한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제1호 (2011년 2월), 31–44

리이만 다양체에서 포물형 편미분 방정식에 관한 근현대사 고찰

Modern History of Parabolic Equations on a Riemannian manifold

장정욱 Jeongwook Chang

리이만 다양체 위에서의 편미분 방정식의 연구는 미분기하학에서 중요한 연구 분야로 인식되어 왔다. 본 논문에서는 특히 최근에 미분기하학과 위상수학 분야에서 중요한 역할을 하고 있는 리이만 다양체 위에서의 포물형 방정식에 관한 역사적으로 주목받고 있는 중요한 연구 결과를 정리해 보고, 아울러 이 분야의 최근 연구 결과를 고찰한다.

Partial differential equations on a Riemannain manifold is one of the most important areas in differential geometry. In this article, we survey the role of parabolic equations on some of the main results of differential geometry and topology, especially in the modern mathematical history. Also, we introduce some recent research in this area.

Keywords: 포물형 방정식(Parabolic Equations), 전개 방정식(Evolution Equations), 퇴화 방정식(Degenerate Equations).

1 서론

리이만 다양체에서 편미분 방정식을 연구하는 것은 미분 기하학의 주요 분야로 인식되어진다. 리이만 다양체 위에서 정의되는 편미분 방정식 자체의 해석학적인 특성을 연구하는 것도 전통적인 주요 연구 분야이며, 리이만 다양체의 위상적 또는 기하학적인 여러 가지 성질을 규명하는데 편미분 방정식이 유용한 방법으로 사용된다는 사실도 역사적으로 많은 연구 결과에 의해 널리 알려져 있다. 예를 들어 리이만 다양체 위에서의 조화사상에 관한 연구는 이 분야에서 가장 역사가 오래된 대표적인 연구 분야 중의 하나이며 이 외에도 p-라플라스 방정식, 열 방정식 등 다양한 형태의 편미분 방

MSC: 01A50, 01A55, 01A60
제출일: 2011년 1월 5일 수정일: 2011년 2월 18일 게재확정일: 2011년 2월 19일

정식이 많이 연구되고 있다. 또한 극소 곡면, 아인슈타인 측도의 존재성 등은 리이만 다양체 위에서의 편미분 방정식을 분석함으로써 리이만 다양체의 특성을 알 수 있는 예이다. 또한 리이만 다양체 위에서의 편미분 방정식은 물리학 등에도 응용이 되어 Huisken과 Ilmannen은 역 평균 곡률 흐름 방법을 이용하여 상대성 이론의 유명한 미해결 문제인 Penrose 추측을 리이만 다양체 위에서 해결하기도 하였다.([12])

리이만 다양체 위에서 편미분 방정식을 연구하는데 있어서는 다양체의 기하학적 조건에 따른 분석과 이에 따른 방정식의 해석학적인 방법이 병행된다. 본 논문에서는 이들 각각의 엄밀한 분석과 증명보다는 이 두 가지 요소가 융합되어 하나의 문제가 구성되고 해결되는 일련의 과정에 중점을 두게 된다. 편미분 방정식은 크게 타원형 방정식, 포물형 방정식, 쌍곡형 방정식으로 분류를 하는데, 본 논문에서는 이 중 포물형 방정식의 연구와 관련된 역사적으로 중요한 몇 가지 연구에 대하여 재조명해 보고, 이와 같은 방향으로 향후 응용될 수 있는 문제들에 대하여 고찰해보고자 한다. 특히 리이만 다양체에서 포물형 방정식 연구의 획기적인 시작점이 되었던 조화사상의 존재성 증명과 이를 응용하여 근래 수학계의 가장 큰 이슈가 되었던 Thurston 추측을 해결한 내용에 관한 설명에 주된 관심을 갖고자 한다. 이 두 문제에 관하여 본 논문에서 살펴보게 되는 시각을 통해서, 리이만 기하학의 특정한 성질을 규정하는 타원형 문제를 해결하기 위하여 주어진 타원형 문제와 관련된 포물형 방정식을 구성하고 이를 연구하는 일련의 방법에 대하여도 보다 쉽게 이해할 수 있을 것으로 본다.

본 논문의 구성은 2절에서는 리이만 기하학의 기본 개념에 대한 간략한 정리와 본 논문에서 사용하게 될 기호에 관한 설명 및 포물형 흐름에 관한 간단한 설명을 하고, 3절에서는 타원형 방정식인 조화사상의 존재성을 포물형 방정식인 열 방정식을 이용하여 증명한 연구에 대하여, 4절에서는 밀레니엄 문제 중 유일하게 해결된 문제로 유명해진 Poincaré 추측의 증명에 사용된 리찌 흐름에 대하여, 5절에서는 리이만 다양체 위에서의 포러스-미디어 방정식에 대한 하낙 부등식에 관한 최근 연구에 대하여 고찰해 본다.

2 기본 개념의 간략한 이해

이번 절에서는 본 논문에서 사용되는 리이만 기하학의 기본적인 개념과 정의를 선별하여 소개하고 타원형 작용소로부터 포물형 작용소를 유도하는 일반적인 과정을 간략하게 설명한다. 본 논문에 등장하는 여러 용어 및 기호를 설명하는 목적으로 기술하게 되므로 길고 엄밀한 정의보다는 다소 직관적인 설명에 주안을 두게 되므로 많은

부분의 생략이 있을 수 있음을 밝혀둔다.

리이만 다양체 M은 매끄러운 위상 다양체 위의 각 점에서 주어지는 접평면에 내적이 정의되고, 그 내적을 주는 함수가 다양체 위에서 매끄러운 함수가 될 때의 위상 다양체이다. 이러한 M 위에는 거리를 잴 수 있는 방법인 리이만 계측 g_{ij}와 주어진 리이만 계측 g_{ij}와 잘 어울리는 리이만 접속 ∇를 정의할 수 있다. 리이만 접속은 M 위의 벡터장을 미분하는 방법을 제공하며, 리이만 계측이 주어지면 유일하게 결정된다. 또한 리이만 계측 텐서의 미분이 항상 0이 되도록 하는 성질을 갖고 있다. M 위의 곡선의 길이는 g_{ij}에 곡선의 접벡터를 대입한 함수를 적분하여 구할 수 있으며, 이를 이용하여 M 위의 두 점 사이의 거리는 두 점을 연결하는 곡선의 길이 중 최대하계(infimum)로 정의한다. 이 때 두 점 사이의 거리와 같은 길이를 갖는 곡선은 리이만 기하학에서 중요한 역할을 하는데, 이러한 곡선 γ는 측지선이라 불리며 $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$을 만족한다. γ가 측지선이면 충분히 가까운 두 수 $t_1 < t_2$에 대하여 곡선 $\{\gamma(t)\}_{t_1 \le t \le t_2}$의 길이가 두 점 $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$의 거리와 같게 된다. 또한 $T_{\mathbf{p}}M$의 임의의 벡터 v에 대하여 $\gamma'(0) = v$인 측지선 $\gamma(t)$가 항상 존재하게 되는데, 이를 $\gamma_v(t)$로 표기한다.

이제 $\exp_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \to M$을

$$\exp_{\mathbf{p}}(v) = \gamma_v(1)$$

라 정의할 때, $\exp_{\mathbf{p}}$을 익스포넨셜 사상이라고 한다. 또한 M 위의 모든 점 $\mathbf{p}$에 대하여 반지름 r인 공 $B_{\mathbf{p}}(r)$에서 $\exp_{\mathbf{p}}$가 단사사상이 될 때, 이러한 성질을 만족하는 가장 큰 r을 M의 단사 반경이라고 부른다. 익스포넨셜 사상은 리이만 기하학에서 활용도가 높은 좌표사상이 되며 다음에 소개하게 되는 리찌 흐름의 이해에도 중요한 요소가 된다.

한편 리이만 접속 ∇을 이용하여, M 위의 벡터장 X, Y, Z에 대하여

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z$$

로 정의되는 R을 M의 곡률텐서라 부른다. ($[X,Y]$는 $[X,Y]f = (XY - YX)f$를 만족하는 벡터장이다.) 특히, M 위의 점 $\mathbf{p}$에서의 접평면 $T_{\mathbf{p}}M$의 정규 직교 기저 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$에 대하여 $\langle R(e_i,e_j)e_k, e_l\rangle = R_{ijkl}$이라 표기한다. 곡률텐서는 리이만 기하학을 본격적으로 이해하는 출발점이라 볼 수 있으며, 이로부터 단면 곡률, 리찌 곡률, 상수 곡률 등을 정의할 수 있다.

$T_{\mathbf{p}}M$의 이차원 부분공간 σ의 정규 직교 기저 $\{v, w\}$에 대하여

$$K(\sigma) = K(v,w) = \langle R(v,w)v, w\rangle$$

를 M의 σ에 대한 단면 곡률이라 하는데, 익스포넨셜 사상을 이용하면 이차원 곡면의 가우스 곡률을 이용하여 차원 다양체의 단면 곡률을 다소 거칠기는 하지만 직관적으로 이해할 수 있다. 즉, σ를 $T_{\mathbf{p}}M$의 이차원 부분공간이라 할 때, $\exp(\sigma)$는 M의 이차원 부분 다양체가 된다. 이 때 곡면 $\exp(\sigma)$의 $\mathbf{p}$에서 M의 가우스 곡률이 M의 σ에 대한 단면 곡률이 된다.

또한 $T_{\mathbf{p}}M$의 정규 직교 기저 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$에 대하여

$$r(v, w) = \sum_k \langle R(e_k, v)w, e_k \rangle$$

를 리찌 텐서라 하고, 특히 $r(e_i, e_j) = r_{ij}$로 표기한다. 리찌 텐서는 $n \times n$ 대칭 행렬 형태를 가지며 대각 원소는 특별한 기하학적인 정보를 갖고 있다. 즉, $T_{\mathbf{p}}M$의 단위 벡터 정규 직교 기저 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$에 대하여 r의 i번째 대각원소

$$r_{ii} = \sum_{k \neq i} \langle R(e_k, e_i)e_k, e_i \rangle = \sum_{k \neq i} K(r_k, e_i)$$

는 e_i와 다른 기저로 이루어지는 곡면의 단면 곡률을 모두 더한 값이 됨을 알 수 있다. 그리고, $s = \sum_i r_{ii}$를 M의 스칼라 곡률이라 하고, $S = \int_M s\, dM$을 M의 총 스칼라 곡률이라 한다.

다음으로는 타원형 미분작용소 L을 생각하자. 이로부터 얻어지는 포물형 방정식 $u_t = Lu$는 t에 따른 함수의 흐름으로 이해할 수 있으며, 이 방정식의 정류점이 일반적으로 타원형 방정식 $Lu = 0$의 해가 된다는 것이 알려져 있다. 많은 경우에 $Lu = 0$은 어떤 범함수 F의 오일러-라그랑쥬 방정식이 되어 $u_t = Lu$는 F의 그래디언트 흐름으로 이해할 수 있으므로, 이 때 $u_t = Lu$의 정류점은 F의 임계점이 된다. 역사적으로 곡면의 넓이를 극소화하는 극소 곡면을 얻을 수 있는 평균 곡률 흐름이 이러한 예로 잘 알려져 있다. 주어진 어떤 흐름이 그래디언트 흐름이 되는 것이 얼마나 중요한 지는 3절의 조화 사상과 4절의 리찌 흐름에 대한 설명에서 고찰하게 된다. 특별히 리이만 기하학에서 나타나는 평균 곡률 흐름, 리찌 흐름 등과 같은 곡률과 연관된 포물형 방정식을 곡률 흐름이라고 한다.

3 조화 사상의 존재성

리이만 다양체 위에서 포물형 방정식을 응용하는 방법을 제시한 선도적인 연구는 [7]에서 찾아볼 수 있다. 이는 리이만 다양체에서 정의된 조화사상의 전반적인 성질을 연구한 논문으로서 주 결과는 조화사상의 존재성과 관련된 다음의 증명이다.

정리 3.1: M과 N이 컴팩트 리이만 다양체이고 N이 양이 아닌 단면 곡률을 가질 때, 모든 매끈한 사상 $f : M \to N$은 조화사상과 호모토픽하다.

두 사상이 호모토픽하다는 것은 한 사상이 다른 사상으로 연속적으로 변형될 수 있음을 의미한다. 이번 절에서는 이 정리의 증명에 있어서 포물형 방정식이 어떻게 응용되었는지 살펴보고자 한다.

매끈한 사상 $u : M \to N$에 대하여 u의 에너지 $E(u)$를

$$E(u) := \int_M \frac{1}{2}|du|^2\, dM$$

와 같이 정의하고 $E(u)$의 임계점이 되는 사상 $\overline{u}$를 조화사상이라 부른다. $E(u)$의 임계점을 찾기 위하여 오일러-라그랑쥬 방정식을 계산하면

$$-\nabla E(u) = \nabla_M u^\alpha + g^{ij}\,\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(u)\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial u^\gamma}{\partial x^j} = 0$$

이 되므로

$$-\nabla \tau(u)^\alpha = \nabla_M u^\alpha + g^{ij}\,\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(u)\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial u^\gamma}{\partial x^j}$$

라 할 때, $\tau(u) = 0$이 되는 사상 u가 조화사상이 된다. 여기서

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\beta} g_{\beta k} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} g_{k\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{\beta\gamma} \right\} g^{k\alpha}$$

이며, 이 경우 $\tau(u)$를 u의 장력장이라 부른다. 상수함수, 항등함수, 조화함수, 측지선, 최소부분곡면의 등장매립 등이 조화사상의 예가 된다. 여기까지는 조화사상을 나타내는 타원형 방정식이지만 정리를 증명하기 위하여 전개 방정식이라 불리우는 다음과 같은 초기값 반선형 포물형 방정식을 생각한다.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \tau(u)(x,t) \\ u(x,0) &= f(x) \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

일반적으로 그래디언트 방향은 원래 함수가 가장 빨리 증가하는 방향이므로 위 포물형 방정식은 $f(x)$로부터 시작하여 $M \to N$인 매끈한 함수들의 공간인 바나하 공간 $C^\infty(M,N)$안에서 t가 증가함에 따라 에너지가 가장 빨리 감소하는 방향으로 변형시키는 흐름으로 이해할 수 있다.

어떤 포물형 방정식이 주어지면 그 방정식의 해의 단시간 존재성 여부를 확인하는 것이 중요하다. 해의 단시간 존재성이란 충분히 작은 $\epsilon > 0$에 대하여 $t \in [0,\epsilon)$인 경우 주어진 방정식의 해 $u(x,t)$가 존재하는 것을 의미한다. 위와 같은 열 방정식의 경우는 잘 알려진 정형화된 함수 해석학적인 방법으로 확인할 수 있다. 즉, $H(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \tau(u)$

라 하면 H는 바나하 공간에서 정의된 편미분 작용소이다. H를 선형화 시킨 작용소를 L이라 하면 L은 초기값 선형 포물형 방정식이 된다. 선형 포물형 방정식 이론에 의하여 L은 유일한 해를 가지며 그 해는 유계 사상이 된다. 초기값 함수로부터 해를 구할 수 있는 해 작용소가 유계 선형 동형이며 열린 사상 정리와 역함수 정리로부터 원 작용소 H는 국부적인 역 작용소를 갖게 되어 H도 유일한 해를 갖게 된다.

다음으로는 해의 장시간 존재성 여부이다. 해의 장시간 존재성이란 주어진 포물형 방정식이 $t \in [0, \infty)$에 대하여 해가 존재하는 성질을 뜻한다. 실제로 해의 장시간 존재성이 증명되었다면

$$t \to \infty \text{ 일 때, } \frac{1}{2}\int_M \left|\frac{\partial}{\partial t}u_t\right|^2 dM \to 0$$

이며, 따라서 거의 모든 점에서 $\frac{\partial}{\partial t}u_t \to 0$가 된다. 한편, u_t의 모든 이계도함수가 $t \to \infty$일 때 균등수렴하므로 $\frac{\partial}{\partial t}u_t = \tau(u_t)$로부터 $\frac{\partial}{\partial t}u \to 0$임을 얻게 되고, 따라서 $\tau(u_t) \to 0$가 되어 u_∞가 $C^{2+\alpha}$ 조화사상이 된다. 다음으로는 전형적인 bootstrap 방법에 의하여 u_∞는 C^∞ 조화사상이 됨을 알 수 있다. 즉, f로부터 연속적으로 변형하여 조화사상 u_∞를 얻게 되었으므로 원하는 결과를 증명하게 된다.

다시 돌아와서, 열방정식의 해의 장시간 존재성은 해의 단시간 존재성과 방정식의 해석으로부터 증명된다. 전형적인 a priori estimates에 의한 계산은 여기서는 생략하고 전반적인 개요만을 설명하기로 한다. 다음과 같이 $T \in (0, \infty]$를 정의하자.

$$T := \sup\{\, t \in \mathbb{R} \mid \text{위의 식}(*)\text{은 } [0, t)\text{에서 해가 존재한다.}\}$$

그러면 $t_i \to T$인 t_i에 대하여 $\{u(\bullet, t_i)\}$와 $\{\frac{\partial u}{\partial t}(\bullet, t_i)\}$, $\{\frac{\partial u}{\partial x_k}(\bullet, t_i)\}$가 모두 균등유계이고 동등연속이다. 따라서 아젤라-아스콜리 정리에 의하여 $\{t_i\}$의 부분수열(다시 $\{t_i\}$로 표기하자.)이 존재하여 $\{u(\bullet, t_i)\}$ 및 이의 모든 이계도함수가 균등 수렴하므로 극한 함수도 방정식을 만족시킨다. 또한 $\{\frac{\partial u}{\partial t}\}$의 균등유계성은 $\{t_i\}$의 선택에 무관하게 극한 함수가 유일함을 보장한다. 따라서 원래 주어진 열 흐름은 사실상 $M \times [0, T)$에서 존재하는 것이 아니고 $M \times [0, T]$에서 존재하게 되며, 다시 해의 단시간 존재성에 의하여 T를 넘어선 작은 구간에서의 존재성을 얻게 된다. 만일 T가 유한하다면 이는 T의 정의에 모순이므로 $T = \infty$이다.

4 리찌 흐름

1904년 프랑스의 수학자 Poincaré는 "닫힌 3차원 다양체 위의 모든 루프가 연속적으로 한 점으로 소멸될 수 있다면 그 다양체는 연속적으로 3차원 구로 변형될 수 있다." 라는 위상수학에서 유명한 추측을 내놓게 된다. 이후 이 문제는 Poincaré 추측으로 불리게 된다. 사실은 이미 1900년에 Poincaré가 보다 약한 조건으로 같은 결과를 얻을 수 있다는 문제를 제시하였었다. 그러나 그의 반례를 스스로 찾았고 이를 발표한 논문에서 Poincaré 추측을 새롭게 제기하였다. 이후 많은 수학자들이 이 문제를 해결하기 위하여 노력하였으며 이 분야의 대가들도 Poincaré 추측을 해결하였다고 발표했다가 철회하는 경우가 많이 있었을만큼 어려운 문제로 인식되어왔다.

한편, 1982년 Thurston은 3차원 다양체는 기하학적으로 완전히 분류할 수 있다는 추측을 내놓게 된다. 즉, "닫힌 3차원 다양체는 적절한 분할을 하면 각 부분은 그때까지 알려져 있던 3차원의 8가지 모델 기하 구조 중 하나가 된다."는 내용이다. 여기서 가지 모델공간은 $\mathbb{S}^3$(구면 기하모델), $\mathbb{E}^3$(유클리드 기하모델), $\mathbb{H}^3$(쌍곡 기하모델), $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 기하모델, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 기하모델, $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$($SL_2\mathbb{R}$의 universal cover 기하모델), Nil 기하모델, Sol 기하모델을 말한다. 이 추측에 따르면 모든 루프가 연속적으로 한 점으로 소멸될 수 있는 다양체는 Thurston이 제시한 8가지 모델 기하 구조 중 3차원 구가 되어야 하므로 Poincaré 추측은 Thurston 추측의 특별한 경우가 된다.

같은 해인 1982년에 편미분 방정식의 전문가인 Hamilton은 3절에서 설명한 열 흐름의 방법을 응용한 방법인 리찌 흐름을 제시하고 이를 이용하여 Thurston 추측을 해결하려 하였다. 리찌 곡률이 상수인 리이만 계측은 $S(g) = \int_M s\, dM_g$의 임계점으로 주어진다는 것은 알려져 있는 사실이므로

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_t &= -\nabla S(g_t) \\ g_0 &= g \end{cases}$$

로 나타나는 포물형 방정식은 주어진 g로부터 시작하여 가장 빨리 모델 공간의 계측으로 변형하여 갈 것이며, $t \to \infty$일 때의 극한 다양체가 모델 공간이 될 것이라고 예상할 수 있다. 이는 Eells-Sampson이 예상했던 것과 같은 아이디어이다. 그런데 여기서 포물형 편미분의 가장 기본적인 문제가 발생한다. 즉, 주어진 방정식은 해의 단시간 존재성을 갖고 있지 못하여 더 이상 연구를 진전시킬 수가 없다는 점이다. Hamilton은 이 문제를 극복하기 위하여

$$\nabla S(g_{ij}) = 2r_{ij} - \frac{2}{3} s\, g_{ij}$$

에서 $\nabla S(g_{ij})$인 $2\,r_{ij} - \frac{2}{3} s\, g_{ij}$ 대신 $2r_{ij} - \frac{2}{3}\frac{S(g)}{Vol(M_g)} g_{ij}$를 대입하여 방정식을 변형시킨다. 그러나 이로 인해 Hamilton이 제시한 리찌 흐름은 그래디언트 흐름이 되지 못하여 그래디언트 흐름이 갖는 단조적 성질과 같은 장점을 갖지 못하게 된다. 리찌 흐름은 함수 계수를 상수 계수로 변형시키는 변수 변환에 의하여

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_t &= -2\,r_{g_t} \\ g_0 &= g \end{cases}$$

와 동등하게 되고 이 식의 해는 단시간 존재성을 갖게 됨을 증명할 수 있었다. 이에 대하여는 특히 열 방정식의 해의 단시간 존재성을 이용하여 De-Turck이 증명한 한 다음과 같은 방법이 가장 효율적인 것으로 알려져 있다.

리이만 기하학에서는 좌표 변환 테크닉이 중요하게 사용되는데 De-Turck은 먼저 방정식

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} &= -2\,R_{ij} + \nabla_i W_j + \nabla_j W_i \\ g(0) &= g_0 \end{cases}$$

(여기서, $W_j := g_{jk} g^{pq} \left(\Gamma^k_{pq} - \overline{\Gamma}^k_{pq}\right)$ 이다.)
을 고려하였다. 이 방정식으로부터 얻어지는 상미분방정식

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \phi_t &= -W^*(t) \\ \phi_0 &= id \end{cases}$$

(여기서, $W^*(t)$는 $W(t)$의 $g(t)$에 대한 쌍대 벡터장이다.)
에서 구한 ϕ_t를 이용하여 g_t를 끌어 당김한 계측을 $\overline{g_t}$(즉 $\overline{g_t} = \phi_t^* g_t$)라 하면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\overline{g_t} &= \phi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial t} g_t\right) + \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\left(\phi_{t+s}^* g(t)\right) \\ &= -2\,Rc\,(\overline{g}(t)) \end{aligned}$$

가 되므로 좌표 변환을 통하면 Ricci-DeTurck의 방정식은 리찌 흐름과 동등함을 알 수 있다. 여기서 위 식은 계산을 통하여

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_t = \Delta_{\overline{g}(t),\overline{g}}\phi_t$$

와 동등함을 알 수 있으므로 $\overline{g}(t)$가 리찌 흐름의 해이고 $\phi_t : M \to M$가 열 흐름

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_t = \Delta_{\overline{g}(t),\overline{g}}\phi_t$$

의 해이면 $g(t) := \left(\phi_t^{-1}\right)^* \overline{g}(t)$는 Ricci-DeTurck 흐름의 해이다. 따라서 유일한 해 $g(t)$의 단시간 존재성은 열 흐름의 해 $\phi(t)$의 단시간 존재성을 보이는 것과 동치 명

제가 된다. 3절의 이론에 의하여 열흐름의 유일한 해의 단시간 존재성이 알려져 있으므로 리찌 흐름도 유일한 해의 단시간 존재성을 보장 받게 된다.

이러한 리찌 흐름을 이용하여 Hamilton은 Poincaré 추측에 대한 부분적이지만 성공적인 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

정리 4.1: [8] 3차원 리이만 다양체 M이 양의 리찌 곡률을 가지면 M은 3차원 구와 미분 동형이다.

이 정리에 의하면 모든 루프가 연속적으로 한 점으로 소멸될 수 있는 닫힌 3차원 다양체가 양의 리찌 곡률을 갖는 다는 것을 증명하면 Poincaré 추측이 증명된다. 실제로 Hamilton과 Chow는 리찌 흐름을 이용하여 Thurston 추측의 2차원 곡면에 대한 형태인 uniformization 정리를 새로이 증명했는데([5]), 이 증명에 따르면 2차원 구와 미분 동형인 다양체는 항상 양의 가우스 곡률을 갖게 된다. 따라서 Poincaré 추측도 이와 같은 방법으로 증명될 수 있을 것이라는 희망을 가질 수 있었다. 그러나 이후 이러한 방향으로는 더 이상의 성과가 없었다.

이제 Hamailton이 제시한 Thurston 추측을 해결하기 위한 프로그램은 소위 '수술과 함께 진행되는 리찌 흐름' 으로 설명되는데, 그 아이디어는 직관적으로는 그다지 이해하기 어렵지 않다. 리찌 흐름이 $t \to \infty$일 때 존재하게 되면 그 극한 계측은 모델 계측이 된다. 일반적인 경우에는 초기 계측으로부터 리찌 흐름을 따라가다 보면 유한 시간에 리이만 곡률 텐서의 노옴인 $|R(x,t)|$가 무한대로 발산할 수 있는데, 이 때는 무한대로 발산하는 점에서 발산하기 바로 직전 시각에 그 점을 중심으로 적절히 수술하여 자르고 나뉘어진 부분에 대하여 각각 리찌 흐름을 다시 시작한다. 이 과정을 반복하여 수술하여 떼어내고 남은 각 부분에 대한 리찌 흐름이 모두 긴 시간 존재성을 가질 때까지 반복하면 각 부분이 모델 계측이 되므로 Thurston 추측이 증명된다는 것이다.

이 프로그램에서 기술적으로 가장 어려운 부분은 $|R(x,t)|$가 무한대로 발산하는 특이점에 대한 분석이었는데, Hamailton은 이 부분에 대하여 경우를 나누어 연구하게 된다([9]). 즉, $M(t) = \sup\{|R(x,t)|\}$라 할 때,

타입 Ⅰ : $T < \infty, \quad \sup(T-t)M(t) < \infty$

타입 Ⅱ : $T = \infty, \quad \sup tM(t) = \infty$

로 나누어 분석을 한다. Hamailton은 타입 Ⅰ 특이해의 경우는 $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}P^2 \times$

$\mathbb{R}^1$의 형태를 갖게 됨을 증명하였으며, 타입 II 특이해는 나타나지 않을 것으로 예측하였다. 마지막까지 Hamailton을 괴롭혔던 문제는 타입 II 특이해가 나타나지 않는다는 예측을 증명하는 일이었는데, 이 문제는 리찌 흐름이 시간에 따른 단사 반경 조건을 갖게 되는가의 문제와 밀접한 관련을 갖는다는 것을 알게 된다. 오랜 기간 이 문제의 해결을 보지 못하던 Hamailton은 결국에는 타입 II 특이해가 나타날 수도 있지 않을까라는 생각을 하게 된다. 그러던 중 2003년에 Perelman이 이 부분에 대한 해답을 제시하여 타입 II 특이해는 존재하지 않음을 증명하게 되었고 이로 인해 20년 동안의 리찌 흐름에 대한 연구가 성공적으로 해결되게 된다.

Perelman의 연구의 시작점은 해의 단시간 존재성 문제로 인하여 리찌 흐름이 그래디언트 흐름이 되지 못한 점에 착안하여 리찌 흐름을 다른 시각으로 분석하여 그래디언트 흐름이 되는 변형된 리찌 흐름을 고안한 것이다. 즉, 닫힌 다양체 M 위의 함수 f에 대하여 $e^{-f}dV$를 새로운 측도로 보았다. 이를 dm이라 하고 리이만 계측 g_{ij}와 닫힌 다양체 M 위의 함수 f에 대하여 $F^m = \int_M (R + |\nabla f|^2)dm$이라 하면, 전형적인 계산에 의하여 F^m의 L^2-그래디언트가 $-(R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f)$가 됨을 알 수 있다. 따라서 F^m의 그래디언트 흐름 $(g_{ij})_t = -2(R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f)$를 생각할 수 있는데, 이는 리찌 흐름과 미분동형사상에 의한 차이만을 보이는 흐름이다.

여기에는 깊은 고찰이 있는데, f의 전개 방정식은 $\frac{\partial}{\partial t} f = \nabla f - R$이어서 역시 f에 대한 역방향 열방정식이 되므로 해의 단시간 존재성을 갖는 방정식을 기대하기 힘들지만, 원래의 리찌 흐름의 시각 t_0에서 임의로 택한 f의 역방향 해를 초기값 함수로 택할 수 있으므로 리찌 흐름에 대해 존재함을 가정하여도 무방하게 된다는 것이다.

원래의 리찌 흐름보다 형태상으로는 다소 복잡해 보이지만 Perelman의 변형된 리찌 흐름은 그래디언트 흐름으로서의 많은 장점을 갖게 되는데 그 중 중요한 예는 자연스러운 단조적 성질을 갖게 된다는 점이다. 예를 들어, Perelman의 첫 번째 논문에 등장하는 양인

$$\lambda(g_{ij}) = \inf F(g_{ij}, f), \quad (\text{여기서 inf는 } \textstyle\int_M e^{-f}dV = 1\text{을 만족하는 } f \text{ 중 택한다.})$$

이 증가함을 알 수 있다([13]). 이러한 단조 증가성은 방정식을 분석하는데 큰 도움이 된다는 것이 알려져 있다. 물론 이후에도 많은 어려운 계산과 기하학적인 고찰이 있지만, Perelman은 본질적으로 이를 이용하여 Hamilton을 괴롭혔던 단사 반경 문제를 해결하고 리찌 흐름에는 타입 II 특이해가 나타나지 않는다는 것을 증명한다. 이는 리찌 흐름이 갖고 있던 난관을 해결해 주는 돌파구가 되어 Hamilton의 프로그램을 완성하여 Thurston의 추측을 해결하게 되고 Perelman은 클레이 재단의 밀레니엄 문제

를 해결했다는 영광을 얻게 되며, 아울러 필즈 메달의 수상자가 된다. 이후 Perelman이 보여준 여러 행적은 방송 매체 등을 통하여 일반인에게도 잘 알려져 있다.

5 하낙 부등식

리찌 흐름을 분석하는데 Hamilton이 사용했던 중요한 도구 중 하나는 미분 하낙 부등식이다([9]). 하낙 부등식은 리찌 흐름의 해의 곡률의 다른 시간과 다른 점에서 비교할 수 있는 방법을 제공하였다. 리찌 흐름뿐 아니라 여러 종류의 포물형 방정식에서도 하낙 부등식은 방정식의 해를 연구하는데 중요한 역할을 한다. 이번 절에서는 리이만 다양체에서 정의된 포러스-미디엄 방정식의 내재적 하낙 부등식을 소개한다.

퇴화 포물형 편미분 방정식인 포러스-미디엄 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$u_t(x,t) = \nabla u^m(x,t), \quad m>1, \quad t>0, \quad x \in M$$

유클리드 공간에서는 이 방정식에 관한 내재적 하낙 부등식의 연구가 많이 진행되어 있는데 그 대표적인 결과는 다음과 같다.

정리 5.1: [6] 열린 부분 집합 $\Omega \in \mathbb{R}^n$에 대하여 $\Omega \times (0,T]$에서 $u_t(x,t) = \nabla u^m(x,t)$이 약한 해를 가지며 $u(\bar{x},\bar{t})$라 하자. m과 n에만 의존하는 두 상수 C_0, C_1이 존재하여 $\theta = \frac{C_1 R^2}{[u(\bar{x},\bar{t})]^{m-1}}$에 대하여 $B_{2R}(\bar{x}) \times (\bar{t}-\theta, \bar{t}+\theta) \subset \Omega \times (0,T]$이면

$$u(\bar{x},\bar{t}) \ \le \ C_0 \inf_{\overline{x} \in B_R(\bar{x})} u(\bar{x}, \bar{t}+\theta)$$

을 만족한다.

정리 5.1은 리찌 곡률의 하계를 갖는 리이만 다양체의 경우로 확장될 수 있는데 특별히 음이 아닌 리찌 곡률을 갖는 경우에는 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

정리 5.2: M을 음이 아닌 리찌 곡률을 갖는 n차원 리이만 다양체라 하고, $B_R(x_0)$을 완전 볼록 측지 공이라 하자. u가 포러스 미디업 방정식의 양의 해이면 m과 n에만 의존하는 두 상수 C_1, C_2가 존재하여, $\theta = \frac{C_1 R^2}{[\inf_B u(\cdot,t)]^{m-1}}$에 대하여 $0 < t-\theta < t+\theta < T$이면

$$\sup_{B_R(x_0)} u(\cdot,t) \le C_2 \inf_{B_R(x_0)} u(\cdot, t+\theta)$$

을 만족한다.

이의 증명은 본질적으로 포물형 방정식에 대한 최대 원리에 의해 얻을 수 있다. 곡선 γ와 실수 μ에 대하여 $\int_{t_1}^{t_2} t^\mu \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^2 dt$의 값은 γ가 측지선의 재매개화로 주어질 때, (구체적으로는 측지선 α에 대하여 $\gamma(t) = \alpha\left(\frac{1}{1-\mu} t^{1-\mu}\right)$로 주어질 때이다.) 최솟값 $\frac{1-\mu}{t_2^{1-\mu} - t_1^{1-\mu}} \{\rho(x_1, x_2)\}^2$을 갖는다. 이 때,

$$
\begin{aligned}
L &= \ln u, \\
Q &= u^{m-1}\nabla L + m(u^{m-1} - 1)|\nabla L|^2
\end{aligned}
$$

이라 하면, 계산을 통하여

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} Q &= u^{m-1}\Delta Q + 2m^2 u^{m-1}\langle \nabla Q, \nabla L\rangle + m(m-1)Q^2 - m^{3(m-1)}|\nabla u|^4 \\
&\quad + 2m^{2u^{m-1}}|\nabla\nabla L|^2 + 2m^2 u^{m-1} Rc(\nabla L, \nabla L)
\end{aligned}
$$

을 얻는다.

이 식에 의하면 Q는 의 음수항 $-m^{3(m-1)}|\nabla u|^4$ 때문에 적절한 하계를 갖지 못하는데 이를 극복하게 위하여 시간 변수 t를 $\left[\frac{2(n+4)}{(\inf u)^{m-1}}\right]^{-1} t$로 리스케일링한다. 그러면 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$
\begin{aligned}
\widetilde{u}_s &= \left[\frac{2(n+4)}{(\inf u)^m}\right]^{\frac{m}{m-1}} u_t(x,t), \\
\Delta \widetilde{u}^m &= \left[\frac{2(n+4)}{(\inf u)^m}\right]^{\frac{m}{m-1}} \Delta u(x,t)^m
\end{aligned}
$$

여기서 $Rc \geq 0$인 조건을 사용하여

$$
\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{Q} \geq m\,\widetilde{u}^{m-1}\Delta\widetilde{Q} + 2m^2\,\widetilde{u}^{m-1}\langle\nabla\widetilde{Q}, \nabla\widetilde{L}\rangle + \frac{1}{2}m(m-1)\widetilde{Q}^2
$$

임을 얻게 되고, 최대 원리를 이용하여

$$
\widetilde{Q} = \widetilde{u}^{m-1}\Delta\widetilde{L} + m\left(\widetilde{u}^{m-1} - 1\right)|\nabla\widetilde{L}|^2 \geq -\frac{2}{m(m-1)s}
$$

를 얻게 된다. $\widetilde{Q}$에 대한 이 하계를 이용하면 정리 5.2의 증명을 얻게 된다. 특별히 M이 컴팩트 리이만 다양체인 경우는 다음의 간단한 정리를 얻게 된다.

정리 5.3: M이 음이 아닌 컴팩트 리이만 다양체이고 u가 포러스 미디엄 방정식의 양의 해라고 하자. 그러면 m과 n에만 의존하는 양의 상수 C가 존재하여 $\theta = \frac{(diam\ M)^2}{[\inf_M u(\cdot, t_1)]^{m-1}}$에 대하여 $0 < t - \theta < t + \theta < T$이면

$$
\sup_M u(\cdot, t) \leq \inf_M u(\cdot, t+\theta)
$$

을 만족한다.

6 결론

본 논문에서는 리이만 다양체 위에서의 포물형 방정식의 시작점이 되는 결과와, 미분기하학과 위상수학 문제를 포물형 방정식을 이용하여 큰 성공을 거두었다고 여겨지는 결과와, 그 이외에 가능성이 있는 연구 결과를 소개하였다. 이와 관련된 다른 논문 및 서적에서는 많은 해석학적인 계산과 깊은 리이만 기하학의 개념을 소개하거나 또는 그 반대로 수학적인 내용을 배재하고 쉬운 내용만을 설명하고 있는 것이 대부분이다. 본 논문은 그 중간 방법을 택하여 포물형 방정식의 역사와 그 방법론적인 내용을 아주 전문적이지는 않지만 적절한 수학적 지식을 이용하여 기술하려고 노력하였다. 본 논문 주제에 대하여 관심이 있는 독자들에게 중간 가교 역할을 하는 도움을 주는 논문이 되기를 기대한다.

감사의 글 이 논문을 세밀히 검토해 주신 심사위원들께 깊이 감사드립니다.

참고 문헌

1. 도널 오셔 저, 전대호 역, 푸앵카레의 추측, 출판사 까치, 2007.
2. Jeongwook Chang and Jinho Lee, *Harnack type inequalities for the porous medium equation*, preprint
3. Bennett Chow et al., *The Ricci flow: techniques and applications, Part I. Geometric aspects*, Mathematical Surveys and Monographs **135**, AMS., Provindence, RI, 2007.
4. Bennett Chow et al., *The Ricci flow: techniques and applications, Part II. Geometric aspects*, Mathematical Surveys and Monographs **144**, AMS., Provindence, RI, 2008.
5. Bennett Chow et al., *The Ricci flow on the 2-sphere*, J. Differential Geom., **33** (1991), no. 2, 325–334.
6. E. Di Benedetto, *Intrinsic Harnack type inequalities for solutions of certain degenerate parabolic equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **100** (1988), no. 2, 129–147.
7. James Jr. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.
8. Richard S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom., **17** (1982), no. 2, 255–306.
9. Richard S. Hamilton, *The Harnack estimate for the Ricci flow*, J. Differential Geom., **37** (1993), 225–243.

10. Richard S. Hamilton, *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993), 7–136, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995.
11. Richard S. Hamilton, *Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds*, Comm. Anal. Geom., **7** (1999), no. 4, 695–729.
12. Gerhard Huisken and Tom Ilmanen, *The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality*, J. Differential Geom., **59** (2001), no. 3, 353–437.
13. Grisha Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:Math.DG/0211159.
14. Grisha Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv:Math.DG/0303109.
15. Grisha Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv:Math.DG/0307245.

장정욱 단국대학교 수학교육과
Department of Mathematics Education, Dankook University
E-mail: jchang@dankook.ac.kr