

## 유한요소법을 이용한 용접 해석(1) - 용접부 열유동 해석 -

양영수·김재웅

### Analysis of Weldment by Using Finite Element Method(1) - Heat Flow in Weldment -

Young-Soo Yang and Jae-Woong Kim

#### 1. 유한요소 해석법

우리주변에서 발생하는 자연현상을 수학을 이용하여 표현하는 것이 과학의 기본이며, 대부분의 현상들은 미분방정식 형태로 표현된다. 우리는 이러한 미분방정식을 해당 현상의 지배방정식이라 한다. 예로서 용접부 내의 열전도현상은 다음과 같은 지배방정식으로 표현된다.

$$\nabla \cdot (k \nabla T) - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + Q = 0 \quad (1)$$

T: 온도, t: 시간, k: 열전도계수,  $\rho$ : 밀도, c: 비열, Q: 내부발열량 이다.

지배방정식은 시스템내의 임의의 위치 및 시간에 대해서 적용이 가능하기 때문에 만약 이 방정식을 풀어 해를 얻을 수 있다면, 우리는 용접부 내의 어느 위치 또는 시간에서의 온도를 구할 수 있다. 그러나 복잡한 형상이나 경계조건에 대해 일반적으로는 해를 구할 수 없기 때문에 유한요소법과 같은 수치해석을 이용하여 해를 구한다.

유한요소법을 이용하여 해를 구하기 위해서는 유한요소 수식화 과정이 필요하다. 주어진 문제의 미분방정식을 유한요소 수식화하는 방법은 여러 가지가 있지만 공학에서 많이 사용하고 있는 Galerkin의 방법에 대하여 설명한다.

주어진 시스템의 지배방정식이  $f=0$  로 주어지면,  $f$  와 임의함수  $R$  의 내적(inner product)조건을 만족하기 위해서는 다음과 같은 수식이 성립된다.

$$f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (f \cdot R) = 0$$

$$\int (f \cdot R) dV = 0 \quad (2)$$

유한요소법은 수식(2)에서 임의함수  $R$  대신 형상함수  $N$  사용하는 방법이다. 즉 Galerkin의 방법에 의해 유한요소 수식화한 결과는 다음과 같다.

$$\int (f \cdot N) dV = 0 \quad (3)$$

여기서  $N$ : 형상함수이며, 수식(3)은 풀어야 할 미분방정식을 해석영역 전체를 포함하는 적분형태와 형상함수로 표현하였다. 유한요소법이란 해석영역을 여러 개로 분할하여 요소(element)와 절점(node)을 형성하고 각 요소에 대하여 수식(3)을 적용시키는 것이다. 형상함수(shape function)란 주어진 하나의 요소에서 절점 값을 이용하여 요소내의 값을 표현하는 함수이다. 2차원 4각형 요소가 그림 1과 같다면 요소내의 온도분포는 형상함수를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 + N_4 T_4 \quad (4)$$

#### 2. 용접 열유동 해석

용접부 열전달 해석을 위한 유한요소 수식화는 수식

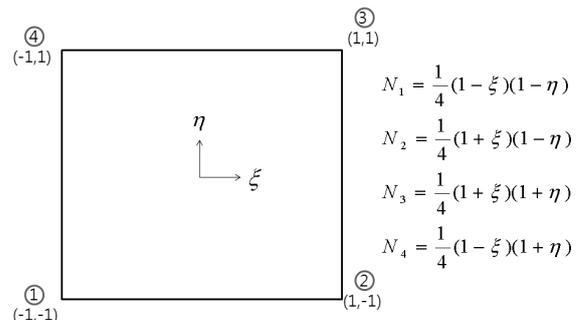


Fig. 1 Shape function in 2-dimension 4-node rectangular shape

(3)을 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\int [\nabla \cdot (k \nabla T) - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + Q] N_i dV = 0 \quad (5)$$

수식(5)을 가우스정리를 이용하고 경계조건을 고려하여 정리하고 행렬형태로 표시하면 다음과 같다. 용접부 해석에서는 일반적으로 복사 열전달 효과를 무시하고 전도와 대류효과만을 고려하여 복사 관련항을 제거하였다.

$$[C] \left[ \frac{dT}{dt} \right] + ([K_c] + [K_h])[T] = [R_T] + [R_Q] + [R_q] + [R_h] \quad (6)$$

여기서,

$$[C] = \int_v \rho c [N]^T [N] dV$$

$$[K_c] = \int_v [B]^T [k] [B] dV$$

$$[K_h] = \int_s h [N]^T [N] dS$$

$$[R_T] = - \int_s (\bar{q} \cdot \bar{n}) [N]^T dS$$

$$[R_Q] = \int_v Q [N]^T dV$$

$$[R_q] = \int_s q_s [N]^T dS$$

$$[R_h] = \int_s h T_e [N]^T dS$$

유한요소법을 이용하여 용접부 열유동을 계산하는 과정은 다음과 같은 순서에 의해 진행된다.

- ① 용접부를 적절한 수의 요소로 분할한다.
- ② 각각의 요소에 대하여 수식(6)을 적용한다.
- ③ 수식(6)에서 온도 T는 형상함수를 사용하여 절점 (node)온도로 표현된다.
- ④ 각각의 요소에 적용된 수식(6)을 전체 해석영역에 대하여 조합(assemble)한다.
- ⑤ 행렬 계산에 의해 각 절점에서 온도를 구한다.
- ⑥ 시간 변화에 따라 위의 과정을 반복한다.

### 2.1 열유동 해석의 초기조건과 경계조건

열유동 해석을 위해 계산하는 수식(6)을 살펴보면 현재시간을 기준으로  $\Delta t$  이후의 온도증분  $\Delta T$ 을 구하도록 되어 있다. 그러므로 용접부의 초기온도 입력은 필수적으로 요구된다. 일반적으로 해석에서 대기의 상온상태 20℃를 초기온도로 입력한다. 그리고 지배방정식으로부터 유도된 수식(6)에는 이미 경계조건이 포함되어 있다. 복사열전달 효과를 무시하면 표면에서 대류

열전달, 표면의 일정온도조건, 열유속(heat flux)에 의한 열의 유입 등 3가지 경계조건을 줄 수 있다. 만약 용접부의 해석영역 표면에서 위의 3가지 중에서 하나라도 고려되지 않은 표면이 존재하면, 여기서는 열유동이 없는 단열조건으로 처리된다. 참고로 아크용접 해석시에 아크 중앙을 중심으로 좌우 대칭이기 때문에 해석영역을 반쪽으로 설정한다. 이때 반쪽으로 잘린 중앙부분 단면에서는 좌우대칭에 의해 열전달이 없는 단열면이 되어 경계조건 없이 계산하면 단열처리 조건으로 계산된다.

상용유한요소 프로그램을 사용하여 용접부 열유동 해석을 수행할 때는 수식(6)의 계산을 수행하기 때문에 프로그램 입력변수는 수식(6)을 살펴보면 알 수 있다. 복사열전달을 무시하면 용접부재의 초기온도  $T_i$ , 재료의 물성치로 열전도계수 k, 밀도  $\rho$ , 비열 c, 대기로 대류열전달계수 h, 대기온도  $T_e$ , 용접열원인 입열분포 q가 필수 입력사항이다. 저장용접의 경우 용접부 내부에서 발생하는 발열량 Q 값의 입력이 필요하다.

### 2.2 아크열원의 입열 경계조건

용접열원에 의해 표면으로부터 입력되는 열량  $q(J/mm^2sec)$ 는 단위면적당 단위시간에 입력되는 열량이다. 아크용접에서 입열량 q는 아크중심에서 최대값을 나타내고 중심에서 반경방향으로 멀어질수록 감소한다. 일반적으로 아크열원 분포는 정규(Gaussian)분포로 가정하여 다음과 같이 수식화한다.

$$q(r) = q_0 e^{-ar^2} \quad (7)$$

여기서  $q_0$  : 아크중심에서의 입열밀도, a:상수, r:아크중심으로부터 반경방향 거리이다.

아크에 의해 입열된 열량의 총량  $Q(J/s)$ 는 전압(V)과 전류(I) 및 효율( $\eta$ )을 곱한 값으로 다음과 같이 표현된다.

$$Q = \eta VI \quad (8)$$

수식(7)과 같은 정규분포에서 반경의 크기는 무한대이기 때문에, 아크중심의 열원크기  $q_0$ 의 5%에 해당하는 반경거리를 아크유효반경  $\bar{r}$ 로 정의하면 다음과 같다.

$$0.05 q_0 = q_0 e^{-a\bar{r}^2} \quad (9)$$

$$a = \frac{3}{\bar{r}^2} \quad (10)$$

수식 (7), (8) (10)을 이용하여 정하면 아크열원의 분포는 다음과 같이 표현된다.

$$q(r) = \frac{3\eta VI}{\pi r^2} e^{-\frac{3r^2}{r^2}} \quad (11)$$

수식(11)을 일반적으로 많이 사용되고 있는 직교좌표계로 표시하면 아크열원의 분포는 다음과 같다.

$$q(x, y) = \frac{3\eta VI}{\pi r^2} e^{-\frac{3(x^2+y^2)}{r^2}} \quad (12)$$

### 2.3 고에너지밀도 열원의 입열 경계조건

레이저 및 전자빔과 같은 고에너지밀도 용접의 경우 수식(12)와 같은 표면 열입력 모델로는 깊은 용입현상을 나타낼 수 없다는 점을 고려하여 그림 2와 같은 이중타구형 체적 열입력 모델(Goldak's double ellipsoidal shaped weld heat source model)이 제안되었다<sup>1)</sup>. 그림에서 a, b, c는 각 좌표별 열원의 유효반경을 나타내며, 용접속도의 영향을 고려하여 열원의 진행방향에 대한 유효반경으로 열원중심에서 전방으로는  $c_f$ , 후방으로는  $c_r$ 로 설정한다.

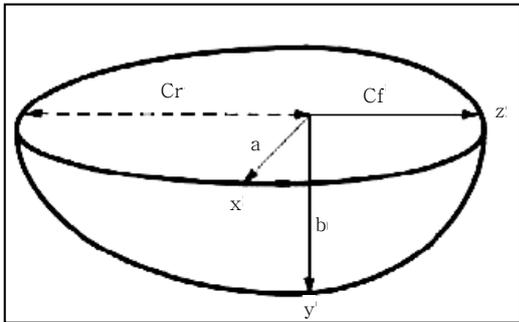


Fig. 2 Goldak's double ellipsoidal shaped weld heat source model

이와 같은 체적 열입력분포(double ellipsoidal power density distribution)는 전방 사분 타구부와 후방 사분 타구부에 대해 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$q(x, y, z, t) = \frac{6\sqrt{3} Q_f}{abc\pi\sqrt{\pi}} e^{-3x^2/a^2 - 3y^2/b^2 - 3z^2/c_f^2} \quad (13)$$

$$q(x, y, z, t) = \frac{6\sqrt{3} Q_r}{abc\pi\sqrt{\pi}} e^{-3x^2/a^2 - 3y^2/b^2 - 3z^2/c_r^2} \quad (14)$$

여기서,  $Q_f$ 와  $Q_r$ 는 각각 전방부와 후방부에 배분된 열량을 나타낸다.

용접부의 정밀한 열유동 해석을 위해서는 열원의 종류 및 특성에 따른 적합한 열원 모델을 적용할 필요가 있음을 알 수 있다. 수치해석에서 열원모델의 적합성은 용융부 및 열영향부의 크기와 형상을 잘 대변하는지의 여부로 평가되므로, 결국 열원 모델의 선정과 함께 적절한 열원 파라미터들을 선정해야 한다.

다음 호에서는 용접부 열유동 해석용 상용 유한요소 프로그램인 ABAQUS S/W를 활용한 실제 해석의 예를 보여 주고자 한다.

### 참 고 문 헌

1. 대한용접접합학회: 용접접합편람 -II 역학, 시공 및 검사, (2007)



- 양영수
- 1963년생
- 전남대학교 기계시스템공학부
- 용접변형 및 잔류응력 해석
- e-mail : ysyang@chonnam.ac.kr



- 김재웅
- 1959년생
- 영남대학교 기계공학부
- 용접공정 및 구조물 해석
- e-mail : jaekim@ynu.ac.kr