

간극공기압을 고려하는 불포화토의 유한요소해석

Finite Element Analysis of Partially Saturated Soil Considering Pore-air Pressure

김 재 홍¹ Kim, Jaehong

황 영 철² Hwang, Young-Cheol

Abstract

A model of solid-water-air coupling in triphasic mixture is compared to that of solid-water coupling in biphasic mixture with an application to partially saturated soils. Based on thermodynamics, the mathematical framework governing the behavior of a partially saturated soil is derived by using balance equations, and numerical implementation through drainage experiment of a sand column is carried out to validate the obtained formulations. The role of the air phase in the hydro-mechanical behavior of triphasic mixture can be analyzed from the interaction among phases and from the solid skeleton's constitutive behavior, and the three-phase model found applications in geotechnical engineering problems, such as CO₂ sequestration and air storage in an aquifer.

요 지

불포화 지반을 이루고 있는 흙의 알갱이, 물과 공기의 연계해석이 전체 지반의 변형에 미치는 영향을 알아보고자, 흙 알갱이와 물의 두 가지 요소로 해석되어지는 기존 관점과의 차이를 분석하고 그에 대한 원인을 비교하였다. 열역학적 가정을 토대로 평형방정식을 이용하여 불포화토 거동을 지배하는 물과 공기의 흐름 관계를 유한요소해석을 위한 수학적 알고리즘을 유도하여 배수시험 수치해석을 통해 기존 문헌과 비교·검증하였다. 3상으로 이루어진 불포화토 거동을 통해서 흙의 알갱이와 물과의 상호작용에서 공기압의 역할을 분석하여 불포화 지반 내에 물과 공기의 두 가지 흐름에 대해 지반공학적인 적용성을 알아보았다.

Keywords : Drainage experiment, Finite element method, Partially saturated soil, Pore-air pressure, Triphasic mixture

1. 서 론

최근 다공질 재료에서 나타나는 고체, 액체 그리고 가스가 함께 연계되어 거동하는 현상이 여러 분야에서 연구되어지고 있다. 지질학적인 구조나 생물학적인 조직 그리고 뼈의 구조 등에서 세 가지의 다른 물질이 연계되어 움직이는 현상이 수치해석적인 관점에서 다루

어지고 있으며, 지반공학적인 관점에서도 다양한 적용 사례들을 시도해오고 있다(Schrefler와 Zhan, 1993; Lacasse와 Nadim, 1994; Gawin 등, 1997; Schrefler와 Scotta, 2001; Laloui 등, 2003).

일반적으로 지반공학적인 측면에서는 간극공기압을 대기압으로 가정하고 흙의 알갱이와 간극수압의 관계를 가지고 불포화토 거동을 해석하며 실제 현장에서

1 콜로라도대학교 토목공학과 박사후과정 (Post Doctor, Dept. of Civil Engrg., Univ. of Colorado at Boulder)

2 정회원, 상지대학교 이공대학 건설시스템공학과 부교수 (Member, Associate Prof., Dept. of Civil Engrg., Sangji Univ., ychwang@sangji.ac.kr, 교신저자)

* 본 논문에 대한 토의를 원하는 회원은 2011년 9월 30일까지 그 내용을 학회로 보내주시기 바랍니다. 저자의 검토 내용과 함께 논문집에 게재하여 드립니다.

일어나는 현상을 예측하고 있다. 결국 지반공학적인 측면에서는 간극공기압을 '0'으로 가정하고 해석하는 결과들이 실험결과나 현장에서 얻는 결과 값에 비교적 근접한 접근을 보여주고 있다(Laloui 등, 2003). 그러나 특별한 경우로써, 해안 구조물을 이용하여 지하구조물에 CO₂ 를 격리하여 저장(CO₂ sequestration)하는 과정에서 불포화토 해석과정 중 간극공기압을 고려하여 해석(Lacasse와 Nadim, 1994)하거나, 지하수를 내장한 대수층(aquifer)에서 간극공기압이 축적되는 문제(air storage problem)에서 불포화토 내의 간극공기압을 상수가 아닌 변수로써 해석을 하는 사례를 볼 수 있다(Meiri와 Karadi, 1982; Schrefler와 Zhan, 1993; Schrefler와 Scotta, 2001).

본 연구의 목적은 흙의 거동에 있어서 수리학적 측면을 고려하고, 특히 공기압이 흙의 변위와 모관흡수력에 미치는 역할을 중점적으로 관찰하게 된다. 불포화토를 구성하고 있는 흙 알갱이 사이의 간극은 물과 공기, 두 가지 요소로 채워져 있지만, 하나는 공기압(gas phase; active)으로 가정할 수도 있고 다른 측면에서는 비어있는 공간(empty space; passive)으로 계산할 수 있는 두 가지 관점으로 해석할 수 있다. 전자는 연속적인 공기 흐름으로 관찰하여 체적공기(bulk air)가 미치는 관계식들을 고려하는 반면에, 후자는 단지 공기 버블(air bubble)로 다루며 간극수압의 압축성을 수정하여 간단하게 대처할 수 있다.

공기압을 고려하는 불포화토의 수치해석 모델들은 여러 문헌들에서 알 수 있듯이, 정확한 검증에 대한 어려움을 갖고 있다(Schrefler와 Zhan, 1993; Gawin 등, 1997; Schrefler와 Scotta, 2001; Laloui 등, 2003). 여러 연구자들에 의해서 Liakopoulos(1965)의 모래시료를 가지고 간극공기압을 고려하는 배수시험을 모사하려는 수치해석 모델들이 제시되고 검증을 해왔지만, 약간의 수치해석 알고리즘이나 지배방정식의 차이로 인해 간극공기압의 민감한 반응에 대해서는 정확한 해법을 찾지 못한 상태이다. 그래서 간단한 배수시험의 정확한 해답을 찾기 위해 비슷한 결과 값들과 경향들의 비교가 다시 시도되고 있다.

2. 물과 공기의 흐름을 고려하는 불포화토의 수학적 해법

2.1 지배 방정식

불포화토의 지배 방정식을 계산하기 위해서는 변위(u),

간극수압(p_w) 그리고 간극 공기압(p_a)을 구하기 위한 세 개의 방정식이 유도되어야 한다. 세 개의 미지수를 계산하기 위해 사용하는 평형방정식(Balance equation)으로, 불포화토 내의 물과 공기의 이동은 흙 입자의 움직임에 종속되기 때문에 흙 입자에 대한 평형방정식(Balance of linear momentum)과 불포화토 내의 물과 공기 흐름을 파악하여 간극수압과 간극 공기압을 계산할 수 있는 평형방정식(Balance of mass of the water and air)을 이용한다. 각각의 평형방정식들은 다음과 같다(Borja, 2004).

$$\text{DIV} \sigma + \rho g = 0 \quad (1)$$

$$n \frac{\partial S}{\partial s} (\dot{p}_a - \dot{p}_w) + S \text{DIV} v = -\text{DIV} \tilde{v}^w \quad (2)$$

$$\left[-n \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{n(1-S)}{K_a} \right] \dot{p}_a + n \frac{\partial S}{\partial s} \dot{p}_w + (1-S) \text{DIV} v = -\frac{1}{\rho^{aR}} \text{DIV} (\rho^{aR} \tilde{v}^a) \quad (3)$$

여기에서 전응력을 유효응력(σ')으로 나타내면 $\sigma = \sigma' - \bar{p} 1$ (positive in tension), 간극 공기압과 간극수압의 관계식은 $\bar{p} = p_a - S(s)(p_a - p_w)$, 전체 밀도(ρ)는 흙의 입자, 물 그리고 공기의 부분으로($\rho = \rho^s + \rho^w + \rho^a$) 구분할 수 있다. DIV(divergence)는 ∇ 를 의미하며, g 는 중력가속도, 불포화토의 체적비를 흙입자(n^s), 물(n^w), 그리고 공기(n^a)로 구분한다면, $1 = n^s + n^w + n^a$ 으로 표현할 수 있다. 포화도(S)는 모관흡수력(s)의 함수로써 식 (10)과 (11)에서 다시 표현된다. p_w 와 p_a 는 각각 간극수압과 간극공기압, \tilde{v}^w (superficial Darcy velocity of water)는 실제 물의 속도(v_w)와 흙 입자 속도($v = v_s$)의 차이로 $\tilde{v}_w = n^w (v_w - v)$ 으로써 표현된다. 유효응력에 대한 구성방정식(linear isotropic elasticity)과 불포화토 내의 물과 공기의 흐름을 파악할 수 있는 Darcy's law를 다음과 같이 나타낼 수 있다(Coussy, 2004).

$$\sigma' = c^e : \epsilon \quad (4)$$

$$\tilde{v}^w = k_w(S, n)(-\nabla p_w + \rho^{wR} g) \quad (5)$$

$$\tilde{v}^a = k_a(S, n)(-\nabla p_a + \rho^{aR} g) \quad (6)$$

여기에서 유효응력(σ')은 기울기, $c^e = \lambda 1 \otimes 1 + 2\mu I$ (Lamé parameters = λ, μ), 와 변위($\epsilon = \text{sym} \nabla u$)의 관계이며, 본 해석에서는 위의 관계식과 같이 선형 탄성(linear elasticity)으로 가정하여 불포화 지반내의 물의 흐름과 공기압의 작용에 대해서 중점적으로 관찰하였다. 물과 공기의 실제

밀도($\rho^{\alpha R}$)는 체적비의 관계로 표현할 수 있다 $\rho^{\alpha} = n^{\alpha} \rho^{\alpha R}$. 불포화 투수계수(k_{α})는 포화도와 간극비의 함수로써 다음과 같이 표현할 수 있다(Coussy, 2004).

$$k_{\alpha}(S, n) = \frac{l^2}{\eta_{\alpha}} \delta(n) k_{r\alpha}(S), \quad \delta(n) = \frac{n^3}{(1-n^2)}, \quad \alpha = w, a \quad (7)$$

$$k_{rw}(S) = \sqrt{S} [1 - (1 - S^{1/m})^m]^2 \quad (8)$$

$$k_{ra}(S) = \sqrt{1-S} (1 - S^{1/m})^{2m} \quad (9)$$

여기에서 $k_{r\alpha}$ 는 불포화토 내의 물과 공기의 상대투수계수, l^2 은 흙 간극 구조에 따른 정수(m^2), η_{α} 는 물과 공기의 점성계수 그리고 m 은 함수특성곡선의 재료 정수이다. 모관흡수력의 함수로 정의되는 함수특성곡선 관계식은 다음과 같다(van Genuchten, 1980).

$$S = S_r + S_e (1 - S_r) \quad (10)$$

$$S_e = \left[1 + \left(\frac{s}{a} \right)^n \right]^{-m} \quad (11)$$

여기에서 S_e 는 유효포화도, S_r 는 잔류포화도, s 는 모관흡수력 그리고 a 와 n 은 함수특성곡선의 재료정수이다.

2.2 구성 모델과 유한요소해석을 위한 관계식

유한요소 해석을 위한 전구역(whole domain, B)을 불포화부분이라고 가정하고, 가중잔류항법(method of weighted residuals)을 적용하면 흙의 변위(식 (12)), 간극수압(식 (13)) 그리고 간극공기압(식 (14))을 계산할 수 있는 연계된 평형방정식의 비선형 약형(coupled nonlinear weak form)을 얻을 수 있다(Hughes, 1987; 부록 식 (A1)-(A3)).

비선형 약형 수식에서 w 는 변위(u)를 위한 가중함수(weighting function), t^{σ} 는 외부하중 벡터, η 와 φ 는 각각 간극수압(p_w)과 간극공기압(p_a)을 위한 가중함수 그리고 S^w 와 S^a 는 각각 침투수와 침투공기, K_a 는 공기 체적계수를 나타낸다. 3가지의 미지수(u, p_w, p_a)를 연계한 비선형 약형(coupled nonlinear weak form)에 형상함수(shape function)를 적용함으로써, 행렬함수(matrix form) 형태로 유한요소 방정식으로 표현할 수 있다(부록 식 (A4)-(A6)).

유한요소 방정식에서 $\sum_{e=1}^{n_{el}}$ 는 유한요소(e)들의 누계를 계산하기 위한 연산자, c^e , α^e 그리고 β^e 는 각각 유한요

소 절점(node)에서 변위, 간극수압, 간극공기압 가중함수(w^h, η, φ)를 위한 값들, d^e , θ^e 그리고 ζ^e 는 요소 절점에서의 변위, 간극수압, 간극공기압 벡터들이다. 각 요소(element)들이 가지고 있는 내력(internal force)과 외력(external force) 벡터들과 강성 행렬(stiffness matrix)은 다음과 같이 유도할 수 있다. 본 실험에서 시료에 작용하는 외부 하중이 없으므로 흙의 변위에 따른 방정식은 3가지의 내력에 관련된 방정식(부록 식 (A7)-(A9))으로 표현할 수 있으며, 간극수압에 관련된 4개의 내력 방정식(부록 식 (A11)-(A14))과 2개의 외력 방정식(부록 식 (A10), (A15))으로 표현할 수 있으며, 마지막으로 간극공기압에 관련된 방정식은 4개의 내력 방정식(부록 식 (A16)-(A19))과 1개의 외력방정식(부록 식 (A20))으로 유한요소 방정식을 나누어 표현할 수 있다.

내·외력 방정식들에서 흙의 거동을 지배하는 유효응력(σ')은 선형 탄성(linear elasticity)으로 가정하고, $B^{e,u}$ 는 변위(u)에 대한 strain-displacement 행렬, $\bar{B}^{e,u}$ 는 divergence strain-displacement 행렬, $N^{e,u}$ 는 변위(u)에 대한 형상함수(shape function) 행렬, $B^{e,p}$ 는 간극수압(p_w)과 간극공기압(p_a)에 대한 strain-displacement 행렬 그리고 $N^{e,p}$ 는 간극수압(p_w)과 간극공기압(p_a)에 대한 형상함수(shape function) 행렬이다.

이와 같은 유한요소 방정식에 경계조건을 적용시킨 후, 각 요소들의 계산을 누적시키면 비선형 포물형 미분 방정식(coupled nonlinear parabolic first order ordinary differential equation)을 간단하게 행렬 형태로 표현할 수 있다.

$$C(D) \dot{D} + F^{INT}(D) = F^{EXT}(D) \quad (12)$$

비선형 포물형 미분 방정식에서 각각의 요소들을 행렬 형태로 자세히 구분할 수 있으며(부록 식 (A21)-(A24)), Backward Euler 방법을 이용한 내제적 방법(fully-implicit time integration)을 통해, 위와 같은 행렬 방정식을 Newton-Raphson 방법을 사용하여 계산할 수 있다.

$$C(D_{n+1}) \dot{D}_{n+1} + F^{INT}(D_{n+1}) = F^{EXT}(D_{n+1}) \quad (13)$$

여기에서 행렬 방정식은 Newton-Raphson 방법에 의해 선형화된 형태로 현재 시간 단계(t_{n+1})에서 해석이 수행되며, 반 내제적 방법(semi-implicit time integration)으로도 또한 평가되어 질 수 있다.

$$C(D_n)D_{n+1} + K(D_n)D_{n+1} = F^{EXT}(D_n) \quad (14)$$

여기에서 $F^{INT}(D_{n+1}) \approx K(D_n)D_{n+1}$ 이다. 결과적으로, 본 연구에서는 공기압을 고려하는 불포화토의 수리학적 흡의 거동을 내제적 방법(fully-implicit time integration)의 결과에 가깝게 근접하는 정확성을 가지고 빠른 시간 안에 계산할 수 있는 반 내제적인 방법(semi-implicit time integration)으로 수치해석 알고리즘을 유도하고 평가하였다.

3. 공기압을 적용한 불포화토 알고리즘을 위한 검증

3.1 배수 시험(Drainage test of soil column)

불포화토 내의 3상, 흡의 알갱이, 물 그리고 공기의 거동을 검증하기 위해 Liakopoulos(1965)의 모래시료를 이용한 배수시험을 토대로 수치해석을 수행해 왔다. 몇몇 문헌(Gawin 등, 1997; Schrefler와 Scotta, 2001; Laloui 등, 2003)들에서 배수시험을 모사한 수치해석 결과들은 본 연구에서 유도된 불포화토의 구성 방정식과 수치해석 알고리즘의 검증을 위해 사용되었다. 배수시험에 사용되는 시료의 높이는 1m이며 시료의 초기 조건은 포화 상태로서, 시료의 측면과 바닥면은 불투수 조건이다. 시험이 시작되면서 시료의 상부에서 유지되고 있는 물의 공급을 차단하고 바닥면은 물이 배수가 될 수 있도록 개방한다. 수치해석을 위한 시험에 사용된 재료의 물리적 특성들은 표 1에 요약되었으며, 그림 1은 해석 대상 시료의 배수시험 모식도이다.

여러 문헌과의 수치해석을 비교하기 위해 사용된 구성 관계식으로써, 공기압을 위한 상대투수계수 방정식으로 Brooks와 Corey(1966) 관계식을 사용하였고, 물의

표 1. 간극공기압을 고려한 배수시험에 사용된 흡의 물리적 특성

탄성계수 (E)	1.3 Mpa
포아송비 (ν)	0.4
흡 알갱이의 실제 밀도 (ρ^s)	2000 kg/m ³
공기 체적계수 (K_a)	0.1 MPa
물의 실제 밀도 (ρ^w)	1000 kg/m ³
공기 실제 밀도 (ρ^a)	1.2 kg/m ³
초기 간극률 (n)	0.2975
고유 투수계수 (κ)	4.5×10^{-13} m ²
물의 점성계수 (η_w)	1.0×10^{-3} Pa·s
공기 점성계수 (η_a)	1.8×10^{-5} Pa·s

흐름을 위한 상대투수계수 방정식은 Liakopoulos(1965)의 배수시험에서 사용된 경험적인 식을 사용하였다. 두 가지 관계식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$k_{ra} = (1 - S_e)^2 (1 - S_e^{(2+3\lambda)/\lambda}), \quad S_e = \frac{S - S_r}{1 - S_r}$$

$$k_{rw} = 1 - 2.207(1 - S_e)^{1.0121}, \quad S = 1 - 1.9722 \times 10^{-11} \cdot s^{2.4279}$$

$$k_\alpha = \frac{\kappa}{\eta_\alpha} k_{r\alpha}, \quad \alpha = w, a$$

여기에서 공기와 물의 상대투수계수는 각각 k_{ra} 와 k_{rw} , λ 는 간극크기에 따른 실험정수, S_e 는 유효포화도, S 는 포화도, k_α 와 η_α 는 α 에 따른 물과 공기의 투수계수와 점성계수, κ 는 흡의 고유투수계수를 나타낸다. 같은 배수시험을 수행할지라도 연구자마다 사용하는 수치해석의 지배방정식과 유한요소 구성방정식에 따라 실험정수 값에 대한 민감도는 결과들에서 약간의 오차를 발생한다(Gawin 등, 1997; Schrefler와 Scotta, 2001; Laloui 등, 2003; Ehlers 등, 2004). 본 연구에서 실험정수 λ 는 0.1을 적용하였으며, 잔류 포화도 S_r 는 0.06689이다.

본 논문에서 제시하고 있는 알고리즘의 투수계수 관계식은 흡의 거동에 따라 달라지는 간극률(n)을 변수로 사용하여 물과 공기 투수계수가 흡의 거동에 따라 달라질 수 있지만, 문헌과 비교하여 검증하기 위해서 간극률의 변수인 투수계수를 단지 포화도의 함수로만 고려하여 해석을 수행하였다.

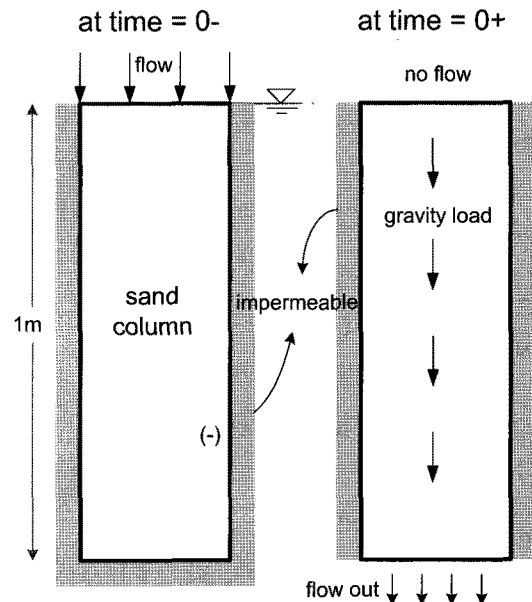


그림 1. 불포화토의 공기압을 고려하기 위한 배수시험

3.2 수치해석 비교 검증

Liakopoulos의 배수시험에서 사용된 시료의 물성값들과 실험적인 결과들은 불행하게도 간극 수압 결과는 초기조건과 경계조건에 맞는 실험값들이 소개되어졌지만, 공기압, 모관흡수력 그리고 포화도 같은 여러 결과들은 알려지지 않고, 측정에 있어서 불명확하다(Gawin 등, 1997; Schrefler와 Scotta, 2001; Laloui 등, 2003). 이러한 이유 때문에 연구자들은 시행착오적인 방법으로 공기압을 고려하는 배수시험의 수치해석 결과들을 얻

었다. 그림 2는 Liakopoulos 배수시험을 토대로 본 연구의 수치해석(Coupled code)과 Schrefler와 Scotta(2001)의 수치해석 결과를 비교한 것이다. 시료 상부의 물의 침투를 차단하면서 시간 변화에 따른 시료 상단 부간극수압의 증가를 보였다. 5, 20, 60, 120분의 시간의 따른 결과들에서 알 수 있듯이, 본 연구의 수치해석 진행과정이 Schrefler와 Scotta(2001)의 진행 속도보다 약간 빠르지만, 초기부분과 마지막 120분의 간극수압 값에 대해서는 비교적 비슷한 결과 값들을 얻었다.

그림 3에 의하면 Schrefler와 Scotta(2001)의 모관흡수력 진행되는 변화보다 본 연구의 수치해석(Coupled code)

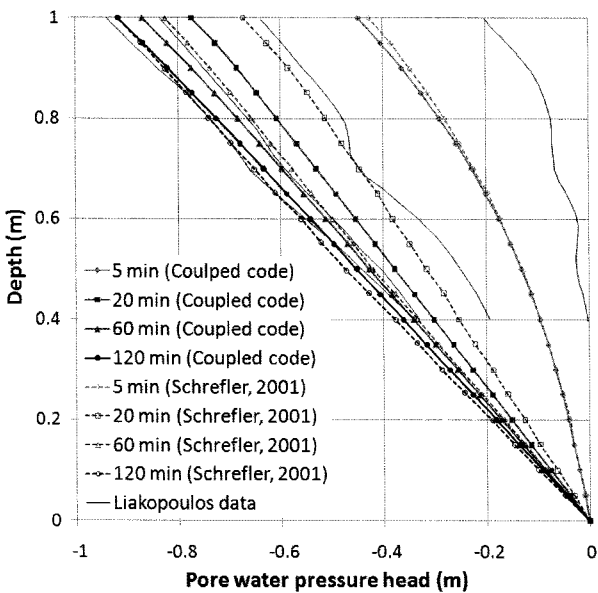


그림 2. Schrefler와 Scotta(2001)와 간극수압(p_w)의 수치해석 비교

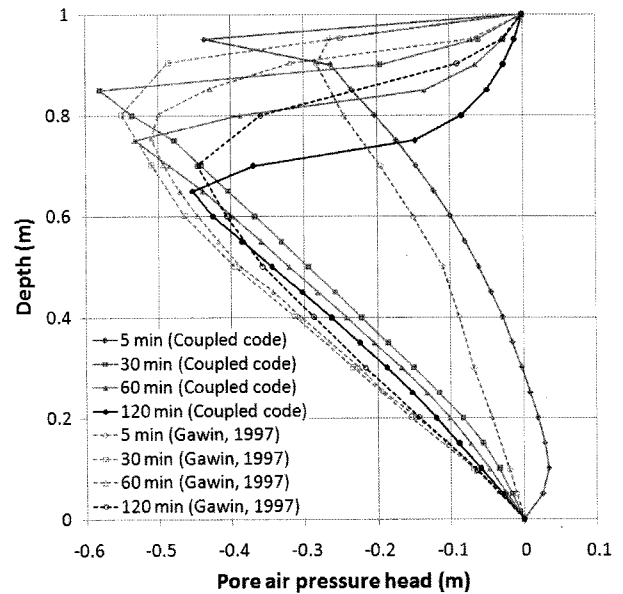


그림 4. Gawin 등(1997)과 간극공기압(p_a)의 수치해석 비교

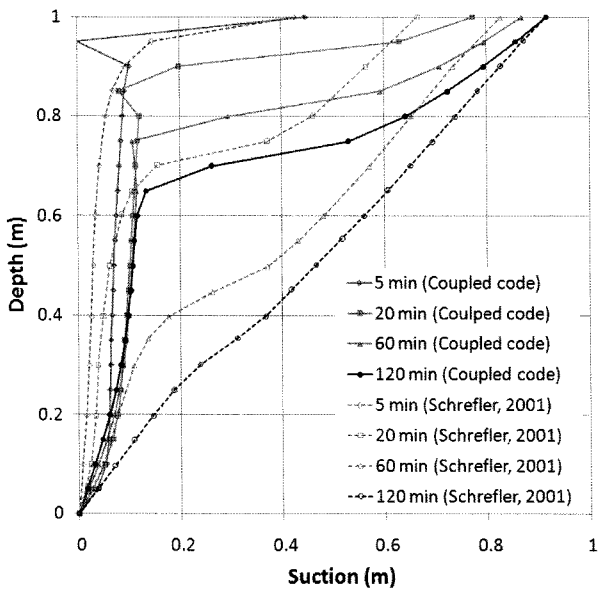


그림 3. Schrefler와 Scotta(2001)와 모관흡수력($p_a - p_w$) 값의 수치해석 비교

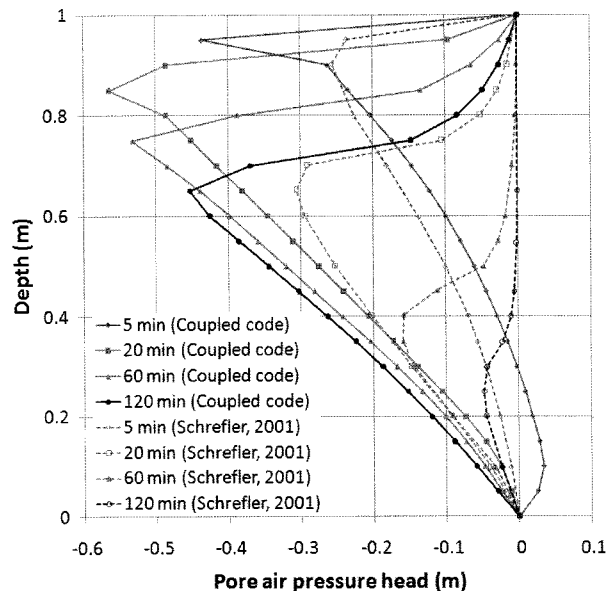


그림 5. Schrefler와 Scotta(2001)와 간극공기압(p_a)의 수치해석 비교

결과의 진행이 빠르다. 불포화 내의 공기압을 고려하기 때문에 모관흡수력($p_a - p_w$)은 공기압과 간극수압의 결과 값에 따라 계산되어 지는데, 배수시험에서 공기압의 변화는 지배방정식의 구성 조건과 수치해석의 알고리즘의 방식에 따라 차이점을 보여왔다(Gawin 등, 1997; Schrefler와 Scotta, 2001; Laloui 등, 2003). 여러 문헌들에서도 알 수 있듯이, 불포화토 내의 공기압의 간극수압보다 매우 민감한 반응을 나타낸다. 그림 4와 5에서와 같이 본 연구의 수치해석 결과는 Schrefler와 Scotta(2001)의 공기압의 반응보다 Gawin 등(1997)의 결과 값에 비교적 유사한 해석임을 알 수 있다.

Schrefler와 Scotta(2001)의 수치해석 알고리즘은 Newmark scheme을 이용하는 동역학 해석(dynamic analysis)을 기본으로 시간에 따른 가속도를 '0'으로 가정하고 정적인 문제로 바꾸어서 배수시험을 수행하였으나, Gawin 등(1997)의 수치해석 알고리즘은 정적인 해석(static analysis)을 위한 배수시험을 시뮬레이션한 결과이다. 그 이유 때문에 본 연구에서 유도한 알고리즘은 Gawin 등(1997)의 해석결과와 비교적 비슷한 유형을 보여주고 있다.

그림 6은 배수시험에서 중력하중으로 인한 시료 상부의 수직변위를 비교한 결과이다. 외부하중이 없는 배수 시험에서 중력하중만으로 야기되는 시료의 변위 역시 본 연구에서 제시하는 알고리즘의 시험과정 진행속도가 상대적으로 빠르다는걸 알 수 있다. Gawin 등(1997)의 해석은 실험조건과 약간 달리 간극수압과 간극 공기압의 초기조건은 정수두(hydrostatic pressure)에서 시작하여, 실험이 시작되면서 시료 밑부분의 간극수압의 조건은 대기압 상태로 '0'으로 조건이 바뀌어서 해석을 하였다. 본 연구에서 유도한 알고리즘은 실험조건과 같은

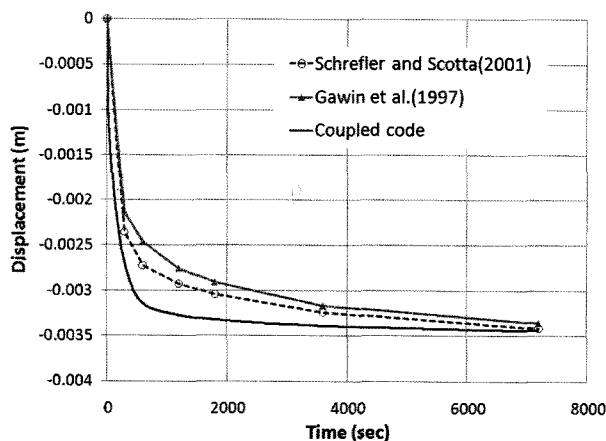


그림 6. 배수시험에서 시료상부의 수직변위

초기조건으로, 완전 포화상태의 시료에서 실험이 진행되고, 시료의 밑부분으로 배수가 시작되면서 간극수압은 '0'으로 해석되어진다. 따라서 그림 4에서 보듯이 간극 공기압의 발생과 소산이 Gawin 등(1997)의 결과값 본 연구의 결과보다 늦어지는 이유이다. 반대로 그림 5에서와 같이, Schrefler와 Scotta(2001)의 동역학적인 알고리즘으로 해석한 결과는 흙의 거동이 나머지 2가지 해석들보다 빠르다는 것을 알 수 있다.

4. 결론

불포화토를 구성하는 흙의 알갱이, 물 그리고 공기의 세 가지 성분을 모두 고려하여, 연계된 구성방정식을 정립하고 유한요소 해석 방법의 알고리즘으로 유도하였다. 여러 문헌에서 비교 검증하는 Liakopoulos(1965)의 불포화토 배수시험을 통하여 간극공기압을 고려하는 불포화토의 거동을 유한요소해석으로 시뮬레이션 하였다. 불행하게도 Liakopoulos(1965)의 실험결과들은 지금까지 간극수압의 결과 자료와 실험의 수행과정만 기록되어져 있어서, 여러 연구자들은 시행착오적인 방법으로 수치해석의 알고리즘을 개발하고 지배방정식을 구성하여 비교 검증을 시도해오고 있다(Gawin 등, 1997; Schrefler와 Scotta, 2001; Laloui 등, 2003; Ehlers 등, 2004). 실험 대상 모래시료는 자중으로 흙이 거동되고, 중력으로 물의 흐름과 동시에 간극공기압의 발생으로 불포화토 내부에서 발생하는 현상들을 여러 문헌들과 비교하였다. 수치해석상 비슷한 정적해석인 Gawin 등(1997)의 간극 공기압 반응은 Schrefler와 Scotta(2001)의 결과 값보다 본 연구에서 수행한 수치해석결과가 유사한 점을 발견하였고, 간극수압, 모관흡수력 그리고 수직변위 역시 유사한 경향을 보이며 비교 검증이 되어졌다. 특히, 기존에 해석되어진 문헌에서 물과 공기의 투수계수를 계산하는 구성방정식들은 흙의 간극률에 따라 투수계수 변화가 없는 관계식들을 이용하였지만, 본 연구에서 제안되는 투수계수 관계식은 지반의 간극률 변화에 따라 달라지는 투수계수를 고려할 수 있는 구성방정식을 포함하고 있다.

본 연구에서 유도한 불포화토 구성방정식은 CO₂ 지중 격리(Geo-sequestration) 문제, 대수층(aquifer)의 공기침투 문제와 흙 댐에서의 침윤선 수직변동에 따른 간극 공기압이 흙의 거동에 미치는 영향 등, 불포화토 내부에서 간극공기압 발생을 고려해야하는 지반공학적인 문제들

에 적용이 필요한 불포화 지반 해석이라 할 수 있다.

부 록

감사의 글

본 연구는 상지대학교 2008년 교내연구비 지원에 의해 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Borja, R.I. (2004), "Cam-Clay Plasticity. Part V: A mathematical framework for three-phase deformation and strain localization analyses of partially saturated porous media", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.193, pp.5301-5338.
2. Brooks, R.N. and Corey, A.T. (1966), "Properties of porous media affecting fluid flow", *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, ASCE, Vol. 92, pp. 61-68.
3. Coussy, O. (2004), *Poromechanics*, John Wiley and Sons, New York, pp.45-51, 157-168.
4. Ehlers, W., Graf, T. and Ammann, M. (2004), "Deformation and localization analysis of partially saturated soil", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.193, pp.2885-2910.
5. Gawin, D., Simoni, L. and Schrefler, B.A. (1997), "Numerical model for hydro-mechanical behaviour in deformable porous media: a benchmark problem", *Proceedings of the 9th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Balkema, Rotterdam, pp.1143-1148.
6. Hughes, T.J.R. (1987), *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, New Jersey, pp.1-51, 57-75.
7. Lacasse, S. and Nadim, F. (1994), "Reliability issues and future challenges in geotechnical engineering for offshore structures", *Norges Geotekniske Institutt*, Norway, Vol.191, pp.1-30.
8. Laloui, L., Klubertanz, G. and Vulliet, L. (2003), "Solid-liquid-air coupling in multiphase porous media", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.27, No. 3, pp.183-206.
9. Liakopoulos, A.C. (1965), *Transient flow through unsaturated porous media*, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, pp. 000-000.
10. Meiri, D. and Karadi, G. (1982), "Simulation of air storage aquifer by finite element model", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.6, pp.339-351.
11. Schrefler, B. and Scotta, A. (2001), "A fully coupled dynamic model for two-phase fluid flow in deformable porous media", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.190, pp.3 223-3246.
12. Schrefler, B. and Zhan, X. (1993), "A fully coupled model for water flow and airflow in deformable porous media", *Water Resources Research*, Vol.29, pp.155-167.
13. van Genuchten, M. (1980), "Closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils", *Soil Science Society of America Journal*, Vol.44, No.5, pp.35-53.

(접수일자 2011. 1. 6, 심사완료일 2011. 3. 11)

불포화 지반 평형방정식의 비선형 약형(coupled nonlinear weak form)

(1) 흙의 변위:

$$\begin{aligned} & \int_B \nabla w: [\sigma' - S p_w \mathbf{1} - (1-S)p_a \mathbf{1}] dv \\ & = \int_B \rho w g dv + \int_{\Gamma_t} w t^\sigma da \end{aligned} \quad (A1)$$

(2) 간극수압:

$$\begin{aligned} & \int_B \eta n \frac{\partial S}{\partial s} (\dot{p}_a - \dot{p}_w) dv + \int_B \eta S \text{DIV} v dv - \int_B (\nabla \eta) \tilde{v}^w dv \\ & = \int_{\Gamma_s^w} \eta S^w da \end{aligned} \quad (A2)$$

(3) 간극공기압:

$$\begin{aligned} & \int_B \varphi \frac{n(1-S)}{K_a} \dot{p}_a dv - \int_B \varphi n \frac{\partial S}{\partial s} (\dot{p}_a - \dot{p}_w) dv \\ & + \int_B \varphi (1-S) \text{DIV} v dv \\ & + \int_B \frac{\varphi}{K_a} (\nabla p_a) \tilde{v}^a dv - \int_B (\nabla \varphi) \tilde{v}^a dv \\ & = \int_{\Gamma_s^a} \varphi S^a da \end{aligned} \quad (A3)$$

불포화 지반의 유한요소 방정식(finite element equations)

(1) 흙의 변위:

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{e=1}^{n_{el}} (c^e)^T [f_e^{d,INT}(d^e, \theta^e) - f_e^{d\theta,INT}(\theta^e, \zeta^e) - f_e^{d\zeta,INT}(\theta^e, \zeta^e)] \\ & = f_e^{d,EXT}(d^e, \theta^e, \zeta^e) \end{aligned} \quad (A4)$$

(2) 간극수압:

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{e=1}^{n_{el}} (a^e)^T [k_e^{\theta d,INT}(\theta^e, \zeta^e) \dot{d}^e - k_e^{\theta\theta,INT}(d^e, \theta^e, \zeta^e) \dot{\theta}^e \\ & + k_e^{\theta\zeta,INT}(d^e, \theta^e, \zeta^e) \dot{\zeta}^e - f_e^{\theta 1,INT}(d^e, \theta^e, \zeta^e) = f_e^{\theta,EXT}] \end{aligned} \quad (A5)$$

(3) 간극공기압:

$$\sum_{e=1}^{n_d} (\beta^e)^T [k_e^{\zeta d, INT}(\theta^e, \zeta^e) \dot{d}^e - k_e^{\zeta \theta, INT}(\theta^e, \theta^e, \zeta^e) \dot{\theta}^e + k_e^{\zeta \zeta, INT}(\theta^e, \theta^e, \zeta^e) \dot{\zeta}^e - f_e^{\zeta, INT}(\theta^e, \theta^e, \zeta^e) = f_e^{\zeta, EXT}] \quad (A6)$$

식 (A4)-(A6)에서, 각 요소(element)들이 가지고 있는 내력(internal force)과 외력(external force) 벡터들과 강성 행렬(stiffness matrix),

(1) 흙의 변위에 따른 방정식(A4);

$$f_e^{d, INT}(\theta^e, \zeta^e) = \int_{B^e} (\mathbf{B}^{e,u})^T \sigma'(\theta^e, \zeta^e) dv \quad (A7)$$

$$f_e^{d\theta, INT}(\theta^e, \zeta^e) = \int_{B^e} S (\tilde{\mathbf{B}}^{e,u})^T \mathbf{N}^{e,p} \theta^e dv \quad (A8)$$

$$f_e^{d\zeta, INT}(\theta^e, \zeta^e) = \int_{B^e} (1-S) (\tilde{\mathbf{B}}^{e,u})^T \mathbf{N}^{e,p} \zeta^e dv \quad (A9)$$

(2) 간극수압에 따른 방정식(A5);

$$f_e^{d, EXT}(\theta^e, \zeta^e) = \int_{B^e} \rho(\theta^e, \zeta^e) (\mathbf{N}^{e,u})^T \mathbf{g} dv + \int_{\Gamma_t^e} (\mathbf{N}^{e,u})^T \mathbf{t}^\sigma da \quad (A10)$$

$$k_e^{\theta d, INT}(\theta^e, \zeta^e) = \int_{B^e} S (\mathbf{N}^{e,p})^T \tilde{\mathbf{B}}^{e,u} dv \quad (A11)$$

$$k_e^{\theta\theta, INT}(\theta^e, \theta^e, \zeta^e) = \int_{B^e} n(d^e) \frac{\partial S}{\partial s} (\mathbf{N}^{e,p})^T \mathbf{N}^{e,p} dv \quad (A12)$$

$$k_e^{\theta\zeta, INT}(\theta^e, \theta^e, \zeta^e) = \int_{B^e} n(d^e) \frac{\partial S}{\partial s} (\mathbf{N}^{e,p})^T \mathbf{N}^{e,p} dv \quad (A13)$$

$$f_e^{\theta 1, INT}(\theta^e, \theta^e, \zeta^e) = \int_{B^e} (\mathbf{B}^{e,p})^T \tilde{\mathbf{v}}^w(\theta^e, \theta^e, \zeta^e) dv \quad (A14)$$

$$f_e^{\theta, EXT} = \int_{\Gamma_s^{w,e}} (\mathbf{N}^{e,p})^T S^w dv \quad (A15)$$

(3) 간극공기압에 따른 방정식(A6);

$$k_e^{\zeta d, INT}(\theta^e, \zeta^e) = \int_{B^e} (1-S) (\mathbf{N}^{e,p})^T \tilde{\mathbf{B}}^{e,u} dv \quad (A16)$$

$$k_e^{\zeta\theta, INT}(\theta^e, \theta^e, \zeta^e) = \int_{B^e} n(d^e) \frac{\partial S}{\partial s} (\mathbf{N}^{e,p})^T \mathbf{N}^{e,p} dv \quad (A17)$$

$$k_e^{\zeta\zeta, INT}(\theta^e, \theta^e, \zeta^e) = \int_{B^e} \left[\frac{n(d^e)}{K_a} (1-S) - n(d^e) \frac{\partial S}{\partial s} \right] (\mathbf{N}^{e,p})^T \mathbf{N}^{e,p} dv \quad (A18)$$

$$f_e^{\zeta 1, INT}(\theta^e, \theta^e, \zeta^e) = \int_{B^e} (\mathbf{B}^{e,p})^T \tilde{\mathbf{v}}^a(\theta^e, \theta^e, \zeta^e) dv \quad (A19)$$

$$f_e^{\zeta, EXT} = \int_{\Gamma_s^{\sigma,e}} (\mathbf{N}^{e,p})^T S^\sigma dv \quad (A20)$$

비선형 포물형 미분 방정식(coupled nonlinear parabolic first order ordinary differential equation)의 행렬 요소들,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d \\ \theta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} \quad (A21)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K^{\theta d, INT}(\theta, \zeta) & -K^{\theta\theta, INT}(d, \theta, \zeta) & K^{\theta\zeta, INT}(d, \theta, \zeta) \\ K^{\zeta d, INT}(\theta, \zeta) & K^{\zeta\theta, INT}(d, \theta, \zeta) & K^{\zeta\zeta, INT}(d, \theta, \zeta) \end{bmatrix} \quad (A22)$$

$$\mathbf{F}^{INT}(\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} F^{d, INT}(d, \theta) - F^{d\theta, INT}(\theta, \zeta) - F^{d\zeta, INT}(\theta, \zeta) \\ -F^{\theta 1, INT}(d, \theta, \zeta) \\ -F^{\zeta 1, INT}(d, \theta, \zeta) \end{bmatrix} \quad (A23)$$

$$\mathbf{F}^{EXT}(\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} F^{d, EXT}(d, \theta, \zeta) \\ F^{\theta, EXT} \\ F^{\zeta, EXT} \end{bmatrix} \quad (A24)$$