

배플이 부착된 채널 유동의 불안정성

강창우¹, 양경수^{*2}

FLOW INSTABILITY IN A BAFFLED CHANNEL FLOW

C. Kang¹ and K.S. Yang^{*2}

Flow instability is investigated in a two-dimensional channel with thin baffles placed symmetrically in the vertical direction and periodically in the streamwise direction. At low Reynolds numbers, the flow is steady and symmetric. Above a critical Reynolds number, the steady flow undergoes a Hopf bifurcation leading to unsteady periodic flow. As Reynolds number further increases, we observe the onset of secondary instability. At high Reynolds numbers, the two-dimensional periodic flow becomes three dimensional. To identify the onset of secondary instability, we carry out Floquet stability analysis. We observed the transition to 3D flow at a Reynolds number of about 125. Also, we computed dominant spanwise wavenumbers near the critical Reynolds number, and visualized vortical structures associated with the most unstable spanwise wave.

Key Words : 유동 불안정성(Flow Instability), 이차 불안정성(Secondary Instability), 배플(Baffle)

1. 서 론

장애물이 부착된 채널 유동은 열교환기, 와류 발생기, 마이크로 채널, 연료전지 등에서 폭넓게 응용되는 유동 형태로 채널 내에 부착된 장애물은 유동 불안정성을 증가시키며 유동장내 와류를 형성하여 유동의 혼합 및 열전달 효율을 증가시킴으로 공학적 응용성이 매우 높다. 따라서 유동 불안정성에 대한 연구는 채널 내 유동 형상 설계에 중요한 자료가 되므로 많은 연구자들에 의해서 연구되어왔다[1-6].

채널 내 장애물이 존재하는 경우 유동은 Hopf 분기(Hopf bifurcation)에 의해 임계 레이놀즈 수(Re_{cl})에서 정상상태 유동에서 주기적인 2차원 유동으로 천이하게 되며, Re 가 더 증가하게 되면 주기적인 2차원 유동이 3차원 유동으로 천이하는 이차 불안정성(secondary instability)이 나타나게 된다. 대부분의 전단 유동은 이차 불안정성을 통하여 층류에서 난류로 천이하는 특징을 보이므로 이차 불안정성에 대한 연구는 많

은 연구자들의 관심이 되어 왔다. Amon and Patera[3]는 채널 내 주기적으로 홈(groove)이 배열된 경우에 대하여 3차원 Fourier 교란 모드를 이용하여 주기적인 2차원 유동이 3차원으로 천이하는 임계 $Re(Re_{cl})$ 를 계산하였다. Schatz등[5]은 원형 실린더가 주기적으로 배열된 채널 유동에 대하여 실험과 수치해석을 통하여 유동 불안정성에 대한 연구를 수행하였다. 그들은 Floquet 안정성 해석을 통하여 이차 불안정성이 나타나는 임계 $Re(Re_{cl})$ 를 계산하였으며, 그 결과를 실험 결과와 비교하였다. 또한 Yang[6]은 배플이 주기적으로 존재하는 채널 유동에 대하여 확장된 이차원 유동장에 임의의 3차원 교란항을 결합하여 이차 불안정성에 대한 연구를 수행하였다. 그리고 에너지 스펙트럼을 통해서 임계 $Re(Re_{cl})$ 근처에서 가장 지배적인 횡방향 파동수를 계산하였다. 그는 이차불안정성이 나타나는 임계 $Re(Re_{cl})$ 를 약 134에서 150 사이로 추정하였으며, 이는 같은 형상에서 실험을 통해 Re 가 160 이상일 때 유동이 3차원으로 천이하는 결과를 보인 Roberts[4]의 연구 결과와 유사한 결과이다.

본 연구에서는 Roberts[4]와 Yang[6]의 연구에서와 같이 채널 벽면에 배플이 주기적으로 부착된 경우에 대하여 유동 불안정성에 관한 수치 해석적 연구를 수행하였다(Fig. 1). 2차원 유동에서 3차원 유동으로 천이하는 이차 불안정성 해석을 수

접수일: 2010년 7월 26일, 수정일: 2011년 3월 4일,

게재확정일: 2011년 3월 4일.

1 정회원, 인하대학교 대학원 기계공학과

2 정회원, 인하대학교 기계공학과

* Corresponding author, E-mail: ksyang@inha.ac.kr

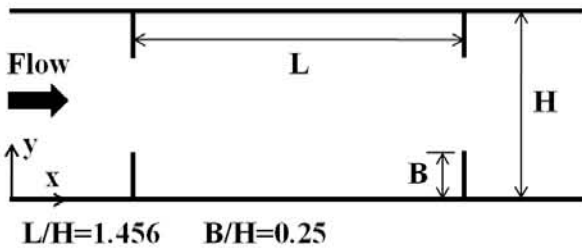


Fig. 1 Flow configuration

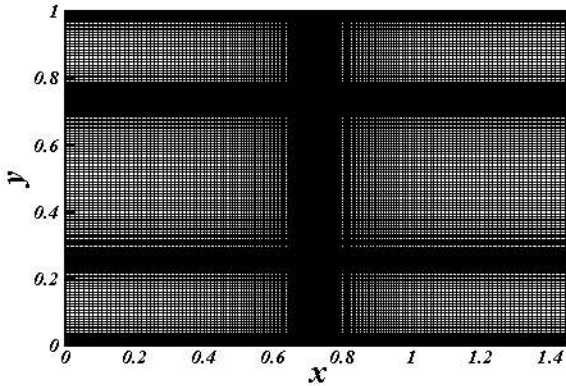


Fig. 2 Grid system

행하기 위해 3차원 계산 방법[6]이 아닌 Yoon등[7]이 제시한 가상경계법을 적용한 Floquet 안정성 해석을 통해 이차 불안정성이 발생하는 임계 레이놀즈 수와 횡방향 파동수를 체계적으로 계산하였다.

2. 기본 유동(Base flow)

2.1 지배 방정식과 수치해석 기법

본 연구에서는 채널 내 배플을 구현하기 위해 가상경계법을 이용하여 수치해석을 수행하였다. 가상경계법이 적용된 비압축성 연속 방정식, 운동량 방정식은 다음과 같다[8].

$$\nabla \cdot \mathbf{u} - q = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \tag{2}$$

여기서 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ 는 속도벡터, p 는 압력, \mathbf{f} 는 운동량부가를 각각 나타낸다. 위 방정식의 모든 길이는 채널 높이(H)

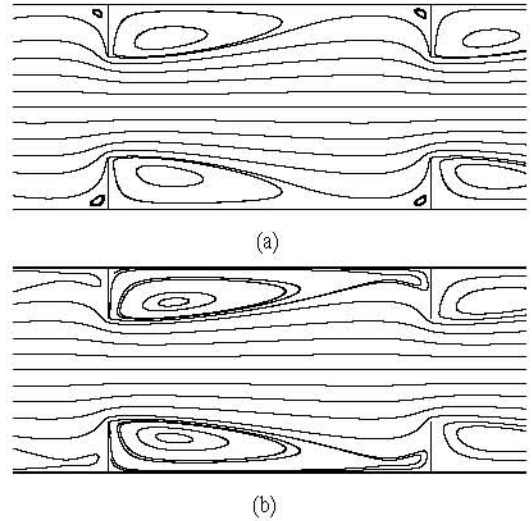


Fig. 3 Streamlines of steady flow ; (a) Re=60, (b) Re=80

로, 속도는 채널 내 유동의 평균속도(U_m)로 무차원화 되었다. 각 방정식은 유한체적법(Finite Volume Method)으로 차분되었고, 비균일 엇갈린 격자계(non-uniform staggered grid)를 사용하였다. 시간 차분은 운동량 방정식에서 대류항에 대하여 3차 정확도의 Runge-Kutta 기법으로 명시적으로 적분하였고, 점성항은 Crank-Nicolson 기법으로 묵시적으로 적분하였다. 공간차분으로는 2차 정확도의 중앙차분을 적용하였다. 연속방정식과 운동량 방정식을 분리하기 위하여 Fractional step 기법[9]이 사용되었다.

경계조건으로는 주유동방향으로 주기조건이 사용되었으며 ($\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}(x + L, y)$), 채널 내 벽면과 배플의 표면에서는 no-slip 조건을 사용하였다. 유량(즉, Re)을 일정하게 유지하기 위하여 You등의 기법[10]을 사용하였다. 계산영역과 유동형상은 Roberts[4]와 Yang[6]의 연구와 동일하게 유동방향과 수직 방향으로 각각 $0 \leq x/H \leq 1.456$, $0 \leq y/H \leq 1$ 를 사용하였다(Fig. 2). 사용된 격자수는 격자 세분화 과정을 통해서 x, y 방향으로 192×192 의 격자계를 사용하였다. Table 1은 Re=130에 대한 격자 세분화 결과를 보여준다. V_{cl} 은 다음과

Table 1 Grid resolution for Re=130

$N_x \times N_y$	V_{cl}
128 × 128	0.427
192 × 192	0.432
256 × 256	0.433

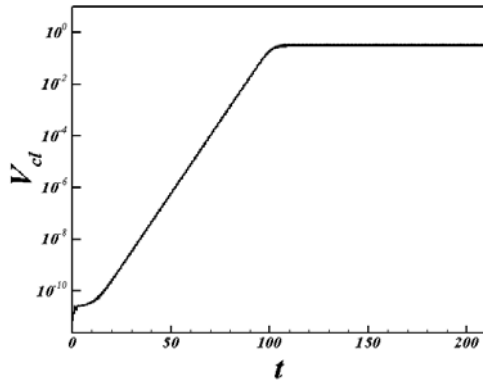


Fig. 4 V_d vs. time for $Re=130$

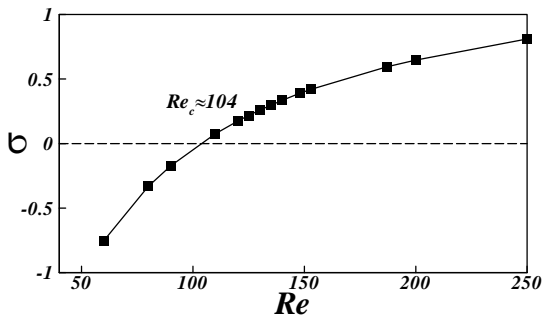


Fig. 5 Instability growth rate vs. Re

같이 정의되는 채널의 중심선에서의 수직성분 크기의 평균이다.

$$V_d = \frac{1}{L} \int_0^L |v(x, 0.5)| dx \quad (3)$$

Table 1에서의 V_d 값은 Hopf 분기 후의 값이다(Fig. 4).

본 연구에서 사용된 격자계로 계산된 V_d 의 값과 계산영역의 각 방향으로 4/3배씩 증가시킨 격자계의 V_d 의 값이 약 0.23%의 오차를 보인다.

2.2 Steady 유동

Fig. 3은 각각 정상상태 유동장에서의 유선을 나타낸 것이다. 정상상태에서 유동은 상하 대칭의 형태를 보이며 배플의 뒷면에 재순환영역이 형성되는 것을 확인할 수 있다. 또한 배플 앞면의 벽면 근처에서 상대적으로 작은 재순환영역이 나타남을 알 수 있다. 이때 낮은 Re 에서는 Fig. 3(a)에서와 같이 두 재순환영역이 분리되어 나타나지만, Re 가 증가함에 따라

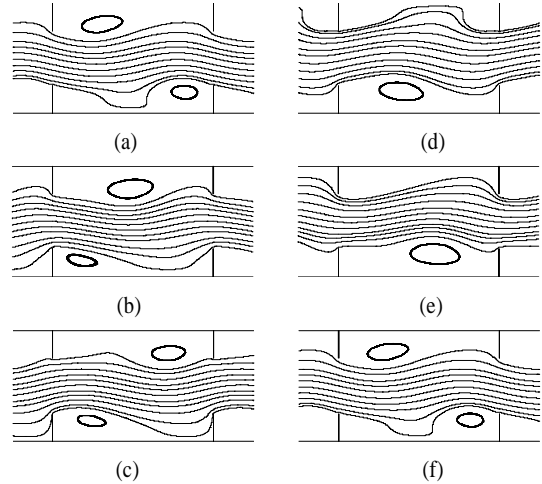


Fig. 6 Streamlines of unsteady flow over one period for $Re=130$; (a) $t = 0T$, (b) $t = 1/5T$, (c) $t = 2/5T$, (d) $t = 3/5T$, (e) $t = 4/5T$, (f) $t = 5/5T$

Fig. 3(b)에서와 같이 두 재순환영역이 합쳐지는 것을 확인할 수 있다. 이러한 유동형태는 Roberts[4]와 Yang[6]의 연구결과들과 잘 일치한다.

2.3 Primary 불안정성과 Unsteady 유동

채널 내 배플과 같은 장애물이 존재할 경우, Re 가 증가함에 따라 유동 불안정성이 증가하여 임계 $Re(Re_{cl})$ 에서 주불안정성인 Hopf 분기(Hopf bifurcation)가 발생하게 된다. 이때 정상상태의 유동은 주기적인 비정상상태 유동으로 천이하게 된다. 이러한 비정상 유동이 발생하는 유동 불안정성을 이해하기 위해서 식 (3)의 V_d 를 매개변수로 하여 유동 불안정성을 확인하였다[4]. 정상상태 유동의 경우 유동장이 상하 대칭의 형태를 보이므로 V_d 은 0이 된다. 하지만 유동 불안정성이 발생하면 V_d 은 증가하게 된다. Fig. 4는 Re 가 130인 경우 시간에 따른 V_d 의 변화를 보여준다. 불안정성이 나타나면 그림에서와 같이 V_d 이 지수적(exponential)으로 증가하며, 점근 값으로 수렴한 후 주기적으로 변화하는 자체 지속적인 진동(Self-sustained oscillation)현상이 나타난다.

주 불안정성(Primary instability)이 나타나는 임계 Re 는 V_d 의 선형 증가율(σ)로부터 계산된다. 비정상상태 유동의 경우 증가율(σ)은 Fig. 4에서와 같이 지수적으로 증가하는 V_d 로부터 계산되어진다. 정상상태 유동의 경우에는 수렴된 유동장에 난수(random number)의 교란 유동을 사용하여 지수적으로 감쇠하는 V_d 의 증가율(σ)을 계산하였다. Fig. 5에 Re 변화에 따른 증가율(σ)을 나타내었다. σ 의 변화로부터 주 불안정성

이 발생하는 임계 $Re(Re_{c1})$ 는 약 104로 계산되어진다. 이는 Roberts[4]의 실험결과에 의한 임계치(100), Roberts의 수치해석 결과에 의한 임계치(100-110)와 일치한다.

Fig. 6은 정상상태에서 주기적인 2차원 유동으로 천이한 Re 가 130인 경우 한 주기(T) 동안의 유동변화를 보여준다. 배플의 뒷면에서 생성된 와류는 벽면을 따라 다음 배플로 이동하며, 주 유동은 상하로 진동하는 것이 관찰된다. 또한 채널의 윗면과 아랫면에서 생성되는 와류는 서로 엇갈린 형태로 나타남이 관찰된다. 이러한 주기적인 유동형태는 Roberts[4]의 연구결과와 잘 일치하고 있다.

3. Floquet 안정성 해석

3.1 지배 방정식과 수치해석 기법

주기적인 2차원 유동이 3차원 유동으로 천이하는 이차 불안정성을 해석하기 위하여 Yoon등[7]이 제시한 가상경계법을 적용한 Floquet 안정성 해석을 수행하였다.

유동장의 순간 속도는 주기 T 를 가지는 2차원 기본 유동(base flow, $\mathbf{U}(x,y,t) = \mathbf{U}(x,y,t+T)$)과 3차원 교란속도(perturbation velocity, $\mathbf{u}'(x,y,z,t)$)로 구성된다.

$$\mathbf{u}(x,y,z,t) = \mathbf{U}(x,y,t) + \mathbf{u}'(x,y,z,t) \quad (4)$$

위의 식을 Navier-Stokes 방정식과 연속방정식에 대입하여 선형화하면 다음과 같은 교란 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}' \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{u}') = -\nabla p' + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}' + \mathbf{f}' \quad (6)$$

여기서 \mathbf{f}' 는 가상경계법을 적용하기위한 운동량부가 항이다. 경계조건으로는 기본 유동과 동일하게 주유동방향으로는 주기조건($\mathbf{u}'(x,y,z) = \mathbf{u}'(x+L,y,z)$)이 사용되었으며, 채널 내 벽면과 배플의 표면에서는 no-slip 조건($\mathbf{u}' = 0$)을 사용하였다. 위의 교란 방정식에서 perturbation 속도와 압력은 횡방향(z)으로 homogeneous 한 특성을 가지므로 Fourier 적분을 통해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ p' \end{bmatrix}(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{p} \end{bmatrix}(x,y,\beta,t) e^{i\beta z} d\beta \quad (7)$$

여기서 $\beta (= 2\pi/\lambda)$ 는 횡방향 파동수이며, λ 는 유동 교란의 횡방향 파장을 나타낸다. 식 (5),(6)은 선형이므로 각각의 모드

$|\beta|$ 에 대해 독립적이며, 교란 속도와 압력은 각각 다음과 같은 형태가 된다.

$$\mathbf{u}'(x,y,z,t) = (\hat{u} \cos \beta z, \hat{v} \cos \beta z, \hat{w} \sin \beta z) \quad (8)$$

$$p'(x,y,z,t) = \hat{p} \cos \beta z$$

변형된 교란 방정식은 Fourier 계수로 이루어지며, 식 (5)와 (6)의 gradient 연산자 ∇ 를 $\nabla_{\beta} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, i\beta)$ 로 교체함으로써 얻어진다. 선형 연산자 \mathbf{L} 을 교란 방정식의 우변으로 정의하면 교란 방정식은 다음과 같은 형태가 된다.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbf{L}(\hat{\mathbf{u}}) \quad (9)$$

여기서 $\mathbf{L}(\hat{\mathbf{u}})$ 는 주기 T 를 가지는 함수이며, 식 (9)의 해는 $\tilde{\mathbf{u}}(x,y,z,t) \exp(\sigma t)$ 형태의 함수로 이루어진다. 여기서 $\tilde{\mathbf{u}}(x,y,z,t)$ 또한 주기 T 를 가지는 함수이며, 이를 연산자 \mathbf{L} 의 Floquet mode라고 한다[11]. σ 는 Floquet 지수이고 Floquet 안정성 분석에서는 $\mu = \exp(\sigma T)$ 로 정의되는 Floquet multiplier를 통해 안정성을 판별하게 된다. Floquet multiplier는 \mathbf{L} 의 고유값을 통해 구하게 되며, $|\mu| < 1$ 인 경우 유동 교란은 지수적으로(exponentially) 감소하고 유동장은 안정화 상태이며, $|\mu| > 1$ 인 경우에는 지수적으로 증가하고 유동장은 불안정한 상태가 된다. Floquet multiplier는 다음과 같이 정의되는 교란 속도의 운동에너지를 통해 얻어진다[12].

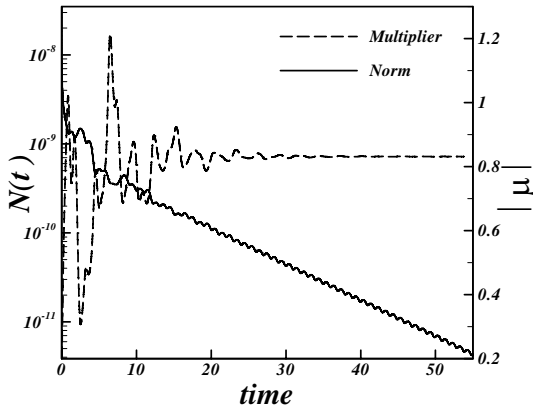
$$|\mu_{\max}| \approx N(t+T)/N(t) \quad (10)$$

$$N(t) = \sqrt{\int_{\Omega} [\hat{u}(x,t)^2 + \hat{v}(x,t)^2 + \hat{w}(x,t)^2] d\Omega} \quad (11)$$

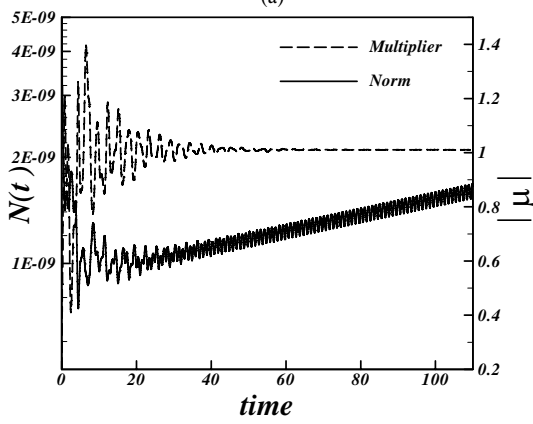
각 Floquet mode의 교란 방정식은 기본유동의 수치해석 기법과 동일하게 유한 체적법으로 차분되었다. 시간 차분은 대류항에 대하여 3차 정확도의 Runge-Kutta 기법으로 적분되었고, 점성항은 Crank-Nicolson 기법으로 적분되었다. 연속방정식과 운동량 방정식을 분리하기 위하여 Fractional step 기법[9]이 사용되었으며, 채널 내 배플을 구현하기위해 가상경계법[8]이 적용되었다. 격자수는 기본유동의 격자계와 동일한 격자수 ($192(x) \times 192(y)$)를 사용하였다.

3.2 Secondary instability

Fig. 7(a)는 기본유동의 Re 가 120이고, 횡방향 파동수(β)가 4.1인 경우 시간에 따른 교란속도의 운동에너지와 Floquet



(a)



(b)

Fig. 7 Growth of the norm and the Floquet multiplier ; (a) $Re = 120, \beta = 4.1$, (b) $Re = 125, \beta = 4.0$

multiplier의 변화를 보여준다. 교란속도의 초기조건으로는 난수(random number)를 사용하였다. 초기조건의 영향으로 구조가 없는 난수들은 불규칙적으로 감소하다가 무차원 시간으로 약 15 정도부터는 운동에너지가 지속적으로 감소하며 Floquet multiplier는 일정한 값으로 수렴하고 있음을 확인할 수 있다. 이때 $|\mu| \approx 0.829$ 로 수렴하며, $|\mu| < 1$ 이므로 유동장은 안정한 상태이다. Fig. 7(b)는 기본유동의 Re 가 125이고, 횡방향 파동수(β)가 4.0인 경우의 운동에너지와 Floquet multiplier의 변화를 나타낸 것이다. 운동에너지가 지속적으로 증가하고 있음을 확인할 수 있다. 이때 $|\mu| \approx 1.01$ 로 수렴하며, $|\mu| > 1$ 이므로 유동장은 불안정한 상태이다.

채널 내 배플에 의해 주기적인 2차원 유동으로 천이한 유동은 Re 가 증가함에 따라 3차원 유동으로 천이하게 된다. 이때의 임계 $Re(Re_{c2})$ 는 Floquet 안정성 분석을 통하여 각각의 횡방향 파동수에 따른 Floquet multiplier를 계산함으로써 얻을

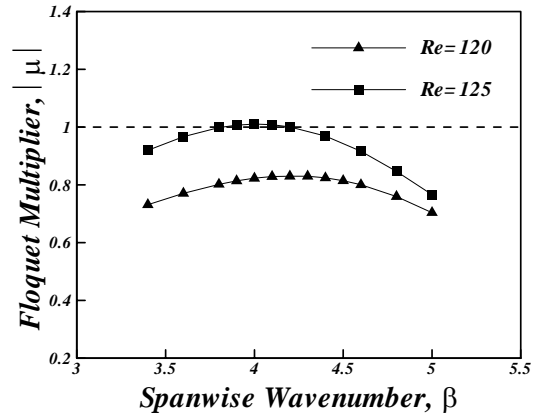


Fig. 8 Variation of Floquet multipliers with spanwise wavenumber

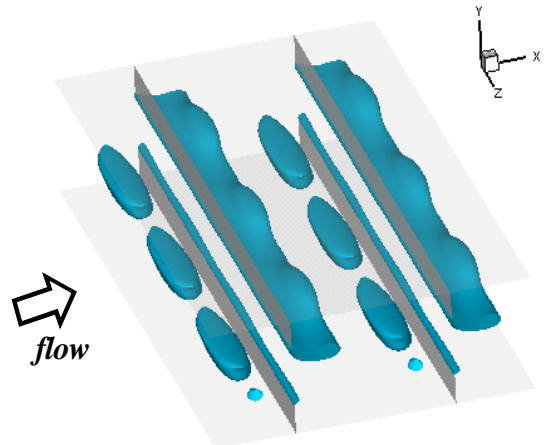


Fig. 9 Q contours[13] of Floquet mode for $\beta = 4.0, Re = 125$

Floquet multiplier를 나타낸 것이다. $|\mu| = 1$ 인 점선은 중립 안정한(neutral stability) 상태를 의미한다. $Re=120$ 인 경우 모든 범위의 β 에서 Floquet multiplier가 1보다 작은 결과를 보이며 유동장이 안정한 상태를 보이지만, Re 가 증가하면 $Re=125$ 일 때와 같이 $|\mu|$ 값이 1보다 커지는 β 가 나타나며 유동장은 불안정한 상태가 된다. 위의 결과로부터 보간을 통하여 주기적인 2차원 유동에서 3차원 유동으로 천이하는 임계 $Re(Re_{c2})$ 는 124.85이며, 이때의 임계 횡방향 파동수(β_c)는 4.0으로 확인되었다. 이에 해당하는 임계 횡방향 파장(spanwise wavelength, $\lambda_c = 2\pi/\beta_c$)은 1.57이다.

Fig. 9는 3차원 유동으로 천이한 유동장의 유동 구조를 파악하기 위해서 기본 유동과 교란 유동의 중첩($\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$)을 통해 구현된 유동장에서의 3차원 와류 구조를 보여준다. 기본

유동의 Re 가 125이고, 교란 유동이 가장 불안정한 $\beta = 4.0$ 인 경우의 순간 유동장의 속도 성분을 이용하였다. 여기서 주유동방향(x)과 수직방향(y)으로는 기본유동과 Floquet 안정성 해석에 사용된 격자와 동일한 격자(192×192)를 사용하였으며, 횡방향(z)으로는 512개의 격자를 사용하여 3차원으로 확장하였다. 이때 3차원 와류 구조를 가시화하여 나타내기 위해서 Jeong and Hussain[12]이 제시한 positive second invariant of the velocity gradient tensor(Q)를 이용하여 순간 유동장에서 와류의 구조를 나타내었다. 채널의 윗면에서는 배플의 뒷면에, 아랫면에서는 배플의 앞면에 횡방향으로 주기적인 와류 구조가 관찰되며, 채널의 윗면과 아랫면에 부착된 배플의 끝부분을 보면 이 부분에서 와류가 형성되는 것을 관찰할 수 있다. 이렇게 형성된 와류는 주유동방향으로 이동하며 그림에서와 같이 횡방향으로 변형된 특성을 보인다.

4. 결 론

본 연구에서는 채널 내 배플이 주기적으로 부착된 채널 유동의 유동 불안정성에 대한 수치해석적 연구를 수행하였다. 채널 내 부착된 배플은 유동 불안정성을 증가시켜 정상상태의 유동이 주기적인 비정상상태로 천이되는 주 불안정성을 발생시켰다. 이때의 임계 $Re(Re_{c1})$ 는 약 104로 계산되어 졌으며, 선행 연구자들의 결과와 일치하였다. Re 가 증가함에 따라 주기적인 2차원 유동이 3차원 유동으로 천이하는 이차 불안정성이 발생하였다. 이러한 유동 천이를 해석하기 위해서 Floquet 안정성 해석을 수행하여 2차원 유동에서 3차원 유동으로 천이하는 임계 $Re(Re_{c2})$ 와 임계 횡방향 파동수(β_c)를 계산하였다. Re 가 124.85일 때 이차 불안정성이 나타났으며, 그때의 횡방향 파동수는 4.0으로 계산되었다. 또한 기본 유동과 교란 유동의 순간 속도 성분으로 구현된 3차원 와류 구조를 통해 3차원 유동으로 천이한 유동장에서 배플의 끝부분에서 형성된 와류는 횡방향으로 변형된 특성을 보임이 확인되었다.

후 기

본 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No.2010-0008457).

참고문헌

- [1] 1986, Ghaddar, N.K., Korczak, K.Z., Mikic, B.B. and Patera, A.T., "Numerical investigation of incompressible flow in grooved channels. Part 1. Stability and self-sustained oscillations," *J. Fluid Mech*, Vol.163, pp.99-127.
- [2] 1988, Karniadakis, G.E., Mikic, B.B. and Patera, A.T., "Minimum-dissipation transport enhancement by flow destabilization : Reynolds' analogy revisited," *J. Fluid Mech*, Vol.192, pp.365-391.
- [3] 1989, Amon, C.H. and Patera, A.T., "Numerical calculation of stable three-dimensional tertiary states in grooved-channel flow," *Phys. Fluids A*, Vol.1, No.12, pp.2005-2009.
- [4] 1994, Roberts, E.P.L., "A numerical and experimental study of transition processes in an obstructed channel flow," *J. Fluid Mech*, Vol.260, pp.185-209.
- [5] 1995, Schatz, M.F., Barkley, D. and Swinney, H.L., "Instability in a spatially periodic open flow," *Phys. Fluids*, Vol.7, No.2, pp.344-358.
- [6] 2000, Yang, K.S., "Numerical investigation of instability and transition in an obstructed channel flow," *AIAA J*, Vol.38, No.7, pp.1173-1178.
- [7] 2010, Yoon, D.H., Yang, K.S. and Choi, C.B., "Flow past a square cylinder with an angle of incidence," *Phys. Fluids*, Vol.22, No.4, p.043603.
- [8] 2006, Yang, J. and Balaras, E., "An embedded-boundary formulation for large-eddy simulation of turbulent flows interacting with moving boundaries," *J. Comput. Phys*, Vol.215, pp.12-40.
- [9] 1985, Kim, J. and Moin, P., "Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equation," *J. Comput. Phys*, Vol.59, pp.308-323.
- [10] 2000, You, J., Choi, H. and Yoo, J.Y., "A modified fractional step method of keeping a constant mass flow rate in fully developed channel and pipe flows," *KSME International Journal*, Vol.14, pp.547-552.
- [11] 1996, Barkley, D. and Henderson, R.D., "Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder," *J. Fluid Mech*, Vol.322, pp.215-241.
- [12] 1999, Robichaux, J., Balachandar, S. and Vanka, S.P., "Three-dimensional Floquet instability of the wake of square cylinder," *Phys. Fluids*, Vol.1, No.3, pp.560-578.
- [13] 1995, Jeong, J. and Hussain, F., "On the identification of a vortex," *J. Fluid Mech*, Vol.285, pp.69-94.