 된다. 인식론적 장애는 지식의 형성과정에서 필연적으로 나타나는 장애이고, 학생이 개념을 학습하는 과정에서도 나타나게 되므로 이에 따른 교수학적 처치가 필요하다. 교수학적 처치의 한 방법으로서 Freudenthal은 수학 개념이 현실 세계에서 활용되는 문맥에서 학생의 현실에 맞도록 그 개념의 역사적 발달과정을 재조직하여 교육과정을 구성해야 한다고 주장하였다. 그리고 Ely(2007)는 학생들의 인식론적 장애를 분류하고 이를 역사적 발달과정과 비교하여 발생적 배열로 군집화한 뒤 학생의 인지적 발달과 역사적 발달 사이에 유사성이 있음을 밝혔다. 이 때, 발생적 배열은 수학사에서와 같이 순차적으로 나타날 수도 있지만 학습하려는 핵심 개념을 배우기 전에 존재하던 서로 다른 인식론적 장애를 극복하는 순서와 상관이 없을 수도 있다. 또한 서로 다른 인식론적 장애가 모두 학습하려는 핵심 개념에 대한 장애이지만 어떤 것도 핵심 개념 구성에 반드시 필수적이지는 않을 수도 있다.

현장에서 교사가 역사발생적 원리에 따른 교육 연구 결과와 학생들의 인식론적 장애를 고려한 Ely(2007) 등의 연구 결과 등을 수정 없이 수학 수업에 적용하는 것은 쉽지 않을 수 있다. 또한 수학사나 역사발생적 원리를 실제로 활용하여 수업을 설계하기 위해 사고 실험 등을 하려고 할 때, 교사가 가르치고자 하는 수

학적 아이디어들이 발달한 수학사적 배경을 어떤 관점에서 분석하고 어떻게 배열하여 학생의 행동과 연결하여 적절한 교수학적 방법을 사용해야 할지 등을 결정할 수 있도록 돕는 구체적인 방안을 제시하는 연구도 많지 않다. 그러나 학생들의 인식론적 장애를 교사가 지도해야 할 개념으로 본다면, 교사는 수학사를 파악하고 학생들의 인식론적 장애를 분류하여 가르치고자 하는 개념들에 대한 발생적 배열을 만들 수 있어야 할 것이다. 특히, 복잡한 개념을 가르치고자 할 때 교사는 가르치고자 하는 개념의 발생적 배열을 고려할 수 있어야 적절한 교수 전략과 수업상황을 설계할 수 있고 학생의 선행지식의 파악과 학습 동기 유발 및 수업에의 밀착도를 높일 수 있을 것이다.

이러한 관점에서, 본 연구는 수학사에서 미적분학의 기본정리의 발달 과정을 고찰하고 이를 바탕으로 학생들이 겪을 수 있는 인식론적 장애와 교과서의 내용을 분석하고자 한다. 그런 다음 교사가 미적분학의 기본정리의 발생과 관련된 수학사, 학생들의 오류, 교과서 분석 내용을 바탕으로 미적분학의 기본정리를 학생들에게 의미충실하게 지도할 수 있도록, 관련 개념들의 이해 수준 및 학생들의 오류를 고려하여 수업에서 활용할 수 있는 사고 모형(folding back 사고 모형)을 개발하고자 한다. 미적분학의 기본정리와 같이 여러 개념들이 결합되어 있는 함축적인 내용을 수업할 때 수학 교사가 교과 내용이 많은 정보들로 이루어져 있다고 보고 수업 내용을 가능한 많이 제시하려는 것도 중요할 수 있지만, 이때 학생들은 비교적 수동적으로 내용만 흡수하려고 할 것이다. 따라서 본 연구에서는 교사가 여러 지식이 함축되어 나타나는 미적분학의 기본정리와 같은 개념을 가르치고자 할 때 교과서의 내용뿐만 아니라 수학사와 학생들의 인식론적 장애를 수업에 어떻게 녹여서 활용할 수 있을지에 대한 구체적인 모델인 folding back 사고 모형을 제안함으로써 학생들의 사고를 자극하고 논의를 활성화할 수 있는 수업 설계 방안을 모색하고자 한다.

## II. 미적분학의 기본정리에 대한 분석

### 1. 수학적 분석

도함수와 적분 개념들 사이의 관계에 관한 두 개의 정리가 있다. 하나는 도함수를 적분하는 것이고, 다른 하나는 적분을 미분하는 것이다. 이 정리들은 미적분학의 기본정리라 하며, 이에 의하면 미분과 적분의 연산은 서로 역의 관계에 있으나 간과해서는 안 될 약간의 난해함이 있다(Bartle & Sherbert, 2008).

**<미적분학의 제1기본정리>**
구간 $[a,b]$ 위에 정의된 함수 $f$가 연속일 때,
$F(x)=\int_a^x f(t)dt$는 $[a,b]$위에 미분가능하며, $F'(x)=f(x)$이 성립한다.

미적분학의 제1기본정리는 상한이 변수인 적분을 미분하고자하는 기본정리라 볼 수 있다. 미적분의 제1기본정리에 따르면, $F(x)$는 $f(x)$의 부정적분이며, 부정적분은 정적분에 의해 표현될 수 있으므로, 연속함수의 부정적분의 존재성이 보장된다. 즉, 리만합의 극한으로 정의된 정적분과 미분이 역연산의 관계에 있음을 보여주며, 넓이를 구하는 방법과 접선의 기울기를 구하는 방법을 연결시킨다. 제2기본정리에서는, $f$의 부정적분을 찾으면 $f$의 정적분

을 계산할 수 있으며, 부정적분을 찾을 때는 미분 과정의 역을 이용하게 됨을 알 수 있다. 정적분, 즉 넓이를 구하기 위해 부분합을 계산하고 그 극한을 구하는 복잡한 과정(구분구적법)을 거치지 않고, 미분 과정의 역을 적용(부정적분)하기만 하면 된다는 것을 보여준다(한대희, 1999).

**<미적분학의 제2기본정리>**

구간 $[a,b]$ 위에 정의된 함수$f$가 연속이고 동일한 구간에서 미분가능한 함수 $F$에 대하여 $F'(x)=f(x)$이면, $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$이 성립한다.

미적분학의 제2기본정리는 적분을 계산하는 방법에 대한 이론적 기초를 제공해준다. 제2기본정리는 세 가지 가정 '(a)$F$는 $[a,b]$에서 연속이다., (b)모든 $x\in[a,b]\setminus E$에 대하여 $F'(x)=f(x)$이다., (c)$f$가 $R[a,b]$에 속한다.'를 만족하는 $[a,b]$에 포함되는 유한집합 $E$와 함수 $f$, $F$: $[a,b]\to R$가 존재한다고 가정할 때 성립한다. 즉, 함수 $F$가 $[a,b]$의 모든 점에서 미분가능하면 가정(a)는 자동적으로 만족된다. 만일 $f$가 어떤 점 $c\in E$에서 정의되지 않으면 $f(c)=0$으로 취한다. 비록 $F$가 $[a,b]$의 모든 점에서 미분가능할지라도 조건(c)는 자동적으로 만족되지는 않는다. 왜냐하면 $F'$이 리만적분가능하지 않는 함수들 $F$가 존재하기 때문이다.

그런데 제2기본정리에서는 제1기본정리와 다른 관점에서 부정적분을 이용한다. 제2기본정리에서는 정적분과 다른 방법인 미분 과정을 거꾸로 이용하여 부정적분을 찾는다. 제1기본정리에 의해서 존재성이 보장된 부정적분은 정적분에 의해서 구성된 것이기 때문에, 이 부정적분을 이용하여 정적분을 계산할 경우 항등식이 나온다(Belding & Mitchell, 1991). 따라서 제1기본정리에 의해 부정적분의 존재성이 보장된 연속함수에 대해서도 미분의 역에 의해 부정적분을 찾지 못하면, 미적분학의 제2기본정리에 의해 정적분을 계산하지 못한다. 정적분에 의해 구성된 것과 다른 부정적분을 알고 있을 수 있다는 것이 미적분학의 제2기본정리의 요점이다(Spivak, 1980).

## 2. 학교 수학에서 미적분학의 기본정리

학교수학에서 미분과 적분 지도의 목적은 함수적 사고와 합리적인 문제해결 능력 및 태도를 기르고 이를 활용하여 실생활에 관련된 여러 가지 문제를 해결할 수 있도록 하는 데 있다. 미적분 단원은 미분을 배우고 부정적분, 구분구적법, 정적분의 순으로 구성되어 있으며 이와 같은 구성은 미분과 적분의 밀접한 관련성을 유지시켜준다는 장점이 있지만 미분의 개념이 형성되지 않은 학생들에게 적분을 단지 미분의 역이라는 개념으로 정의를 하게 됨으로써 적분의 의미 탐구보다는 원시함수를 이용한 계산을 강조하게 되는 경향이 있다.

2007 개정 수학과 교육과정에 따른 '미적분과 통계 기본' 교과서는 총 13종이고, '적분과 통계' 교과서는 총 10종이다. 이들 교과서에서 미적분학의 기본정리는 <표 Ⅱ-1>과 같이 정적분에 대한 학습 과정에서 미분과 적분 사이의 관계를 수학적으로 정리하는 하는 데에 핵심이 되는 내용으로 지도되고 있다.

교과서에서 미적분학의 기본정리가 지도되는 과정을 구체적으로 분석해보면, 학생들은 고등학교에 올라오기 이전에 이동 거리를 그래프에서 넓이로 표현할 수 있음을 배우면서 거리와 넓이 개념을 연결하고, 이후 속도 그래프에 대한 학습에서 속도와 이동 거리 사이의 관계에

대해서 이해하게 된다. 그리고 고등학교 2학년 때 미분을 학습하는 과정에서 증분이라는 용어를 통해 변화량을 학습하고, 증분을 이용해 평균변화율을 정의하면서 변화량과 변화율의 관계를 인식하게 된다. 그러나 이 둘 사이의 관계에 대한 학습은 평균변화율을 정의할 때 증분을 사용하고, 평균변화율의 의미를 이해하는데 그치고 있을 뿐 미적분학의 기본정리에 대한 아이디어로 연결되지는 못하고 있다. 미분에 대한 학습이 끝난 이후에 적분 단원이 시작되면서 미분의 역연산으로서 부정적분을 학습한 뒤 극한을 이용한 구분구적법의 원리에 대해 학습한다. 구분구적법을 이용하여 도형의 넓이와 부피를 구할 때 구분구적법을 유계인 폐구간에서 정의된 연속함수로 일반화하여 정적분을 직관적으로 정의함으로써, 구분구적법이 수열의 극한값으로 넓이를 새롭게 정의하는 맥락을 충분히 인식하지 못하게 되고 있다.

개정된 교과서에서 미적분의 기본정리가 전개되는 양상을 살펴보면, 도형의 넓이와 부피를 이용한 구분구적법에 대한 설명으로 시작하여 정적분에 대한 정의를 배우고 미적분의 기본정리에 해당하는 적분과 미분의 관계 및 정적분의 정리를 학습하도록 하고 있다. 적분과 미분의 관계는 함수 $y=f(t)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고, $f(t)\geq 0$일 때, 구간 $[a,b]$에 속하는 임의의 x에 대하여 구간 $[a,x]$에서의 곡선 $y=f(t)$와 $t$축 사이의 넓이를 $S(x)$라 하면 $S(x)=\int_a^x f(t)dt$ 이다. 이때 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}S(x)=f(x)$가 성립한다는 것을 제시하고, 이러한 식은 $f(x)\geq 0$이 아닌 경우에도 성립함이 알려져 있음을 설명하고 있다. 또한, 정적분의 기본정리의 성질에 대해서는 정적분을 계산할 때 매번 정의를 이용하여 구하는 것은 매우 번거롭고 불편하며, 정적분의 기본정리를 이용하면 부정적분을 구하여 간단히 계산할 수 있음을 설명한다. 주어진 함수의 부정적분은 유일하지는 않으나 상수차이만 있으므로 임의의 부정적분을 택하여 정적분의 기본정리를 적용하여도 그 결과는 같아진다.

미적분과 통계기본 13종과 적분과 통계 10종

<표 Ⅱ-1> 정적분의 지도 개관(최용준 외, 2010b, 2010d)

| | |
|---|---|
| **부정적분의 뜻**<br>· 미분하여 $3x^2$이 되는 함수가 여러 가지 있음을 통하여 부정적분의 의미에 대하여 생각하기<br>· 부정적분, 피적분 함수, 적분 상수 | **정적분의 뜻**<br>· 구분구적법을 이용하여 정적분 정의 |
| ▼ | ▼ |
| **부정적분의 계산**<br>· $1, x, x^2, \cdots$의 부정적분을 직접 구하여 $x^n$의 부정적분 탐구하기<br>· $x^n$($n$은 음이 아닌 정수)의 부정적분<br>· 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분 | **정적분의 기본정리**<br>· 도형의 넓이를 이용하여 적분과 미분의 관계 탐구하기<br>· 적분과 미분의 관계<br>· 정적분의 기본정리 |
| ▼ | ▼ |
| **구분구적법**<br>· 구분구적법의 원리에 대하여 생각하기<br>· 구분구적법을 이용한 도형의 넓이와 부피 | **정적분의 성질**<br>· 구체적인 예를 통하여 정적분의 성질 탐구하기<br>· 정적분의 성질<br>· 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분<br>· 정적분을 이용하여 무한급수의 합 구하기 |

중 1종을 제외한 교과서는 모두 미적분학의 기본정리를 '적분과 미분의 관계'와 '정적분의 기본정리'라는 명칭으로 <표 Ⅱ-2>와 같이 기술하고 있다. 단, 1종의 교과서만이 미적분학의 제1기본정리를 '미적분학의 기본정리'로, 제2기본정리를 '정적분의 기본정리'로 명칭만 달리하여 소개하고 있다.

### 3. 학생들의 오류

본 절에서는 왕수정(2001), 임선정(2005), 김민경(2007), 신보미(2009)의 연구에서 제시한 미분과 적분단원에서 학생들의 오류를 '미적분학의 기본정리'를 배우기 전에 학습하는 선행 개념을 중심으로 추출하여 <표 Ⅱ-3>과 같이 정리하였다.

구체적인 내용을 살펴보면, 임선정(2005)과 김민경(2007)은 고등학생들의 미분개념 이해를 조사하였는데, 학생들은 계산문제의 해결에는 대체로 능숙함을 보였고 수식에 의존하는 경향이 있었다. 그러나 변화율과 그 극한으로서의 미분개념에 대한 이해가 부족하였고, 평균변화율과 미분계수를 같은 개념으로 혼동하였으며, 한 점에서 미분가능과 함수의 미분가능을 동일하게 생각하고, 미분가능함수에서만 도함수가 정의된다고 생각하였다. 함수에서 미분불가능한 점이 도함수가 정의되지 않는 점이 아니라 그런 점을 갖고 있는 함수 자체가 도함수를 가질 수 없다는 것으로 받아들였다. 또, 도함수는 어떤 점에서의 접선이라고 생각하거나 도함수는 미분법에 의해 얻어진 결과라고만 생각하고 미분 개념의 물리적 표상이 되는 속도에 대한 이해가 부족하였다. 그 원인으로는 비와 비율, 함수 개념의 설명에서 변화율을 바라보는 시각이 부족하거나, 일상적 의미가 강한 용어나 일관성이 부족한 용어의 사용에서 오는 문제, 오개념을 제거할 직관적 모델의 부족, 미분계수의 기하학적 의미를 다룰 때에 항상 미분 가능한 경우만을 취급하는 미분가능성 설명에서의 문제점, 도함수를 과정으로 다룰 뿐 대상으로 다루지 않는 것 등을 지적하였다. 특히, 김민경(2007)은 고등수학에서의 정의 및 성질과 차이점을 가지는 미분 단원의 개념을 분석한 결과, 함수의 극한의 정의가 수학적 정의와 표현 방법에서 차이가 있고, 함수의 극한에 관한 성질과 관련하여 교과서에서 다루고 있는 거의 모든 함수들이 개구간 또는 개구간의 합집합에서 정의되기 때문에 폐구간의 끝점에서 불연속이라는 오개념을 가지게 될 수 있다고 하였다. 또한 교과서에서는 함수가 반드시 미분가능해야 도함수가 정의되고 있어 미분불능점을 포함한 함수의 도함수를 구할 수 없다거나 어려워하는 경향이 나타났다고 하였다. 왕수정(2001)과 신보미(2009)에 의하면, 고등학교 2학년 학생들의 적분단원에서 나타나는 오류를 분석한 결과, 학생들은 정리나 정의의 부적절한 사용으로 인해 가장 많은 오류를 범하고, 정적분과 넓이 사이의 관계를 잘 이해하지 못하고 있어

<표 Ⅱ-2> 현행 교과서에서 미적분학의 기본정리의 표현(최용준 외, 2010a, 2010c)

| 미적분의 제1기본정리<br>(적분과 미분의 관계) | | 미적분의 제2기본정리<br>(정적분의 기본정리) |
|---|---|---|
| 함수 $f(t)$가 구간$[a,b]$에서 연속일 때,<br>$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$, (단, $a \le x \le b$) | ▸ | 함수 $f(x)$가 구간$[a,b]$에서 연속이고, 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라고 하면 $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ |

<표 Ⅱ-3> 미적분학의 기본정리 관련 개념에 대한 학생들의 오류

| 주요개념 | 학생들의 오류 | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|---|
| 평균 변화율 | · 미분계수와 평균 변화율은 같다고 생각하는 오류 | | | ○ | |
| 미분 계수 | · 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 함수값 $f(a)$는 관계가 있고, 미분계수 $f'(a)$는 어떤 법칙에 의해 얻어지는 값이라는 오류<br>· 미분 개념의 물리적 표상이 되는 속도에 대한 이해가 부족함 | | ○ | ○ | |
| 미분 가능성 | · 한 점에서 미분가능과 함수의 미분 가능을 동일하게 생각함<br>· 연속이지만 미분불가능인 점에서 미분가능이라 판단함<br>· 연속이면 미분 가능이라고 생각하는 오류<br>· 도함수는 항상 연속이라고 생각하는 오류<br>· 미분가능하려면 접선의 기울기가 0이면 안된다고 생각하는 오류<br>· 진동하는 함수는 모든 점에서 미분불능이라고 생각하는 오류<br>· 미분 불가능을 특정한 점에서 도함수가 정의되지 않는 것이 아니라 그런 점을 갖는 함수 자체가 도함수를 가질 수 없는 것으로 받아들임<br>· 변화율과 그 극한으로서의 미분개념에 대한 이해가 부족함 | | ○<br>○ | ○<br>○<br>○<br>○<br>○<br>○ | |
| 도함수 | · 식이 주어지지 않으면 도함수를 구할 수 없음<br>· 함수와 도함수의 그래프는 동일한 부호이고, 개형이 같다고 생각하는 오류<br>· 첨점에서 미분가능하지 않다는 것을 잘 알고 있지만 함수에서 미분불가능한 점이 도함수가 정의되지 않는 점이며 또 그 점에서 도함수 값이 존재하지 않는다는 것을 인식하지 못하고 오히려 미분 불가능하므로 연속이 아니라고 결론지음<br>· 미분가능함수에서만 도함수가 정의된다고 생각하는 오류<br>· 도함수는 어떤 점에서의 접선이라고 생각하는 오류<br>· 도함수는 미분법에 의해 얻어진 결과라 생각하는 오류<br>· 삼차함수를 미분하면 임의의 이차함수가 된다고 생각하는 오류 | | ○ | ○<br>○<br>○<br>○<br>○ | |
| 적분 | · 정적분과 넓이 사이의 관계를 잘 이해하지 못하고 있어 정적분은 무조건 넓이와 같다고 생각하는 오류<br>· 구분구적법과 정적분을 종합할 수 있는 사고력이 부족함<br>· 극한 개념의 미흡으로 인하여 상합과 정적분은 같은 값으로 보지만, 하합은 정적분의 값보다 더 작은 값으로 생각하는 오류<br>· 상합과 하합, 정적분을 그림으로 잘 나타내지만 이를 해석하지 못하는 오류<br>· 적분 법칙만을 사용하여 모든 함수의 적분을 해결하려는 경향이 강함<br>· 정적분을 불가분량으로 해석하면서도 곡선 도형의 넓이는 정확한 값이 아니라 구하고자 하는 값의 근삿값이라고 설명<br>· 구분구적법의 아이디어를 바탕으로 곡선 도형의 넓이를 설명할 수 있다면 곡선 도형의 넓이는 근삿값이라고 응답<br>· 제7차 교육과정에서 정적분의 개념 정의는 리만합의 극한이지만 정적분의 정의가 넓이라고 응답 | ○<br>○<br>○<br>○<br>○ | | | ○<br>○<br>○ |

※ a, b, c, d는 왕수정(2001), 임선정(2005), 김민경(2007), 신보미(2009)의 연구 순서이다.

고등학생들은 정적분을 불가분량으로 해석하면서도 곡선 도형의 넓이는 정확한 값이 아니라 구하고자 하는 값의 근삿값이라고 설명하는 경향이 나타났으며, 정적분은 무조건 넓이와 같다는 생각을 가지고 있었다.

## III. 미적분의 역사적 발달 과정

미적분학의 기본정리가 확립되기 이전 미분학과 적분학은 서로 독립적인 체계를 가진 학문으로 발전되어 왔다. 적분 개념은 고대 그리스 시대부터 넓이나 부피를 계산하기 위한 것으로 시작되어 거리와 넓이의 관계에 대한 인식을 거쳐 발달하였으며, 미분 개념은 무한소 개념과 극한 개념에 바탕을 두고 곡선에 대한 접선을 그리는 문제를 해결하는 과정에서 발견되었다. 그 후 17세기에는 운동학적인 맥락에서 적분이 미분의 역 과정으로 계산될 수 있음을 알게 되면서 적분과 미분 개념이 연결되기 시작하였다. 17세기 중반 이후에는 기하학적인 사고에서 벗어나 기호의 도입과 함께 미분법과 적분법이 발달하게 되었다. 19세기에 들어서면서 함수에 대한 관점이 변하면서 미적분에 대한 형식적 정의가 이루어졌고, 이와 함께 미적분학의 기본정리가 확립되었다. 본 장에는 미적분학의 기본정리의 정립에 기여하는 개념들의 발달 특성에 따라 기하적 단계, 대수적 단계, 형식적 단계로 그 역사적 발달 단계를 정리하였다.

### 1. 기하적 단계

미적분의 발달과정에서 기하적 단계는 14세기 중반부터 17세기 중반까지에 해당하는 기간으로 운동의 속도와 거리 관념을 통하여 다항함수의 그래프에 의해 주어지는 평면도형의 높이와 넓이, 곡선과 곡선에 대한 접선 사이의 동일한 관계, 곧 변화량과 변화율 관계가 성립한다는 것을 인식한 단계였다(정연준, 2010).

14세기 Oresme은 속도 그래프에서 그래프 아래의 넓이는 이동 거리임을 인식하였고, 이에 따라 넓이는 도형이 아닌 이동 거리라는 물리적 특성을 나타낼 수 있게 되었다. 그러나 기하적 단계 초기의 미적분 개념의 발달은 존재성을 인식하는 수준에 그쳤으며, 일반적인 방법을 찾거나 계산법을 체계화하는 등의 시도로 발전하지는 못하였다.

16세기 이후에는 대수학의 발전이 미적분학의 발달에 영향을 미쳤다. Kepler는 무한한 반복을 통해 아주 작아지는 양은 무시할 수 있다고 생각하여 착출법에 의존하지 않고 무한히 작은 부분을 무수히 많이 모으는 식으로 극한의 개념을 도입하여 넓이나 부피를 구하였다. 이러한 아이디어는 Cavalieri에 의해서 더 정교화 되어 폭이 없는 선들의 모임을 넓이로, 두께가 없는 면들의 모임을 부피로 생각하는 불가분량법과 같은 적분과 관련된 여러 가지 아이디어를 만들어냈다.

17세기 초 Galileo는 낙하하는 물체에 관한 연구를 통해 자유낙하 하는 물체의 속도를 $v=gt$라 가정했을 때, 낙하 하는 물체의 낙하거리 $s$에 대해 $s=\frac{1}{2}gt^2$를 만족한다는 것을 발견하였다. 즉, 등속도 그래프에서 곡선 아래의 넓이가 이동거리 임을 가정하고, 곡선 아래의 넓이는 순간의 이동 거리가 되는 아주 얇은 직사각형들의 합이 됨을 추론하여, 실험을 통해 이것을 확인하였다. 이것은 Galileo가 미적분학의 기본정리에 대한 생각을 직관적으로 가지고 있었다는 것을 보여주는 것이라 할 수 있다.

Barrow는 기존의 학자들의 발견을 토대로 미분의 역연산으로 적분을 구할 수 있다는 것을

인식하고 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여, 미적분학의 기본정리를 소개하고 기하학적으로 증명하였다. Barrow는 한 곡선 $f(x)$가 주어졌을 때, $f(x)$ 위의 각 점까지 곡선 아래의 넓이를 나타내는 곡선 $s(x)$에 대한 정리를 제시하였고, 이 정리를 해석하면 넓이의 변화율이 함숫값이 된다는 것이 유도된다(한대희, 1999). 이 시기에는 운동의 속도와 거리 관념에 대한 연구를 통해 미분과 적분 사이의 관계에 대한 이해에 근접하였으나, 기하학적 전통에서 벗어나지 못하여 정적분과 미분을 연결시키는 사고의 유연성을 보이지는 못하였다.

## 2. 대수적 단계

17세기 후반에는 계산에서의 유용성 측면에서 미적분학이 발달하였다(이종희, 2002). Viète와 Descarte에 의해 기호 체계가 발달하면서 기하학적인 것에 초점을 맞추던 기존의 관점을 대수학적으로 확장하는 계기가 되었다. 이와 함께 해석기하학이 발달하면서 미분의 개념이 발견되었고, 기존에 알려져 있던 극한에 의한 구분구적법은 현대적인 미적분의 형태로 정립되었다.

영국의 Newton은 물리적인 입장에서 미적분을 연구하여 운동하는 물체의 속도를 계산하는 과정에서 유율법이라는 형식을 갖춘 미분법을 발견하였다. 물의 흐름을 좌표 평면 위에서 생각할 때 유량은 한 점에 대한 좌표의 변화량을 의미하고, 흐름의 속도, 즉 유율은 변화율을 의미한다. Newton의 유율법에서 가장 기본이 되는 문제는 연속 운동에 관한 것으로, 첫째는 운동체가 통과하는 거리를 알고 그 속도를 알아내는 것이고, 둘째는 속도와 시간을 알고 운동체가 통과하는 거리를 알아내는 것이었으며, 이 둘은 미분과 적분의 역관계이었다(김용운, 2010).

독일의 Leibniz는 대수적 시각에서 곡선에 대한 접선을 그리는 문제와 극대, 극소 문제를 해결하는 수단으로 미분법을 발견하였다. 구적법은 무한소 변량들의 무한 합과 관련되며 접선은 변량의 무한소 차와 관련된다는 점을 파악하고, 무한소 변량들을 다룰 수 있는 대수적 계산법을 창안하였다(정연준, 2010). 그는 불가분량의 방법을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 영역의 면적을 선분들을 누적하여 구할 수 있음을 보였으며, 접선을 이용해 미분을 정의하였고, 접선을 구하는 것과 곡선을 구하는 것이 서로 역연산이라는 것을 통찰하였다. 미적분의 정의 및 계산법과 함께 Leibniz는 미적분을 대수적으로 다룰 수 있도록 하는 기호를 발명하였다. 접선을 구하기 위해서 무한소에 대한 계산이 필요하였기 때문에 무한소 증가량을 $d$로 두고, 변량 $x$에 대한 최소의 차(differential)를 $dx$로 나타내었다. 또한 Sum을 의미하는 적분기호 $\int$을 도입하여 변량의 무한소 증가량들의 합을 나타내었다. $d$와 $\int$은 상보적인 관계에 있으며, $\int dx = x$이다(정연준, 2010). 이를 통해 미적분이 기호로 표현될 수 있게 되면서 미적분을 논리적으로 정의하려는 시도가 이루어졌다.

결과적으로 Leibniz는 적분을 무한히 작은 직사각형들의 무한히 많은 수의 합으로 정의하면서 정적분의 아이디어를 부각시킨 반면 Newton은 주어진 크기를 그것의 유율로 가지는 양 또는 유율의 역으로 유량을 정의함으로써 부정적분 아이디어를 부각시켰다는 점에서 차이를 보였다(정연준 & 이경화, 2009). 그러나 Newton과 Leibniz는 넓이를 주어진 함수의 원시함수를 이용하여 계산할 수 있다는 것을 발견하였고, 이러한 발견을 통해서 넓이와 거리가 연결되면서 이전 대에서 독립적으로 다루어지던 접선과 구적이 역관계임을 파악하고 미분과 적분을 하나

의 계산법으로 통합하면서, 기하학적 관점에서 자유로워지는 계기를 마련하였다.

Newton과 Leibniz에 의해 각기 다른 형태로 발전하던 미적분은 Bernoulli, Euler 등과 같은 후대 학자들에 의해 하나로 통합되고 발전되었다. Bernoulli는 Newton과 Leibniz의 아이디어를 통합하여, Newton의 역-도함수를 적분으로, Leibinz의 것을 미분으로 하였다(Ferzola, 1986; Kline, 1990). 이러한 정의로부터 시작하여 미분법의 결과가 가지는 규칙성을 이용하여 적분을 찾는 방법을 체계적으로 제시하였고, 미분의 역으로서 적분을 받아들였다. Lagrange는 미적분의 제1기본정리를 증명하였으며, Newton과는 다르게 기하학적인 성격에서 벗어나 대수적인 형식 즉, 기존의 미적분법의 무한소에 바탕을 둔 전개에서 벗어나 도함수 중심으로 전개하고자 하였다(김민경, 2007). 그러나 이 시기에는 모든 함수가 멱급수 전개 가능하고 모든 함수가 유한 다항식과 유사할 것으로 가정하면서, 미적분의 기본정리의 적용 범위가 엄밀하게 확정되지 못하고 모든 함수에 대하여 가능할 것으로 간주되었고, 정적분에 대한 이해가 무한소의 합이라는 관념에서 벗어나지는 못하였다(정연준, 2010).

### 3. 형식적 단계

18세기 말부터는 엄밀성에 보다 더 관심을 가지게 되면서, 극한을 수학적으로 정의하고, 실수 개념 등의 기초가 확립되면서 미적분이 논리적인 체계를 갖추게 되었다(이종희, 2002). 특히, Berkeley가 Leibniz의 무한소 방법을 비판하고 19세기에 들어서면서 함수를 해석적 식에서 대응으로 생각하는 관점의 전환이 이루어지면서, 새로운 방법으로 미적분이 고안되기 시작하였다.

Cauchy는 무한소를 '수'가 아닌 하나의 '변수'로 생각하였으며, 극한을 통해 미적분을 개발하였고, 연속 함수를 이용하여 적분을 발달시켰다. 무한소의 합으로 이해되던 기존의 직관적인 적분 개념을 극한의 수학적 정의를 이용하여 끝점이 $a, b$인 구간에서 연속 함수 $f(x)$의 정적분 $\int_a^b f(x)dx$으로 정의하면서 적분법의 논리적 기초를 마련하였다. 이는 역도함수로 정적분을 정의함으로써 미분에 의존하던 기존의 관점에서 벗어나게 되었으며, 이러한 관점의 전환에 의해 유한개의 불연속점을 갖는 함수에 대한 적분이 가능해졌음을 의미한다. Cauchy는 현대적 형태의 미적분의 기본정리를 제시하였고(Grabiner, 2005), 적분에 대한 평균값 정리와 적분의 성질을 이용하여 증명하였다.

19세기 후반에 독일의 Riemann에 의하여 보다 엄밀한 적분법이 확립되었다. Riemann은 일정한 구간에서의 무수히 많은 점에서 불연속이고 도함수를 갖지 않지만, 적분이 존재하는 연속함수를 제시하였다. 즉, 피적분함수가 불연속이라도 합의 극한으로서의 정적분은 존재할 수 있음을 보였으며, 이러한 적분 정의를 통해 연속함수의 적분을 다루었던 Cauchy의 적분은 임의의 불연속점을 갖는 유계인 함수에 대한 적분으로 일반화되었다.

독일의 Weierstrass는 Cauchy의 증명을 분석하여 오류를 발견하였고, 모든 점에서 미분불능인 연속함수를 제시하였다. 기존에 직관적으로 받아들여지고 있었던 실수의 성질을 체계적으로 확립하고, Weierstrass는 산술형태의 $\epsilon-\delta$ 방법을 이용하여 극한과 연속을 형식적으로 정의하고, 이에 따라 미적분에서 무한소 개념이 배제되었다. Weierstrass의 $\epsilon-\delta$ 방법은 실무한을 받아들인 것으로 볼 수 있다(박문환 & 민세영, 2002). 이전에 무한소의 합으로 간주되었던 정적분이 19세기에 엄밀하게 정의되면서 부정

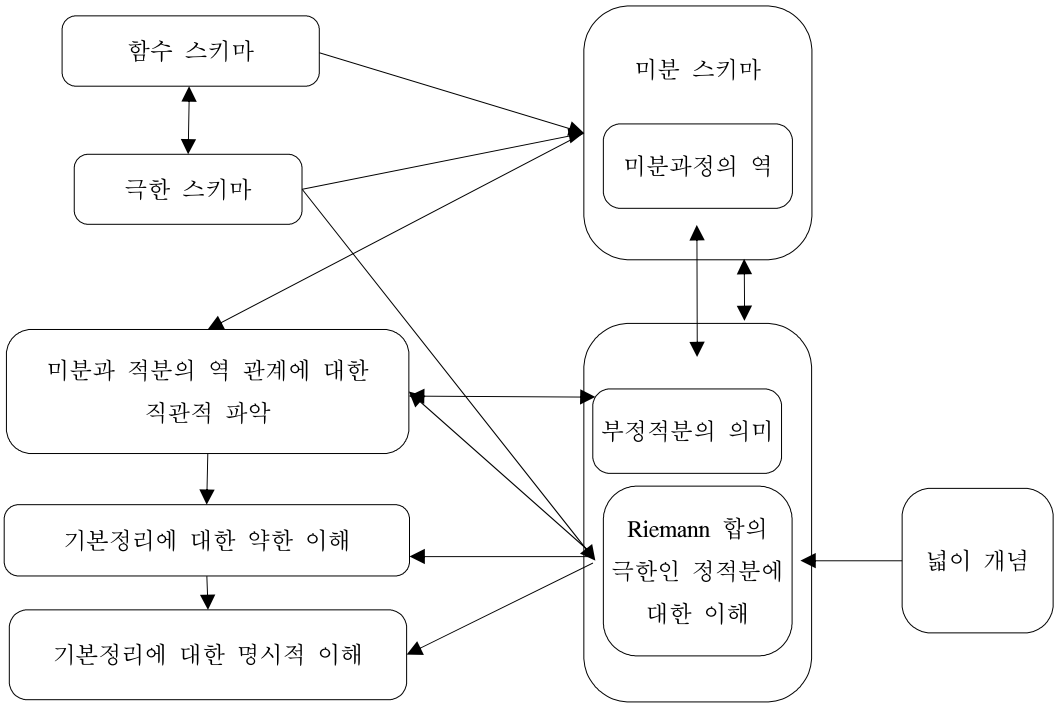
적분이 명확하게 정적분과 구분되었고, 이를 통해 미분에 대한 관계를 적분의 정의로 간주하였던 18세기 적분 관점의 한계를 극복할 수 있게 되었다(정연준, 2010).

이상을 정리하면 미적분학의 기본정리는 각각 개별적으로 발달하던 적분과 미분의 개념이 넓이와 높이, 곡선과 접선의 관계를 탐구하는 과정에서 연결될 수 있음을 직관적으로 인식되면서 나타났다. 그리고 미적분과 관련하여 극한, 연속, 도함수, 정적분 등의 기본 개념들이 형식적으로 정의할 수 있게 되면서 직관적으로 인식된 미적분의 기본정리의 아이디어가 엄밀하게 형식화되었다. 이 과정은 제1기본정리의 적용 범위와 그로부터 유도되는 부정적분을 이용한 정적분 계산법의 적용범위 곧 제2기본정리의 적용 범위 사이의 균형을 찾아가는 과정이라 할 수 있다(정연준, 2010).

## Ⅳ. 미적분학의 기본정리에 대한 발생적 배열

본 절에서는 앞서 살펴본 미적분학의 기본정리에 대한 학생들의 오류와 교과서 기술 내용과 방식을 비교하여 분석하고 서로 유기적으로 연결된 미적분학의 기본정리에 대하여 살펴본 수학사의 내용을 고려하여 수학사에서 미적분학의 기본정리가 발생하는 과정을 재배열하고자 한다.

Thomas(1995)는 추상적인 넓이 함수에 대한 이해를 기반으로 미적분의 기본정리에 대한 학생들의 이해를 분석한 결과, 정적분 과정을 이해한 학생이 넓이-누적 함수를 대상으로 이해하지 못하는 경우를 발견하고, 세 가지 이해 수준이 존재함을 주장하였다. 또한, 미분과 적분의 관계에 대해서도 세 수준으로 구분하여,




[그림 Ⅳ-1] 미적분의 기본정리 이해 과정(Thomas, 1995)

미분과 적분의 관계가 역연산 관계임을 이해한다고해서 이것을 쉽게 적용할 수 있는 것이 아님을 발견하였다. 미분 스키마와 정적분 스키마는 밀접한 관련성을 유지하고, 미분 스키마로 발달하는 미분 과정의 역에 대한 이해와 정적분 스키마의 일부를 구성하는 부정적분의 의미에 대한 이해가 연결되어야 함을 강조하였다. 특히 Thomas(1995)는 이 상태에서 교사가 미분과 적분을 연결시켜야 함을 설명하고, 이러한 과정을 [그림 Ⅳ-1]과 같이 도식화하였다.

우리나라 교과서에서 정의되는 극한, 도함수 등의 정의는 수학사에서 이러한 개념이 엄밀화되는 발달 과정을 반영하였다고 보기는 어렵다. 함수의 극한에 관한 성질과 관련하여 교과서에서 다루고 있는 거의 모든 함수들을 개구간 또는 개구간의 합집합에서 정의하고 있기 때문에 함수의 극한에서 다루는 모든 함수는 폐구간의 끝점에서 불연속이라는 오개념을 형성시킬 수 있다(김민경, 2007). 그리고 도함수는 주어진 함수가 반드시 미분가능일 필요가 없지만 교과서에서는 함수가 반드시 미분가능해야 도함수가 정의되는 것으로 다루고 있다. 이 차이로 인하여 함수에서 미분불가능한 점이 도함수가 정의되지 않는 점이 아니라 그런 점을 갖고 있는 함수의 도함수를 구할 수 없다고 생각하는 오류가 나타날 수 있다. 앞서 살펴본 임선정(2005)과 김민경(2007)의 연구에서와 같이 실제로 우리나라 고등학생들은 한 점에서 미분가능과 함수의 미분가능을 동일하게 생각하고, 미분가능함수에서만 도함수가 정의된다고 생각하는 오류를 많이 범하고 있었다.

그리고 현재 고등학교에서 다루고 있는 적분은 리만적분이며, 고등학교 과정에서는 연속인 함수에 대해서만 다루고 있다. 리만합은 항상 상합과 하합 사이에 있으므로 함수 $f$에 $[a, b]$에서의 상적분, 하적분에 대하여 상적분과 하적분의 값이 같으면, 함수 $f$는 $[a, b]$에서 리만 적분가능하다고 한다. 이 때, 그 공통되는 값을 기호로 $\int_a^b f(x)dx$와 같이 나타내고 함수 $f$의 구간 [a, b]에서의 정적분이라고 한다. 그러나 대부분의 교과서에서 정적분을 설명할 때 내접 직사각형을 통해서만 설명되며 외접 직사각형은 고려하지 않고 있다. 이 경우에도 내접 직사각형 넓이의 극한값이 존재하는 지의 여부가 명확하게 기술되지도 않으며, 구한 결과가 근삿값인지 정확한 결과값인지도 언급하지 않는다. 또한, 내접 직사각형과 외접직사각형을 통해서 설명하는 경우에도 주어진 곡선이 단조함수가 아닌 예를 다룸으로써 하합과 상합이 일정한 값에 가까워짐을 직관적으로 확인하기가 어렵게 되어 있다. 이는 주어진 곡선이 단조함수가 아닌 경우에 하합과 상합이 일정한 값에 수렴함을 직관적으로 보이는 것이 쉽지 않기 때문일 수 있다.

이러한 영향 때문인지 우리나라의 고등학생들은 상합과 하합, 정적분을 그림으로 나타낼 수 있지만 이를 해석하지 못하는 경향이 있으며, 곡선 아래의 영역의 넓이를 구분구적법에 의해 실제로 계산을 하면서도 구분구적법이 수열의 극한값으로 넓이를 새롭게 정의하는 맥락을 충분히 인식하지 못한다(왕수정, 2001). 그리고 구분구적법의 아이디어를 바탕으로 곡선 도형의 넓이를 설명할 수 있는 학생들 중에도 곡선 도형의 넓이는 근삿값이라고 응답한 학생이 있었다(신보미, 2009). 이처럼 구분구적법과 정적분을 종합할 수 있는 사고력이 부족한 것은 극한 개념의 미흡으로 인하여 상합과 정적분은 같은 값으로 보지만 하합은 정적분의 값보다 더 작은 값으로 생각하는 오류와 관련이 있는 것으로 생각된다. 물론 Orton(1983), 허학도(2006)의 연구에서와 같이 고등학생들이 구분구적법을 통해 구한 넓이가 수열의 극한값이라는

것을 명확히 이해하는 데에는 한계가 있다고 볼 수도 있다. 그러나 Camacho, Depool, & Santos-Trigo(2004), Toeplitz(2006), Akko, Yesildere, & Özmantar(2007)는 주어진 영역에 내접하는 직사각형의 넓이와 외접하는 직사각형 넓이에 대한 하합과 상합의 극한값이 일정한 값에 수렴함을 직관적으로 확인하게 하여 곡선 아래 영역에 대한 넓이의 존재성을 인식시키고, 분할의 횟수를 늘려감에 따른 하합과 상합의 관계로부터 구분구적법을 통해 구한 넓이를 음미해 보도록 하는 과정을 거친다면 학생들이 구분구적법을 통해 구한 결과가 주어진 영역의 넓이에 대한 근삿값이 아니고 정확한 결과값임을 알게 할 수 있다고 하였다. 따라서 구분구적법을 통해 넓이를 정의하기 전에 분할의 횟수를 늘려 상합과 하합이 어떻게 변화하는 지를 관찰하고 곡선 아래의 넓이가 존재함을 그림을 통해 확인하도록 한다면 하합을 정적분의 값보다 더 작은 값으로 생각하는 오류를 교정할 수 있을 것이다.

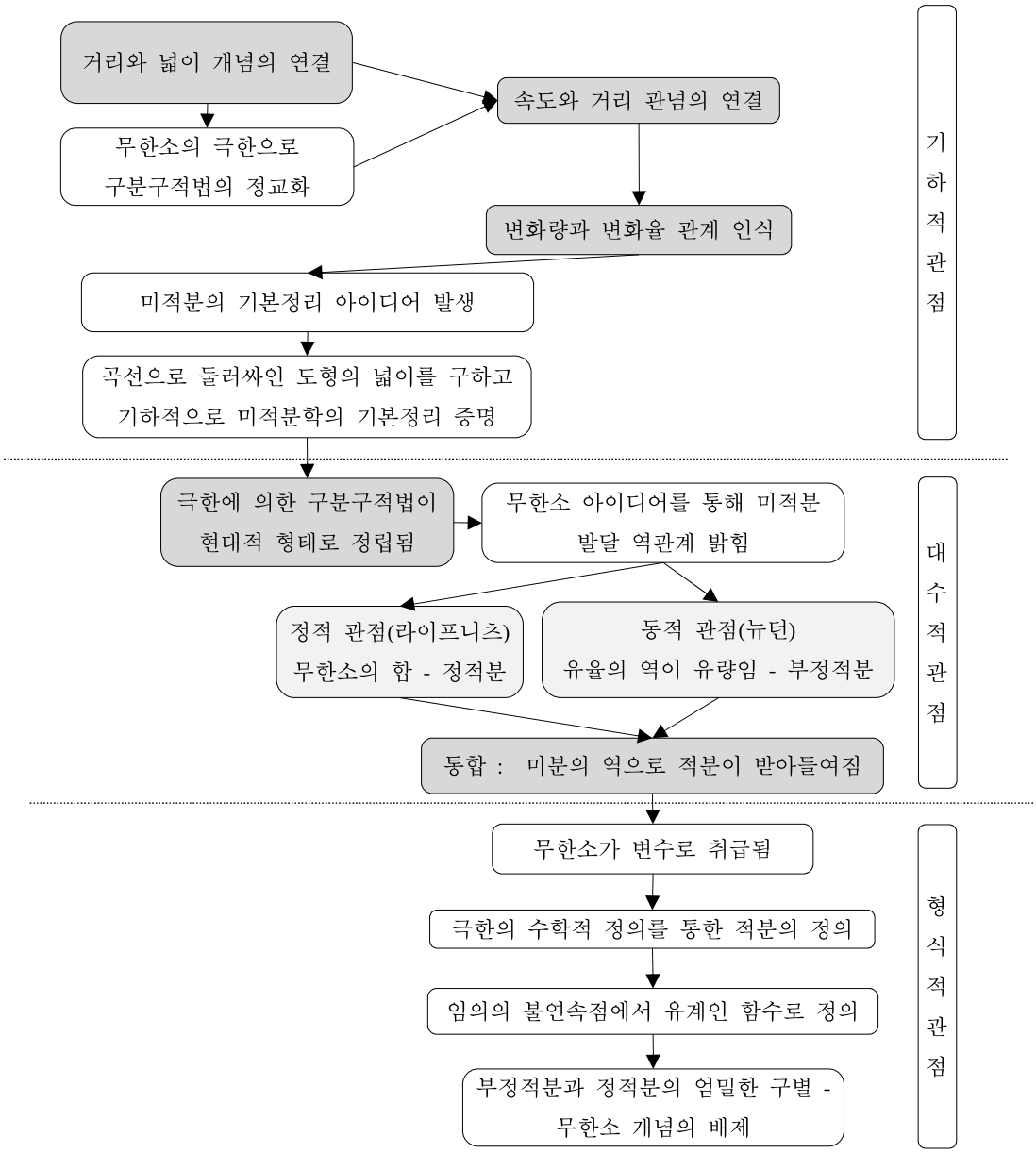
정연준(2010)은 미적분의 기본정리에 대한 학생들의 이해 실태를 '부정적분을 이용한 정적분 계산', '넓이 함수의 순간 변화율', '시간-속도 그래프의 넓이와 거리 관계', '정적분과 부정적분의 관계'의 4개 영역에 대하여 설문조사하였다. 조사 결과, '넓이 함수의 순간변화율'의 경우 식이 없이 그래프만 주어진 상황에서 넓이 함수 그래프의 개형을 찾는 과제에는 높은 응답률을 보였으나 넓이 함수의 미분 가능성이나 넓이 함수의 미분계수를 기하적으로 표시하는 과제에는 낮은 응답률을 보였다. 이는 미분 단원의 곡선 중심의 학습 내용이 장애로 작용하고 있음을 나타낸다. 또한, '시간-속도 그래프의 넓이와 거리 관계' 영역에서 대부분의 학생들이 정적분이나 부정적분을 이용한 계산 과정을 단순한 계산법으로 간주하였으며, 변화율 개념과 연결시키지 못하였다. 많은 학생들이 정적분과 부정적분의 관계를 정의에 따라 설명할 수 있으나 문제 상황에서 넓이 함수가 주어졌을 때, 이를 이용하여 부정적분을 결정하지 못하고 미분법 공식을 사용하였다. 즉, 우리나라 학생들에게 미적분학의 제1기본정리는 부정적분을 이용한 정적분 계산 과정과 넓이 함수의 순간변화율에 대한 인식을 통합하는 역할을 제대로 하지 못하고 있으며, 넓이 함수의 미분이 점별 미분과정과 연결되지 못하고 있음을 의미한다.

이상에서 살펴본 학생들의 인식론적 장애를 앞서 살펴본 수학사의 기하적 단계, 대수적 단계, 형식화 단계에 따라 고려할 때 수학사에서 미적분학의 기본정리가 발생하는 과정을 재배열하여 도식화하면 [그림 Ⅳ-2]와 같다.

미적분학의 기본정리와 관련된 개념을 [그림 Ⅳ-2]와 같이 발생적 배열을 할 경우 도출할 수 있는 교수학적 시사점은 다음과 같다. 수학사적 측면에서 등속도 운동에 대한 이해와 등가속도 운동의 특성을 이용하여 추론된 중간속도 정리[2]를 이용한 등가속도 운동의 시간-속도 그래프를 분석하는 과정은 직관적인 속도 관념을 통해서 평면도형의 넓이와 높이의 관계를 순간변화율로서 파악할 수 있게 하는 원동력이 되었다(정연준, 2010). 따라서 미적분학의 기본정리를 지도할 때 등속도 운동에서 등가속도 운동으로 확장되는 역사적 과정에서 나타난 이러한 추론 과정을 고려할 필요가 있다. 그리고 부정적분을 이용한 정적분 계산에는 서로 다른

2) Merton 학파는 '주어진 시간 동안 일정하게 가속하는 혹은 감속하는 운동의 이동 거리는 운동의 중간 시점의 속도로 동일한 시간 동한 이동한 거리와 동일하다'라 하고, 이를 중간속도정리라 하였다. 이 정리는 시간에 대하여 일정하게 가속하는 운동에 대하여 가속 중간 시점의 속도라는 측도를 부여함을 의미한다(정연준, 2010).

기하적 대상으로 표현되는 변화율과 변화량 관계가 $F'(x)=f(x)$에 통합되어 있고, 상황에 따라서 적절한 해석을 부여하는 것이 계산 과정에 전제되어 있다(정연준, 2010). 이는 Newton과 Leibniz가 대수적 함수를 유연하게 해석함으로써 미적분 계산법의 기초를 확립하였던 점에서 확인할 수 있다. 이러한 해석 능력은 학생들이 알고리즘을 기계적으로 수행하는 것이 아니라 원리에 대한 이해를 뒷받침하는 역할을 한다. 따라서 미적분학의 기본정리는 곡선




[그림 Ⅳ-2] 미적분학의 기본정리의 관련 개념에 대한 발생적 배열

과 다른 기하적 대상들에 대하여 미분과정을 적용시키는 것이므로 미적분학의 기본정리를 지도할 때 곡선과 접선을 미분과정의 대상과 결과로 다루는 미분과 관련된 성질도 지닌다는 점을 보다 적극적으로 지도할 필요가 있다.

## Ⅴ. '미적분학의 기본정리' 지도를 위한 Folding back 사고 모형

Pirie와 Kieren(1991)은 수학적 이해의 동적 성장에 관한 이론을 발표하였는데, 이 이론은 개념의 이해의 성장을 설명하기 위한 8개의 잠재적 행동의 층[3]을 8개의 중첩된 원으로 도식화하여 나타내고 있다. 이 이론에서는 이해의 성장이 층의 내부에서 외부로 나아가거나 외부에서 내부로 들어오는 형태의 선형성을 보이는 것이 아니라, 각 층을 통과하면서 전진과 후진이 반복적으로 발생하는 비선형성이 나타난다는 것을 강조한다. 또한 수학적 이해의 동적 성장 모델을 학생의 이해 활동과 수학적 아이디어 사이의 관계에 초점을 맞추어 사례 연구를 실시한 결과 학생의 활동이 그 모델의 각 층을 folding back한다는 것을 발견하였다.

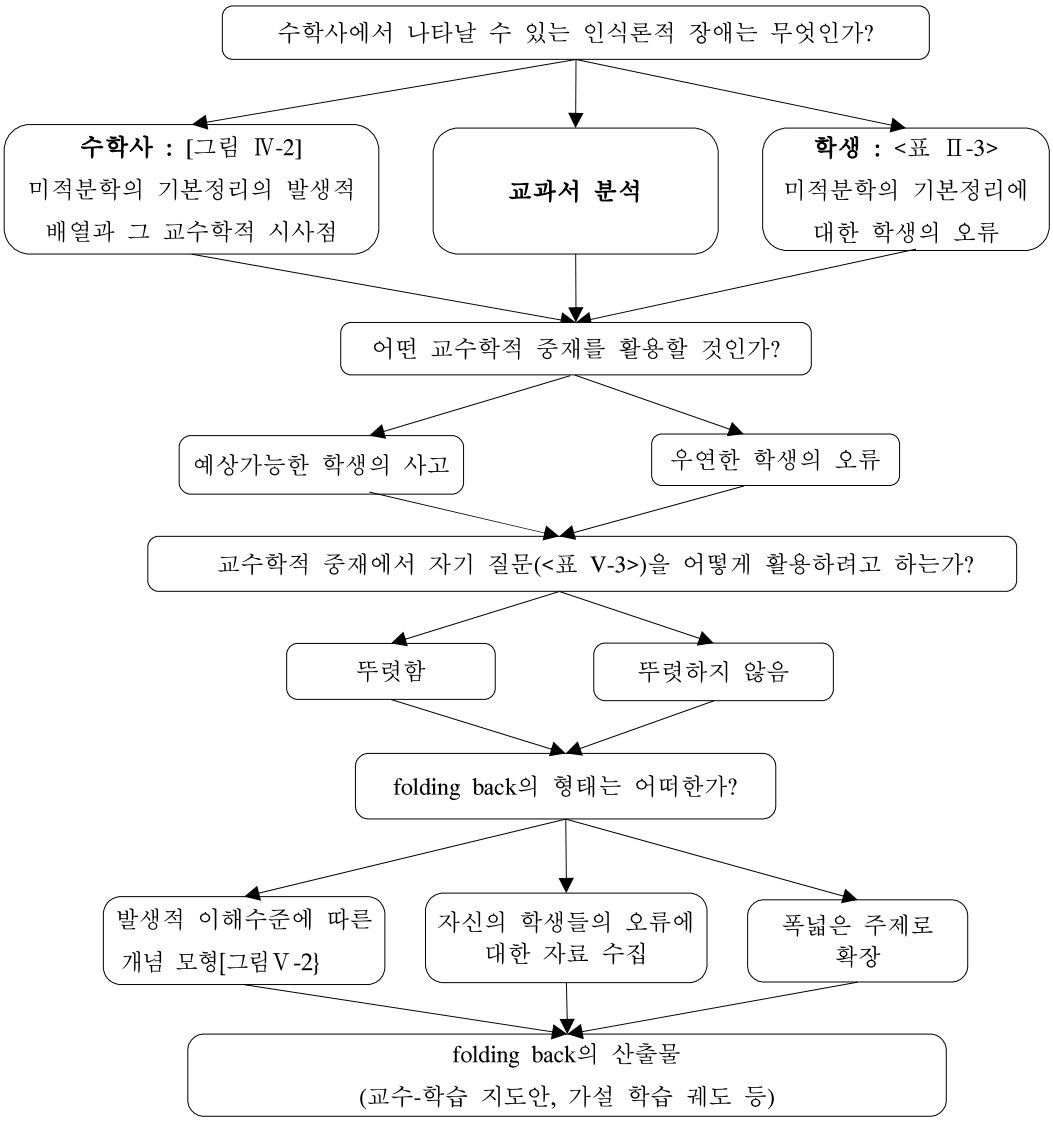
folding back은 한 개인이 즉시 풀 수 없는 문제에 직면했을 때, 이해의 이전 수준으로 돌아갈 수 있고, 이를 재구조화하는 과정에서 개인은 높은 수준에서의 사고 작용을 할 수 있다는 것이다. Pirie와 Kieren은 어떤 층에 있는 개인이 즉시 풀 수 없는 문제에 직면했을 때, 이해의 내부 층으로 돌아갈 수 있음을 제안하며, 이를 folding back이라 하였다. 또한, folding back을 이해의 수준을 심화하기 위해 기능하는 사고 활동으로서 이전의 앎으로부터 안내되고 시뮬레이션되는 것이라 설명하면서, folding back을 통해서 이전의 이해에 대한 현재의 이해를 겹쳐놓고 이를 동시에 의도적으로 수행하여 알고자하는 대상 아이디어를 보다 심층적으로 이해하게 된다고 하였다. 즉, folding back은 종이의 한 부분을 다른 쪽으로 접어 더 두꺼운 종이가 만들어지는 행동과 같이, 학생의 이해가 더 심화되고 동적으로 성장해 나가는 과정에 대한 은유이다(Martin, 2008). 이러한 folding back은 새로운 이해를 이끌어 내거나 정교화하고 재구성하는 것을 허용한다. Martin(2008)에 의하면, 어떤 개념에 대해 이전에 이해했을 때의 행동과 현재 수행하고자 하는 행동은 동일하지 않을 수 있지만, 자신의 지식을 지지하고 확장하기 위하여 효과적으로 더 심화된 이해를 하려고 하는 경향이 있다. 또한, Pirie-Kieren 이론은 환경이 개인의 수학적 활동을 위한 이해의 공간을 만들어내는 방법과 수학적 활동 발생 시 그 상호작용에 초점을 맞춤으로써 이해 과정에서 학생 자신이나 동료, 교사와의 중재 역할을 논의할 수 있게 한다(Martin, 2008).

Warner(2008)의 연구에서 Pirie와 Kieren(1991)의 이해 모델을 활용하여 학생들의 사고 활동을 분석한 결과, 학생들은 형식화(formalizing)층으로부터 더 내부의 층인 심상 형성(image-making)층으로 folding back하는 과정에서 문맥을 연결하고 표현들을 서로 연결하는 행동은 외부의 층인 형식화 층에서 더 많이 하고 있었다. 또한 교사들은 학생들이 외부 층에 있을 때, 가상적 상황을 세우도록 학생들을 격려하는 경향이 있었다. 즉, 이러한 연구 결과는 학생들의 행동의 변화는 교사의 행동과 밀접한 관련이 있으며, 교사가 학생들의 특성을 확인하고 이를 교과 내용뿐만 아니라 예상되는 학생의 질문이나 사고, 행동 등에 folding back하

3) 이 8개의 층들은 Primitive Knowing, Image Making, Image Having, Property Noticing, Formalizing, Observing, Structuring, Inventising이라 명명되었다(Martin, 2008).

여 수업 상황을 설계하는 것이 중요함을 의미한다. 즉, 교사가 학생들에게 어떤 개념을 학습시키기 위해 그 개념에 대한 지식과 학생들의 인식론적 장애를 고려하여 수학 교수-학습 이론들을 수업 상황에 구체적으로 적용할 수 있는지를 고민할 때 교육과정, 교수-학습목표, 교과 내용에 대한 지식, 학생에 대한 이해, 교수학습 전략, 수업 상황과 활동 등에 대한 여러 측면을 folding back하는 것이 필요한 것이다.

이러한 관점에서 본 연구는 역사발생적 원리나 수학사를 활용하여 실제로 '미적분학의 기본정리'를 가르치기 위해서 교사가 수업을 설계하려고 할 때 도움을 줄 수 있는 교사의 folding back 사고 모형을 [그림 Ⅴ-1]과 같이 개발하였다. folding back 사고 모형은 어떻게 교사 스스로 자신이 알고 있는 내용 지식과 수학사,




[그림 Ⅴ-1] 교사의 Folding back 사고 모형

학생들의 인식론적 장애와 오류, 교과서의 내용과 구성 등에 대한 정보를 연관시켜서 수업에 어떤 교수 방법을 사용하고 수업 상황을 설계할 수 있도록 돕기 위한 모형이다.

사고 모형의 출발점은 교사 스스로 역사발생적 원리와 수학사를 적용하여 미적분학의 정리를 학생들이 잘 이해할 수 있도록 수학사에서 나타난 인식론적 장애와 학생들의 오류를 서로 비교하여 확인하는 것이다. 이를 위해 교사는 미적분학의 기본정리에 대하여 자신의 지식과 알고 있는 자원을 확인하고 정비해야 하고, 이는 수학사, 교과서, 학생의 오류라는 세 측면에서 분석한 내용을 유기적으로 연관시키는 것에서부터 출발해야 한다. 구체적으로, 수학사적 측면에서 교사는 앞서 도출한 [그림 Ⅳ-2]의 발생적 배열과 그 교수학적 시사점이라는 산물을 생산할 수 있어야 한다. 그리고 교과서 분석 측면에서는 Ⅱ-2절에서 논의하였던 바와 같이, 교사는 미적분학의 기본정리의 내용과 구성에 대하여 파악하고 있어야 한다. 또한 미적분학의 기본정리와 관련된 선행 개념들을 학습하면서 학생들이 어떤 오류를 저지르는지에 대하여 <표 Ⅱ-3>에서와 같은 내용을 파악하고 있어야 한다.

그런 다음, 교사는 수학사, 교과서, 학생의 오류라는 세 측면에서 분석한 내용을 실제로 수업에서 어떤 교수학적 중재를 사용하여 학생들에게 미적분학의 기본정리를 지도할 것인지를 결정하여야 한다. 특히, 수학 수업에서 대부분의 교사가 교과서의 구성대로 학생들을 지도하기 때문에 개념을 가르치는 순서와 밀접한 관련이 있으므로 교과서 분석 내용 중 파악된 불완전한 점을 보강하기 위한 수업 전략을 고려해야 한다.

현행 교과서에서 미적분학의 기본정리는 구분구적법에 이어 정적분에 대한 학습이 끝난 이후에 적분과 미분의 관계, 정적분의 기본정리를 학습하면서 익히도록 되어 있다. 또 미적분학의 기본정리는 미분과 적분의 학습 전 과정에 걸쳐서 개념의 의미를 집대성하기 보다는 계산을 숙달하도록 지도하는 것에 치중하도록 서술되는 경향이 있다. 즉, 미분과 적분 단원은 발생 계통에 따라 유연하게 연결되지 못하고 분절되어 있으며, 각각의 개념과 이 두 개념의 통합 가능성에 대한 이해를 강조하기보다는 개념들을 계산하고 응용하는 문제들을 많이 제시하고 있다. 그리고 미적분학의 기본정리를 학습하기 이전에 학생들은 미적분에서 이미 많은 오개념과 오류를 가지고 있다. 따라서 구분구적법의 개념을 교수할 때에는 앞서 Ⅳ장에서 논의한 바를 반영하여 내접 직사각형 넓이의 합과 외접 직사각형 넓이의 합에 대한 극한이 같다는 사실을 지도할 때, 주어진 곡선이 단조함수일 경우에 분할의 횟수를 늘려감에 따라 하합은 점점 커지고 상합은 점점 작아져서 하합과 상합이 일정한 값에 수렴함을 직관적으로 보일 수 있게 하는 방안을 고려할 수 있다. 또한 '분할된 기본도형의 넓이의 합'으로 도형의 넓이를 구하기 위해 주어진 도형을 정확하게 분할하려는 노력 등을 버림으로써 구분구적법의 아이디어가 성장할 수 있도록 할 수도 있다. 구분구적법은 극한 과정을 적용할 수 있는 근사적인 대상을 찾아 그 극한값을 구함으로써 원래 주어진 영역의 넓이를 정확하게 구할 수 있다는 점을 전제로 하기 때문이다. 그리고 '정적분과 무한급수' 단원에서는 미적분학의 기본정리가 없다면 거의 구할 수 없는 특별한 형태의 수열의 극한을 정적분의 정의에 기초하여 변형함으로써 그 극한값을 쉽고 간단하게 계산할 수도 있을 것이다. 이러한 접근을 통해 학생들은 정적분과 원시함수의 관계를 설명하는 '미적분학의 기본정리'가 지닌 수학적 가치와 필요

성을 보다 충분히 이해할 수 있기 때문이다.

교사가 수학적 활동을 발생시키고 어떤 교수학적 중재를 할지를 결정할 때에는 Pirie와 Kieren(1991)의 이론에서 언급하였던 바와 같이 수학적 활동의 발생에 의한 상호작용과 대화에 초점을 맞추어야 한다. 교수학적 중재에서 교사는 학생 스스로 자신의 지식을 정당화할 수 있도록, 학생들의 이해가 좀 더 세련되게 발전할 수 있도록, 그리고 학생들이 문제에 부딪혔을 때 보다 국소적인 이전의 이해와 중첩시켜 현재의 상태를 반성하고 새롭게 심상을 만들고 형식화할 수 있도록 학생들의 사고를 자극하고 이끌어내고 안내하는 역할을 해야 한다. 이 때, 예상 가능한 학생의 사고와 우연하게 발생할 수 있는 학생의 오류가 무엇이 있는지도 점검해야 한다.

특히, 미적분학의 기본정리와 같이 종합적인 개념을 지도할 때 교사가 folding back 사고 모형에 따라 실제 수업을 설계하려면 '별 다른 생각'이나 '의식적인 노력 없이도' 가르치고자 하는 개념이나 과제의 요구에 따라 '아는' 전략을 '저절로' 사용할 수 있어야 한다. 따라서 교수학적 중재 단계에서 교사는 학생의 사고 과정과 자신의 수업 설계를 위한 사고 과정을 모두 경험하고 자동적으로 사용할 수 있어야 한다. 즉, 교사는 교수학적 중재 단계에서 수업을 어떻게 준비하고 학습목표는 분명한지, 어떤 종류의 발문과 사고 전략으로 수업을 구성할지, 이러한 사고 방법을 어떻게 하면 더 향상시킬 수 있고 수업의 어떤 장면에 사용할 것인지 등을 스스로 자문자답하면서 수업 설계에 보다 주의 집중하고 자료 내외의 연결 관계를 적극적으로 탐구할 수 있어야 한다. 이 때 사고 전략은 분류나 추론과 같은 다소 개별적이고 비연속적인 사고일 수 있고 문제해결이나 의사결정과 같은 복합적인 사고 전략이나 메타인지일 수도 있다. 또한 교사는 앞서 분석한 수학사적 분석, 교과서 분석, 학생의 오류 분석으로부터 얻은 각 산출물과 학생의 사고 과정을 조화시킬 수 있도록 스스로 확인하고 추론해보는 자기질문을 하고 이에 답을 하면서 무엇인 수업 설계를 위한 최선의 교수학적 중재가 될 것인지를 판단할 수 있어야 한다.

김영채(1998)는 보편적 지적 준거를 더 나은 판단을 이끌어내도록 하는 비판적 사고의 지적 요소로 보고, 그 요소에는 분명한가(명료성), 정확한가(정확성), 엄밀한가(엄밀성), 적절한가(적절성), 사고의 깊이(복잡성)와 폭(광범성), 논리적인가(논리성), 중요한가(중요성)가 포함된다고 하였다. 교사는 수학을 가르칠 때 가르치고자 하는 지식에 대한 정보만을 기억하고 이를 수업에서 전달하는 소극적 사고를 넘어, 논리를 찾아 그 정보를 깊게 총체적으로 이해하고 비판적으로 음미하여 보다 건설적인 수업을 할 수 있어야 한다. 여기에서 논리는 정보가 가지고 있는 다양한 사고의 요소들을 탐색하고 발견해 내는 것을 의미하므로 folding back 사고를 교수학적 중재에 적용시키는 과정과 매우 유사하다.

이에, 교사가 교수학적 중재 단계를 활용하여 실제 수업 설계를 잘 할 수 있도록 김영채(1998)의 보편적인 지적 준거에 따라 자기질문 형식(<표 Ⅴ-1> 참조)으로 'folding back 사고의 적용 요령'을 개발하였다. 교사의 'folding back 사고의 적용 요령'은 교사 스스로 자기 질문을 통해 '학생이 수업에서 어떠한 사고 과정을 사용하는가'를 중심으로 여러 내용과 관련 정보들의 연결 관계를 적극적으로 탐구하여 수업의 맥락을 만들고 그 중요성 등을 평가하여 함의를 찾아낼 수 있게 하는 것이 목적이다. 본 연구에서 개발한 보편적 지적 준거에 따른 자기 질문 형식의 folding back 사고의 적용 요령은 <표 Ⅴ-1>과 같다.

<표 Ⅴ-1> folding back 사고의 적용 요령

| 지적 준거 | 자기 질문 |
|---|---|
| 명료성 | · 학습목표는 분명하게 진술하고 있는가?<br>· 표적 개념과 관련된 학생의 오류는 명확하게 나타날 수 있는가?<br>· 표적 개념과 관련된 수학사의 내용을 발생적으로 배열할 수 있는가?<br>· 무엇을 의미하는지 예시할 수 있는가?<br>· 개념을 명확한 용어를 사용하여 말하고 있는가?<br>· 좀 더 자세하게 설명할 수 있는가?<br>· 수업에서 활용하고자 하는 사고 기능은 무엇인가? |
| 정확성 | · 수학사에서 관련된 학생의 오류를 확인할 수 있는가?<br>· 학생의 사고가 개념과 관련하여 어느 정도가 옳은지 점검할 수 있는가?<br>· 어떻게 알아볼 수 있는가?<br>· 핵심적 절차와 관련한 법칙과 원리를 사용하고 있는가? 그리고 이를 적절한 내용에 정확하게 적용하고 있는가?<br>· 학생들이 교사가 의도한 사고 기능을 학습하고 있는지를 어떻게 검증할 수 있는가? |
| 엄밀성 | · 관련 자료(정보)들을 보다 구체적으로 제시해 보기<br>· 보다 자세한 내용을 제시해 보기<br>· 보다 정확할 수 없는가? |
| 적절성 | · 관련 자료(정보)들이 현재의 문제와 어떻게 관계되는가?<br>· 적절한 예(보기)를 들었는가?<br>· 적절한 수업 맥락에 의도적으로 적용하고 있는가? 그 시기는 적절한가?<br>· 관련 자료(정보)가 문제에 갖는 의미는?<br>· 관련 자료(정보)들이 문제해결에 도움이 되는가? |
| 복잡성 | · 이 문제(주요 개념의 학습)를 어렵게 만드는 것이 어떤 것인가?<br>· 이 문제(주요 개념의 학습)가 복잡한 것은 무엇 때문인가?<br>· 복잡한 것들 중 어떤 것을 다루어야 하는가? |
| 광범성 | · 다른 관점에서 고려해 볼 필요는 없을까?<br>· 다른 관점에서 이 문제를 들여다보면 어떨까?<br>· 다른 방식으로 생각해 볼 필요는 없는가? |
| 논리성 | · 전체적으로 의미가 통하는가?<br>· 증거에 기초를 둔 것인가? |
| 중요성 | · 이것이 가장 중요한 문제인가?<br>· 핵심 아이디어는 무엇인가?<br>· 어느 증거(논거)가 가장 중요한가? |

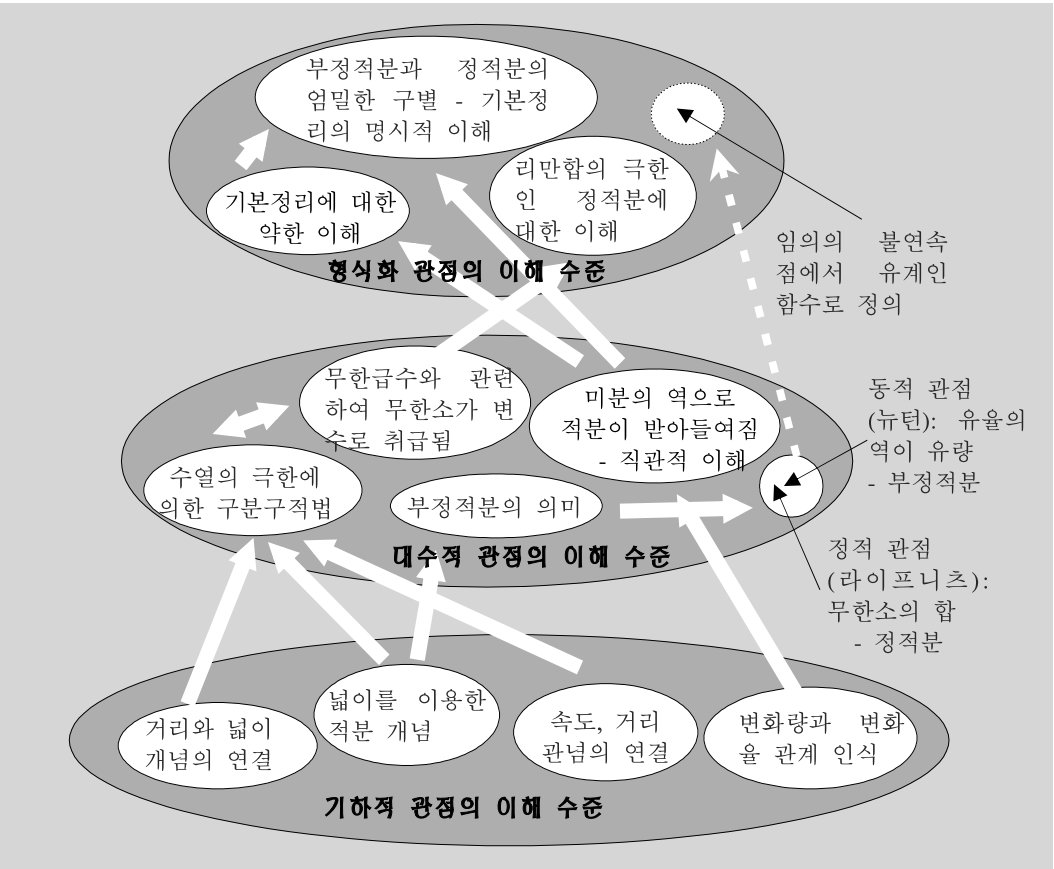
이러한 단계를 거치면 교사는 기본적인 수업 설계를 세울 수 있게 되는데 교수학적 중재가 뚜렷하거나 뚜렷하지 않거나 두 경우 모두에서의 folding back 사고를 다시 한 번 반성할 필요가 있다. 이를 통해 실제 수업에서 사용할 수 있는 '발생적 이해 수준에 따른 관련 개념 모형'을 도출하고 수업을 하는 대상 학생들만의 오류를 고려하고 미적분학의 기본정리 개념을 어떻게 발전시켜 나갈지를 고려할 수 있다.

Freudental에 따르면 학생들의 개념에 대한 이해는 그 개념의 역사적 발달과 유사한 순서로 성장할 수 있다. 그러므로 본 연구에서는

미적분학의 기본정리의 역사적 발달 과정과 유사한 순서로 학생들의 이해가 성장해나갈 수 있다고 보고, '발생적 이해 수준에 따른 개념 모형'을 [그림 Ⅴ-2]와 같이 개발하였다. 미적분학의 기본정리를 지도하기 위해 앞선 장에서 수학사적 고찰과 인식론적 장애를 고려하여 산출한 [그림 Ⅳ-2]의 발생적 배열을 기반으로 교육과정과 교과서에서 '미적분학의 기본정리'와 관련된 개념들의 이해 수준을 기하적 관점에서의 이해수준, 대수적 관점에서의 이해수준, 형식화 관점에서의 이해수준으로 나누었다. [그림 Ⅴ-2]에 나타나 있는 세 개의 큰 타원은 각각 미적분학의 기본정리의 기하적 관점에서의 이해수준, 대수적 관점에서의 이해수준, 형식화 관점에서의 이해수준을 나타내며, 타원 내의 흰 원은 각 이해수준 내에서 나타날 수 있는 미적분학의 기본정리의 관련 개념들을 의미한다. 또한, 흰색 화살표는 인지적 요소들 간의 연결성을 나타내고 점선으로 표현된 원과 선은 현행 교육과정보다 상위 수준의 개념이나 교사가 반드시 인지하고 있어야 하며 성취 수준이 높은 학생들에게는 지도할 필요가 있다고 판단되는 개념을 나타낸다.

## Ⅵ. 결론

본 연구에서 개발한 folding back 사고 모형




[그림 Ⅴ-2] 미적분학의 기본정리에 대한 발생적 이해 수준에 따른 개념 모형

은 Pirie-Kieren의 이론(1991)에서 제시된 folding back 개념을 활용하여 교사가 실제 수업을 설계할 때 수학사와 학생의 오류를 고려할 수 있도록 '미적분학의 기본정리'를 중심으로 개발된 사고 모형이다. 미적분학의 기본정리에 대한 수학적 내용뿐만 아니라 내용과 관련된 사고를 개발하는 것을 가르칠 수 있느냐는 어떤 수업으로 그 내용에 접근하는가, 즉 교수학적 중재와 관련이 된다. 교사는 미적분학의 기본정리에 대한 일련의 교육과정을 사고의 과정으로 번역하고, 교사 스스로 자기 질문을 통하여 이러한 과정을 직접 경험하고, 이를 바탕으로 수업을 설계할 수 있어야 한다.

본 연구에서는 먼저 수학사에서 미적분학의 기본정리의 발달 과정을 고찰하고 그 발생 과정을 기하적, 대수적, 형식적 단계로 구분하여 배열하여, 이를 바탕으로 학생들이 겪을 수 있는 인식론적 장애와 오류, 교과서의 관련 내용을 분석하였다. 그런 다음, 교사가 미적분학의 기본정리와 관련된 수학사의 발생적 배열, 학생들의 오류, 교과서 분석 내용을 바탕으로 미적분학의 기본정리를 학생들에게 의미충실하게 지도할 수 있도록 folding back 사고 모형을 [그림 Ⅴ-1]과 같이 개발하였다. folding back 사고 모형은 수학사, 교과서, 학생의 오류라는 세 측면에서 분석한 내용을 바탕으로 개발되었으며, 그 중 수학사적 측면에서는 인식론적 장애를 고려하여 미적분학의 기본정리에 대한 역사적 발생 과정을 분석하고 추출된 관련 개념을 기하적 단계, 대수적 단계, 형식적 단계로 구분하여 [그림 Ⅳ-2]와 같이 재배열하였다. folding back 사고 모형 중 교수학적 중재단계에서 교사의 수업 설계를 도울 수 있는 '자기 질문'형식의 'folding back 사고의 적용 요령'을 개발하여 <표 Ⅴ-1>과 같이 제시하였다. 즉, 교사는 학생들이 미적분학의 기본정리를 정당화하고 세련되게 발전시키고 국소적인 이전의 이해와 중첩시켜 현재의 상태를 반성할 수 있는 사고 과정을 경험할 때 'folding back 사고의 적용 요령'을 활용할 수 있다. '발생적 이해 수준에 따른 관련 개념 모형'은 미적분학의 기본정리에 함축되어 있는 여러 개념들을 수학사의 발달단계에 따라 인식론적 장애를 고려하였을 뿐만 아니라 교과서에서 학습시킬 때 다루어야 하는 중요 개념을 기하·대수·형식화 관점에서의 이해수준을 고려하여 재배열한 모형으로 [그림 Ⅴ-2]와 같다.

비록 folding back 모형을 수업에 교사가 자연스럽게 적용하는 데에는 시간이 걸릴 수 있지만, 수업에서 결과 못지않게 과정 자체가 중요하다는 것을 기억해야 한다. 학생의 복잡한 수학적 사고를 요구하는 미적분학의 기본정리를 가르치기 전에 교사가 먼저 수학사적 고찰을 하고 인식론적 장애를 고려하여 관련 개념을 발생적으로 재배열하고 자기질문을 하면서 교수학적 중재를 효율적으로 적용하려는 수업을 설계하는 과정을 통하여, 교사는 학생에 대한 이해를 심화할 수 있으며 자신의 수업 능력을 향상할 수 있을 것이다. 또한 교사 혼자 한두 번의 수업으로 folding back 사고 모형을 활용하는 것이 어려울 수 있으므로, 같은 교과의 동료 교사들이 함께 folding back 사고 모형을 활용할 수 있는 연구회나 동료장학의 기회를 가질 수도 있다. 교사들이 서로 분담하여 수업의 목적에 따른 수학사, 교과서의 내용 분석, 학생들의 오류를 탐구하고, 가르치려는 사고 기능을 협의하여 선정하고, 선정한 사고 기능을 포함할 수 있는 절차 단계와 원리를 정리하여 전체 내용을 조직하고 수업을 설계하거나 관련 교재를 개발한다면, 보다 효과적으로 folding back 사고 모형을 활용한 수업 프로그램이 개발되고 확산될 수 있을 것이다. 이는

수학 교사에게는 전문성 신장의 기회를 제공할 뿐만 아니라 학생에게는 교과 내용을 배우면서 사고력을 향상 시킬 수 있는 수업을 경험하게 할 수 있다.

다만, folding back 사고 모형을 실제로 교사가 수업에 잘 적용할 수 있는지를 검증하기 위해 실제 수업에 적용하는 사례 연구가 현재 진행 중이므로 본 연구에서는 구체적인 모형의 효과를 밝힐 수 없다는 제한점이 있다. 그러나 향후 folding back 사고 모형의 효과성을 검증하고자 하며, 이 때 교사가 의도한 수업 이후에 학생들의 오류가 어떻게 나타나는 지와 교사가 의도한 사고 기능을 어느 정도 숙달하였는지를 '소리내면서 생각하기' 방법 들을 통해 확인하여 모형의 개선점을 찾을 것이다. 또한 교사의 수업을 관찰하고 수업 동영상을 분석하고 교사가 자기 질문을 잘 활용하였는지를 점검하여 모형을 보다 구체화하고 정교화 할 것이다.

## 참고문헌


교육과학기술부(2008). 고등학교 교육과정 해설 - 수학. 교육과학기술부.

김민경(2007). **미분단원에서의 오개념에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

김영채(1998). **사고력: 이론, 개발과 수업**. 서울: 교육과학사.

김용운(2010). **수학사 대전**. 서울: 경문사.

박문환, 민세영(2002) 역사발생적 관점에서 본 미적분 지도. **학교수학, 4**(1). 29-62.

박희진(2007). **학생들의 미분개념 오류유형에 대한 교사들의 인식조사**. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

신보미(2009). 고등학생들의 정적분 개념이해, **학교수학, 11**(1), 93-110.

왕수정(2001). **고등학교 2학년 학생들의 적분 단원 문제해결전략 및 오류 분석에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

이종희(2002). 수학의 역사와 오류. **한국수학사학회지, 15**(3), 35-48.

임선정(2005). **고등학교 학생들의 미분개념 이해와 수학적 사고 스타일 연구**, 서울대학교 대학원 석사학위논문.

정연준(2010). **미적분의 기본정리에 대한 교수학적 분석**. 서울대학교 대학원 박사학위논문

정연준, 이경화(2009). 미적분의 기본정리에 대한 고찰 - 속도 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계를 중심으로. **수학교육학연구, 19**(1). 123-142.

조완영(2006) 미적분에서의 수학화 교수·학습에 관한 연구. **학교수학, 8**(4), 417-439.

최용준 외(2010a). **고등학교 미적분과 통계 기본**. 서울: (주)천재교육.

최용준 외(2010b). **고등학교 미적분과 통계 기본 교사용 지도서**. 서울: (주)천재교육.

최용준 외(2010c). **고등학교 적분과 통계**. 서울: (주)천재교육.

최용준 외(2010d). **고등학교 적분과 통계 교사용 지도서**. 서울: (주)천재교육.

한대희(1999). 미적분학의 기본정리에 대한 역사-발생적 고찰. **수학교육학연구, 9**(1). 217-228.

허학도(2006). **직사각형 넓이 공식의 이해와 인식론적 장애**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

Akko, H., Yesildere, S., & Özmantar, F. (2007). Prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of definite integral: the problem of limit process. *Proceedingd of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(3), 7-12. Great Britain: British

Society for Research into Learning Mathematics.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R.(2008). **실해석학개론 개정3판**. (강수철 역) 서울: 범한서적주식회사. (영어 원작은 2006년 출판).

Belding, D. F., & Mitchell, K. J.(1991). *Foundations of Analysis*. London: Prentice Hall.

Camacho, M., Depool, R., & Santos-Trigo, M. (2004). Students' understanding of area and definite integral concepts within an enhanced computer learning environment. *PME Conference, 28*(1). Bergen, Norway: Bergen University College.

Ely, R. E.(2007). *Student obstacles and historical obstacles to foundational concepts of calculus*. doctoral dissertation, The university of Wisconsin-Madison.

Ferzola, A. P.(1986). *Evolution of the mathematical Consept of a Differential and on Outline of How a Modern Definition of this Concept Can Be Used in the Formulation of Elementary Calculus Course*. Unpublished doctoral dissertation, New York University.

Grabiner, J.(2005). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Dover Publications.

Kline, M.(1990). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press,

Martin, L. C.(2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren theory. *Journal of Mathematical Behavior*, 27, 64-85.

Orton, A.(1983). Students' Understanding of Integration, *Educational Studies in Mathematics, 14*, 1-18.

Pirie, S. E. B., & Kieren, T. E.(1991). *Folding back: Dynamics in the growth of mathematical understanding*. In F. Furinghetti (Ed.), Proceedings of the fifteenth annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3. 169 - 176.

Spivak, M.(1980). *Calculus*. Berkeley: Publish or Perish Inc.

Thomas, K.(1995). *Fundamental Theorem of Calculus : An Lnvestigation into Students' Constructions*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.

Toeplitz, O. (2006). 미적분학. (우정호 외 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1963년 출판).

Warner, L. B.(2008). How do students' behaviors relate to the growth of their mathematical idea?. *Journal of Mathematical Behavior, 27*, 206-227.

# Design of Teacher's Folding Back Model for Fundamental Theorem of Calculus

Kim, Bu Mi (Korea Institute for Curriculum and Evaluation)
Park, Ji Hyun (Ewha Graduate School)

Epistemological development process of the Fundamental Theorem of Calculus is considered in a history of mathematical notions and the genetic process of the Fundamental Theorem is arranged by the order of geometric, algebraic and formalization steps. Based on this, we studied students' episte- mological obstacles and error and analyzed the content of textbooks related the Fundamental Theorem of Calculus. Then, We developed the "Folding Back Model" of the fundamental theorem of calculus for students to lead meaningful faithfully. The Folding Back Model consists of "the Framework of thou- ght"(figure V-1) and "the Model of genetic understanding of concept"(figureV-2). The framework of thought in the Folding Back Model is included steps of pedagogical intervention which is used "the Monitoring working questions"(table V-3) by the mathematics teacher. The Folding Back Model is applied the Pirie-Kieren Theory(1991), history of mathematical notions and students' epistemological obstacles to practical use of instructional design. The Folding Back Model will contribute the professional development of mathematics teachers and improvement of thinking skills of students when they learn the Fundamental Theorem of Calculus.

* key words : Fundamental Theorem of Calculus(미적분학의 기본정리), Epistemological Obstacle(인식론적 장애), Genetic Arrangement of Fundamental Theorem of Calculus(미적분학의 기본정리에 대한 발생적 배열), Folding Back Model(Folding Back 모형)

논문접수 : 2011. 2. 1
논문수정 : 2011. 3. 2
심사완료 : 2011. 3. 11